

**MATHEMATISCHE
ANNALEN**

123. BAND



MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
HEINRICH BEHNKE RICHARD COURANT
MÜNSTER (WESTF.) NEW YORK
HEINZ HOPF KURT REIDEMEISTER
ZÜRICH MARBURG (LAHN)
FRANZ RELICH BARTEL L. VAN DER WAERDEN
GÖTTINGEN ZÜRICH

123. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1951

Unveränderter Nachdruck 1973

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 123. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
Bachmann, F., Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff . . .	341
Bachmann, F., und W. Klingenberg, Über Seiteneinteilungen in affinen und euklidischen Ebenen	288
(Anschrift: Kiel, Neue Universität, Bau 13)	
Berichtigung der Arbeit GÁL	339
Berichtigung der Arbeit RÉDEI	340
Burger, E., Über die Homotopietypen gewisser Polyeder	263
(Anschrift: Frankfurt a. M., Schumannstr. 58 E)	
Derwidué, L., Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique	302
(Anschrift: 22 Boul. de l'Ourthe, Chénée [Belgien])	
Dörge, K., und K. Wagner, Bemerkung über die Grundbegriffe der Infinitesimal- rechnung	1
(Anschriften: Bensberg über Köln, Kölner Str. 95; Köln-Rath, Wodanstr. 57)	
Doetsch, G., Über die endliche Laplace-Transformation	411
(Anschrift: Freiburg i. Br., Riedbergstr. 8)	
Falk, G., Über Ringe mit Poisson-Klammern	379
(Anschrift: Marburg/Lahn, Im Gefälle 4)	
Habicht, W., und B. L. van der Waerden, Lagerung von Punkten auf der Kugel	223
(Anschriften: Heidelberg, Keplerstr. 55; Zürich 38, Rainfußweg 7)	
Heinz, E., Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung	415
(Anschrift: Göttingen, Math. Institut, Bunsenstr. 3—5)	
Lorenzen, P., Über endliche Mengen	331
(Anschrift: Bonn, Math. Institut)	
Maaß, H., Über die Darstellung der Modulformen n -ten Grades durch POINCARÉsche Reihen	125
(Anschrift: Heidelberg, Rottmannstr. 29)	
Meschkowski, H., Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche. I.	392
(Anschrift: Berlin-Friedenau, Bundesallee 83)	
Müller, C., Die Potentiale einfacher und mehrfacher Flächenbelegungen	235
Müller, C., Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern	345
(Anschrift: Bonn, Kölnstr. 161)	
Pöschl, K., Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen RIEMANNscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden	79
(Anschrift: Karlsruhe, Wendtstr. 5)	
Röhrli, H., Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I.	53
(Anschrift: Würzburg, Schiestlstr. 13)	
Rose, A., Conditioned Disjunction as a primitive connective for the m -valued Propositional Calculus	76
Rose, A., Systems of Logic whose truth-values form lattices	152

	Seite
Rose, A., A Lattice-theoretic Characterisation of the κ_2 -valued Propositional Calculus (Anschrift: King's College, Aberdeen, Scotland)	285
Schmidt, A., Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik (Anschrift: Marburg/Lahn, Universitätsstr. 28)	187
Schütte, K., Die Eliminierbarkeit des bestimmten Artikels in Kodifikaten der Analysis	166
Schütte, K., und B. L. van der Waerden, Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? (Anschriften: Marburg/Lahn, Universitätsstr. 28b; Zürich 38, Rainfußweg 7)	96
Schwarz, L., Bemerkung zu der Note von G. HERGLOTZ „Eine Formel der formalen Operatorenrechnung“ (Anschrift: Darmstadt, Rhönring 57 pt.)	406
Stein, K., Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vor- gegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite COUSINSche Problem (Anschrift: Münster i. W., Hüfferstr. 71)	201
Stellmacher, K. L., Geometrische Deutung konforminvarianter Eigenschaften des RIEMANNschen Raumes (Anschrift: Göttingen, Math. Institut der Universität, Bunsenstr. 3—5)	34

Bemerkung über die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung.

Von

KARL DÖRGE und KLAUS WAGNER in Köln.

Einleitung.

Unser Ziel ist, die verschiedenen Begriffe der Infinitesimalrechnung in einem allgemeinen topologischen Oberbegriff zusammenzufassen.

Durch unseren ersten Hilfssatz (S. 3, Mitte) wird jeder Menge M , für die ein sehr allgemeiner Umgebungsbegriff festgelegt ist, an jeder ihrer Häufungsstellen p unter Benützung von auf einen topologischen Raum R bezogenen überdeckenden Mengensystemen eine Teilmenge von R als (infinitesimaler) Kern zugeordnet.

Die schärfste spezielle Zuordnung dieser Art erhält man durch den dritten Hilfssatz in § 1 (vgl. S. 10, oben).

Durch Spezialisierung auf den (weniger scharfen) zweiten Hilfssatz in § 1 (vgl. S. 8, unten) erhält man dabei für jede Menge M an jeder ihrer Häufungsstellen p eine untere und obere Approximierende. Dieser Begriff umfaßt gleichzeitig den unteren und oberen Grenzwert, die untere und obere Ableitung, das untere und obere Schmiegpolygon und das untere und obere (z. B. RIEMANNsche) Integral reeller Funktionen.

Der Satz auf Seite 28 (oben) liefert ein allgemeines Kriterium dafür, daß an einer Häufungsstelle p einer Menge M die untere und obere Approximierende zusammenfallen, d. h. daß der Kern nur aus einem Element besteht. Dieser Satz umfaßt das (CAUCHYSche) Kriterium für Konvergenz, ein Kriterium für Differenzierbarkeit, für die Existenz eines Schmiegpolygons und das RIEMANNsche Kriterium für Integrierbarkeit reeller Funktionen.

Im letzten Paragraphen sind die Hauptsätze über stetige Funktionen ziemlich allgemein — ohne Benützung einer Metrik — abgeleitet.

Es entstehen dann natürlich z. B. die folgenden weiteren Fragen: Benutzt man in einem euklidischen Raume zur Überdeckung der darin vorgelegten Menge M die einfachen — hier anschaulich zu übersehenden — Sektoren, die auf Seite 10 (unten) geschildert sind, so ergibt sich als Kern an jeder Häufungsstelle p von M ein Geradenbüschel durch p . Ist M an jeder Stelle „differenzierbar“, so heißt das, der Kern besteht jedesmal aus nur einer Geraden. Wie man nun bei der Behandlung von Differentialgleichungen erster Ordnung jedem Punkte einer euklidischen Ebene eine Gerade zuordnet und fragt, welche Kurven an jedem ihrer Punkte die hier vorgegebene Gerade als Kern haben, so entsteht nun die allgemeine Frage, welche in sich dichten Mengen M eines euklidischen Raumes an jedem ihrer Punkte einen in jedem Raumpunkte (im allgemeinsten Falle beliebig) vorgegebenen Kern haben.

Ferner entsteht z. B. die Frage, welche Rückschlüsse auf die Menge M aus der Kenntnis nur ihrer Kerne gezogen werden können. Aus Arbeiten von O. HAUPT [Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbschattenmengen,

Cr. Journ. (1943)] und K. WAGNER [Charakterisierung stetiger Kurven mit Hilfe eines allgemeinen Richtungsbegriffs für Punktmengen, Math. Ann. (1941)] folgt, daß jede zusammenhängende abgeschlossene Menge, die überall einen eindimensionalen Kern hat, eindimensional ist. Aus der Arbeit von HAUPT folgt darüber hinaus, daß die Voraussetzung, daß der Kern überall eindimensional ist, zur Folge hat, daß dieser fast überall aus einem einzigen Element besteht und daß das Ergebnis, daß die Menge eindimensional ist, aus bereits viel schwächeren Voraussetzungen folgt.

§ 1.

Allgemeiner topologischer Hilfssatz.

Es sei eine Menge \mathfrak{M} gegeben. Es sei p ein festes Element von \mathfrak{M} . Ferner habe man ein gewöhnliches Umgebungssystem von p in \mathfrak{M}^1). Wir bezeichnen die Umgebungen dieses Systems mit $U(p)$ oder $U_1(p)$ oder ähnlich.

Man habe weiter zwei Teilmengen L und M von \mathfrak{M} . Wir sagen, L umschließt M bei p , wenn es eine Umgebung $U(p)$ gibt, so daß der Durchschnitt $L \cdot U(p)$ eine Obermenge von $M \cdot U(p)$ ist²⁾. Dagegen sagen wir, L ist bei p zu M fremd³⁾, wenn es eine Umgebung $U(p)$ gibt, so daß der Durchschnitt der drei Mengen L , M und $U(p)$ entweder nur aus dem einen Element p besteht oder sogar leer ist⁴⁾.

Man habe ein weiteres, aus bestimmten Teilmengen S von \mathfrak{M} bestehendes Mengensystem \mathfrak{S} , ferner habe man in einem topologischen Raume⁵⁾ R ein bestimmtes, aus abgeschlossenen Teilmengen A von R bestehendes Mengensystem \mathfrak{A} , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) \mathfrak{A} ist eindeutig auf \mathfrak{S} abgebildet, in Zeichen $\sigma(A) = S$.
- (2) R ist bikompakt⁶⁾.
- (3) Der Durchschnitt von je zwei Elementen von \mathfrak{A} ist entweder ein Element von \mathfrak{A} oder leer⁷⁾.
- (4) Hat man endlich viele Elemente A, A_1, \dots, A_n von \mathfrak{A} und ist A eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\sum_{v=1}^n A_v$, so umschließt die Vereinigungsmenge

$$\sum_{v=1}^n \sigma(A_v) \text{ die Menge } \sigma(A) \text{ bei } p.$$

¹⁾ D. h. also, man habe ein bestimmtes System von nicht leeren Teilmengen von \mathfrak{M} — die Umgebungen von p heißen — derart, daß es zu je zwei Umgebungen von p eine Umgebung von p gibt, die gemeinsame Teilmenge der beiden ersteren ist. Vgl. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 213, Axiom (B). Wir fordern also nicht die Gültigkeit der drei anderen HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome.

²⁾ Ist diese Bedingung erfüllt, so sagen wir manchmal auch, L umschließt M in (diesem) $U(p)$.

³⁾ — oder auch, L und M sind bei p fremd —.

⁴⁾ Ist diese Bedingung erfüllt, so sagen wir manchmal auch, L und M sind in (diesem) $U(p)$ fremd.

⁵⁾ — Im Sinne von KURATOWSKI —, vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I, S. 37, § 2 ff. (1935).

⁶⁾ D. h. also, für R gilt der Überdeckungssatz von BOREL-HEINE. Daraus folgt, daß auch jede abgeschlossene Teilmenge von R bikompakt ist. Vgl. ALEXANDROFF-HOPF: Topologie, S. 86, Satz IV.

⁷⁾ Hieraus folgt natürlich, daß auch der Durchschnitt von je endlich vielen Elementen von \mathfrak{A} entweder ein Element von \mathfrak{A} oder leer ist.

- (5) Liegt unser p sowohl in $\sigma(A_1)$ als auch in $\sigma(A_2)$ und ist der Durchschnitt $A = A_1 \cdot A_2$ nicht leer, so liegt p auch in $\sigma(A)$.
- (6) R ist ein Element von \mathfrak{A} und $\sigma(R)$ umschließt \mathfrak{M} bei p ⁹⁾.
- (7) Zu je zwei verschiedenen Elementen $\tau_1 \neq \tau_2$ von R gibt es zwei Elemente A_1, A_2 von \mathfrak{A} , so daß τ_1 im Innern⁹⁾ von A_1 und τ_2 im Innern von A_2 liegt und $\sigma(A_1)$ zu $\sigma(A_2)$ bei p fremd ist.

Erfüllt \mathfrak{S} diese Bedingungen (1)–(7), so nennen wir es ein *topologisches Sektorsystem* von p (bezüglich \mathfrak{A} und R). Wir nennen dann jedes Element $\sigma(A)$ von \mathfrak{S} einen (topologischen) Sektor von p in \mathfrak{M} mit dem Bezugsselement A . Wir nennen p auch den Träger der Sektoren.

Dann folgt zunächst leicht die folgende Hilfsbemerkung:

Umschließt der Sektor $\sigma(A)$ die Menge M bei p , so gibt es um ¹⁰⁾ jedes Element von $R - A$ einen Sektor $\sigma(A')$, der zu M bei p (sogar) fremd ist.

Denn nach (2), (3), (4) und (7) existiert um jedes Element von $R - A$ ein zu $\sigma(A)$ fremdes¹¹⁾ $\sigma(A')$. Da $\sigma(A)$ nach unserer Voraussetzung M bei p umschließt, so sind offenbar $\sigma(A')$ und M fremd.

Dann gilt:

Allgemeiner topologischer Hilfssatz:

Es sei M eine Teilmenge der Menge \mathfrak{M} und p sei ein Häufungselement von M ¹²⁾.

Man habe ein topologisches Sektorsystem von p in \mathfrak{M} bezüglich \mathfrak{A} und R .

Dann gibt es eine abgeschlossene, nicht leere Teilmenge K von R mit den folgenden drei Eigenschaften:

Jeder Sektor $\sigma(A)$ um K umschließt M bei p ; jeder Sektor $\sigma(A)$, dessen Bezugsmenge A mindestens ein Element von K auslöst, umschließt nicht M bei p ; um jedes Element von $R - K$ gibt es einen Sektor, der zu M bei p sogar fremd ist.

K läßt sich so bestimmen, daß folgt:

Eine von K verschiedene Teilmenge K' von R kann höchstens dann auch diese drei Eigenschaften mit K gemeinsam haben, wenn K' eine Teilmenge von K und jedes A von \mathfrak{A} um K' eine Obermenge von K ist¹³⁾.

Beweis: Wir nennen ein Element A von \mathfrak{A} ein A^* , wenn der Sektor $\sigma(A)$ die Menge M bei p umschließt. Nach (6) ist R ein A^* . Die Menge unserer A^* ist also nicht leer. Wir zeigen zunächst, der Durchschnitt aller A^* ist nicht leer. Denn im entgegengesetzten Falle würde nach unserer Hilfsbemerkung um jedes Element von R je ein Sektor $\sigma(A)$ existieren, der bei p zu M fremd wäre. Dann würde aus (2), (4) und (6) folgen, daß M zu \mathfrak{M} bei p fremd ist im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, p ist Häufungselement von M .

⁹⁾ Offenbar sind die Bedingungen (4)–(6) nichts weiter als bestimmte Monotonieforderungen (im Sinne des Enthaltenseins) für die Abbildung σ .

¹⁰⁾ Allgemein versteht man unter dem Innern einer Teilmenge B eines topologischen Raumes R die Vereinigungsmenge aller derjenigen offenen Teilmengen von R , die Teilmengen von B sind.

¹¹⁾ Allgemein sagen wir, $\sigma(A)$ liegt um B , wenn B eine Teilmenge des Innern von A ist. Dies bedeutet aber natürlich keineswegs, daß etwa dann auch B eine Teilmenge von $\sigma(A)$ ist.

¹²⁾ Statt „fremd bei p “ sagen wir manchmal auch kurz „fremd“.

¹³⁾ D. h. bezüglich des von uns zugrunde gelegten Umgebungssystems.

¹⁴⁾ Wie man leicht sieht, kann dies tatsächlich eintreffen, wenn nämlich die zugrunde gelegten Mengen A das R , anschaulich gesprochen, nicht „fein genug“ zerschlagen. Für die im folgenden besprochenen „geordneten Sektorsysteme“ und die „speziellen Sektorsysteme“ ist aber unser K durch M , p und die obigen ersten drei Eigenschaften immer eindeutig bestimmt.

Es folgt also, der Durchschnitt aller A^* ist eine abgeschlossene¹⁴⁾, nicht leere Menge K . Wir zeigen jetzt, diese Menge K hat die oben aufgeführten Eigenschaften.

Hierzu denke man sich zunächst ein Element A von \mathfrak{A} um K gegeben. Es sei B das Innere von A . Dann gilt also $K \subseteq B \subseteq A$. Nach unserer Hilfsbemerkung gibt es sodann um jedes Element von $R - K$ (also erst recht von $R - B$) einen Sektor $\sigma(A')$, der bei p zu M fremd ist. Da $R - B$ abgeschlossen und folglich bikompakt ist, gibt es unter den von uns bestimmten Sektoren $\sigma(A')$ endlich viele Sektoren $\sigma(A'_1), \dots, \sigma(A'_n)$, so daß $R - B$ eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\sum_{v=1}^n A'_v$ ist. Ferner ist wegen $B \subseteq A$ selbstverständlich

$$A + \sum_{v=1}^n A'_v = R.$$

Folglich existiert nach (4) und (6) eine Umgebung $U_1(p)$, so daß

$$U_1(p) \subseteq \sigma(A) + \sum_{v=1}^n \sigma(A'_v)$$

gilt, wobei wir wegen des Axioms (B) (vgl. Fußn. ¹) voraussetzen dürfen, daß jedes $\sigma(A'_v)$, $v = 1, 2, \dots, n$, zu M in $U_1(p)$ fremd ist und, falls es überhaupt eine p nicht enthaltende Umgebung $U(p)$ gibt, dann auch $U_1(p)$ nicht p enthält.

Dementsprechend unterscheiden wir die folgenden Fälle: p liege nicht in beiden Mengen M und $U_1(p)$.

Dann ist jedes $\sigma(A_v)$, $v = 1, 2, \dots, n$, zu $M \cdot U_1(p)$ sogar elementfremd. Also umschließt wegen der letzten Ungleichung $\sigma(A)$ die Menge M in $U_1(p)$.

p liege in beiden Mengen M und $U_1(p)$, also nach der über $U_1(p)$ gemachten Voraussetzung, in jeder Umgebung $U(p)$.

Dann existieren zunächst nach Konstruktion von K wegen der Bikompaktheit von $R - B$ und wegen $K \subseteq B \subseteq A$ endlich viele, M bei p umschließende

Sektoren $\sigma(A_\mu^*)$, $\mu = 1, 2, \dots, m$, so daß der Durchschnitt $\prod_{\mu=1}^m A_\mu^*$ eine Teil-

menge von A ist. $\prod_{\mu=1}^m A_\mu^*$ ist wegen $\prod_{\mu=1}^m A_\mu^* \supseteq K$ nicht leer. Ferner liegt p in

jedem $\sigma(A_\mu^*)$, also wegen (5) auch in $\sigma\left(\prod_{\mu=1}^m A_\mu^*\right)$ und schließlich wegen $\prod_{\mu=1}^m A_\mu^* \subseteq A$ und (4) auch in $\sigma(A)$.

Zusammenfassend folgt in jedem Falle, daß der Sektor $\sigma(A)$ die Menge M in $U_1(p)$ umschließt. Also ist unser A tatsächlich ein A^* .

Zum weiteren Beweise der Eigenschaften von K denken wir uns eine Menge A aus \mathfrak{A} gegeben, die mindestens ein Element von K ausläßt. Dann folgt unmittelbar aus der Konstruktion von K , daß diese Menge A kein A^* ist.

Schließlich folgt aus unserer Hilfsbemerkung und der Konstruktion von K , daß es um jedes Element von $R - K$ einen Sektor $\sigma(A')$ gibt, der zu M bei p fremd ist.

Hat außer K eine Teilmenge K' von R auch die aufgezählten Eigenschaften von K , so muß einerseits nach Konstruktion von K jedes Element von K' in K liegen und andererseits jedes A aus \mathfrak{A} um K' (als ein A^*) eine Obermenge von K sein.

¹⁴⁾ Vgl. ALEXANDROFF-HOFF: Topologie, S. 39, Satz III.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Wir nennen die im Beweise des Hilfssatzes konstruierte Menge K den Kern von M bei p (bezüglich \mathfrak{A} und R). Ist diese Menge K insbesondere ein Element von \mathfrak{A} , so nennen wir den Sektor $\sigma(K)$ den *Sektorkern* von M bei p (bezüglich \mathfrak{A} und R) und bezeichnen ihn mit $S(p, M)$.

Als Beispiel betrachten wir fünf verschiedene Punkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt p und die Verbindungsstrecken P_1, P_2, \dots, P_5 (als Punktmengen aufgefaßt) von je einem dieser Punkte des Kreises nach p (vgl. Fig. 1). Wir betrachten sodann die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M} = \sum_{v=1}^5 P_v$. Wir nennen \mathfrak{M} eine Umgebung



Fig. 1

$U(p)$ von p und legen in diesem Beispiel das aus diesem einzigen U bestehende Umgebungssystem zugrunde. Ferner sei R ein aus fünf Elementen a_1, a_2, \dots, a_5 bestehender topologischer Raum mit der trivialen Festsetzung, daß jede Teilmenge von R abgeschlossen sei. Dann sei \mathfrak{A} das System der folgenden Teilmengen von R :

$$A = \{a_v, a_{v+1}, \dots, a_{v+\mu}\}$$

mit $1 \leq v \leq v + \mu \leq 5$, und unsere Sektoren seien folgendermaßen definiert:

$$\sigma(\{a_v, a_{v+1}, \dots, a_{v+\mu}\}) = P_v + P_{v+1} + \dots + P_{v+\mu}.$$

Man sieht anhand von (1)–(7) leicht ein, daß das System dieser $\sigma(A)$ topologisch ist. Betrachten wir dann beispielsweise die Menge $M = P_3$, so besteht der Kern von M bei p offenbar aus dem einen Element a_3 und der Sektorkern von M bei p ist M selbst. Nun ändern wir aber die Sektoren folgendermaßen ab, indem wir nämlich in ihrer Definitionsgleichung für $\lambda = 2, 3, 4$ überall P_λ durch $P_\lambda - \{p\}$ ersetzen. Dann erfüllt dieses abgeänderte Sektorsystem die Bedingungen (1)–(4), (6) und (7), aber nicht (5). Wir betrachten wiederum die Menge $M = P_3$. Dann ist der Durchschnitt aller derjenigen A , deren $\sigma(A)$ unser M bei p umschließt, auch jetzt wieder die aus dem einen Element bestehende, offene Menge $\{a_3\}$. Denn $\sigma(\{a_1, a_2, a_3\})$ und $\sigma(\{a_3, a_4, a_5\})$ umschließen beide die Menge M bei p . Aber trotzdem umschließt der Sektor $\sigma(\{a_3\}) = P_3 - \{p\}$ nicht M bei p , da p nicht in diesem Sektor liegt. Man sieht also, daß man auf die Gültigkeit von (5) nicht verzichten kann, wenn der Hilfssatz gelten soll.

Es ist unser nächstes Ziel, auf eine bestimmte geordnete Menge bezogene Sektorsysteme einzuführen und zu untersuchen. Wir erinnern zunächst an einiges für uns wesentliche aus der Mengenlehre.

Es sei G eine geordnete Menge. Dann kann man bekanntlich die DEDEKINDSchen Betrachtungen auf der Zahlengeraden ohne weiteres auf G übertragen¹⁵⁾. Besitzt G (im DEDEKINDSchen Sinne) Lücken, so kann man die

¹⁵⁾ Vgl. HAUSDORFF, Mengenlehre, 2. Aufl., S. 53/54 (1927). Wir verstehen unter einer DEDEKINDSchen Klasseneinteilung von G jedes geordnete Paar A, B von (leeren oder nicht leeren) Teilmengen von G , welches die folgenden drei Bedingungen erfüllt: $A + B = G$, $A \cdot B$ ist leer, für jedes Element a von A und jedes Element b von B gilt $a < b$. Wir sind etwas allgemeiner als üblich, insofern wir für die Klassen auch die Nullmenge 0 zulassen. Hat G kein erstes Element, so sagen wir, die Klasseneinteilung $0, G$ definiert eine (uneigentliche) Lücke. Entsprechend sagen wir, wenn G kein letztes Element hat, die Klasseneinteilung $G, 0$ definiert eine (uneigentliche) Lücke. Allgemein sagen wir, eine DEDEKINDSche Klasseneinteilung A, B definiert eine Lücke, wenn es in B kein erstes und in A kein letztes Element gibt.

geordnete Menge G , anschaulich gesprochen, mittels „Ausfüllung“ jeder Lücke in G durch je ein „neues“ Element zu einer lückenlosen¹⁶⁾ geordneten Obermenge $[G]$ von G erweitern. Wir nennen $[G]$ eine abgeschlossene Hülle von G oder auch kurz eine Hülle von G ¹⁷⁾.

Hat G ein erstes Element, so ist dieses auch das erste Element von $[G]$; hat G ein letztes Element, so ist dieses auch das letzte Element von $[G]$. Natürlich hat $[G]$ immer ein erstes und ein letztes Element.

Wir nennen jedes Element von $[G] - G$ ein uneigentliches Element von G und jedes Element von G selbst, zum Unterschied dazu, ein eigentliches Element von G ¹⁸⁾.

Die Begriffsbildungen und Bezeichnungen für Intervalle sind in der Mengenlehre nicht immer einheitlich. Wir müssen uns daher mit diesen auseinandersetzen.

Wir verstehen unter einem Intervall der geordneten Menge G jede nicht leere Teilmenge von G , die mit je zwei zu ihr gehörenden Elementen immer auch jedes zwischen diesen beiden Elementen liegende Element von G enthält.

Wir nennen die nur aus einem Element bestehenden Intervalle, und nur diese, manchmal auch ausgeartete Intervalle.

Wir nennen ein Intervall I von G links abgeschlossen, entweder wenn I ein erstes Element hat oder wenn jedes Element von G , welches links von einem Element von I liegt, auch zu I gehört. Wir nennen I links offen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: Jedes Element von G , welches links von einem Element von I liegt, gehört auch zu I ; oder dieses trifft nicht zu und I hat kein erstes Element; oder I hat ein erstes Element und dieses Element hat in G einen (bezüglich der Ordnung) unmittelbaren Vorgänger. Entsprechend definieren wir rechts abgeschlossene und rechts offene Intervalle von G . Ein Intervall von G heißt abgeschlossen, wenn es links und rechts abgeschlossen ist. Entsprechend heißt ein Intervall offen, wenn es links und rechts offen ist.

Es sei x ein Element eines Intervalls I von G . Wir nennen x ein inneres Element von I , wenn es ein offenes Teilintervall¹⁹⁾ von I gibt, welches x als Element enthält. Die Gesamtheit der inneren Elemente von I heißt das Innere von I . Wir nennen I ein Intervall um x , wenn x ein inneres Element von I ist. Offenbar ist jedes Element eines offenen Intervalls stets ein inneres Element desselben. Wir verstehen unter einer Umgebung von x (in G) jedes offene Intervall (von G) um das Element x . Es ist dann hierfür ohne weiteres klar, daß die HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome erfüllt sind²⁰⁾. Daraus folgt, daß jede geordnete Menge G unter Zugrundelegung der hier gewählten Umgebungssysteme ein topologischer Raum ist²¹⁾. Ferner folgt leicht, daß jedes

¹⁶⁾ Eine geordnete Menge heißt lückenlos, wenn jede DEDEKINDsche Klasseneinteilung derselben entweder einen Schnitt oder einen Sprung (also keine Lücke) definiert.

¹⁷⁾ $[G]$ ist bis auf eine ähnliche Abbildung eindeutig bestimmt. Genauer gesagt gilt: Hat man zwei Hüllen $[G]_1$ und $[G]_2$ von G , so gibt es eine ähnliche Abbildung von $[G]_1$ auf $[G]_2$, bei der jedes Element von G auf sich abgebildet ist. Wir können daher mit gewissem Recht statt von einer auch von der Hülle von G sprechen.

¹⁸⁾ Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir im folgenden unter den Elementen von G , falls nichts anderes gesagt wird, aber auch nur die Elemente von G (also nicht die Elemente von $[G] - G$) verstehen.

¹⁹⁾ Wir verstehen unter einem Teilintervall von I eine jede Teilmenge von I , welche ein Intervall von G ist. Insbesondere verstehen wir unter einem abgeschlossenen (bzw. offenen) Teilintervall von I eine jede Teilmenge von I , welche ein abgeschlossenes (bzw. offenes) Intervall von G ist.

²⁰⁾ Vgl. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, S. 213, (A)–(D).

²¹⁾ Vgl. ALEXANDROFF-HOPF: Topologie, S. 43, Satz IX.

abgeschlossene Intervall I von G eine abgeschlossene Menge in G ist, d. h. daß I jedes seiner Häufungselemente enthält. Ferner ist klar, daß jedes offene Intervall von G (als Komplementärmenge einer abgeschlossenen Menge) eine offene Menge in G ist.

Wir haben im vorigen Abschnitt Intervalle von G um ein eigentliches Element x von G definiert. Allgemeiner nennen wir I ein Intervall um das (eigentliche oder uneigentliche) Element x von G , wenn es ein Intervall von $[G]$ um x gibt, so daß der Durchschnitt dieses Intervalls mit G ein Teilintervall von I ist.

Ist I ein Intervall von G um das Element x , so bezeichnen wir dieses Intervall mit $I(x)$, wobei x also auch ein Element von $[G] - G$ sein kann. Man habe ein Intervall $I(x)$ von G . Ist die Menge der Elemente y von G , die in $I(x)$ liegen und zugleich $y \leq x$ erfüllen, nicht leer, so nennen wir diese Menge ein linksseitiges Intervall von x (in G). Entsprechend definieren wir rechtsseitige Intervalle von x (in G). Wir bezeichnen linksseitige Intervalle von x (in G) mit $I_l(x)$, rechtsseitige Intervalle entsprechend mit $I_r(x)$.

Man habe zu jedem Element x einer geordneten Menge G je eine bestimmte Aussage $\varepsilon(x)$. Es sei y ein Element von $[G]$. Wir sagen, $\varepsilon(x)$ gilt links von y , wenn es in jedem $I_l(y)$ von G ein Element x gibt, für welches $\varepsilon(x)$ gilt²²⁾. Dann kann man leicht den folgenden Satz beweisen:

Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

G hat ein erstes Element a und es gilt $\varepsilon(a)$;

G hat ein letztes Element b und es gilt, falls $\varepsilon(x)$ links von b gilt, $\varepsilon(b)$; schließlich zu jedem Element $y < b$ von $[G]$ gibt es, falls $\varepsilon(x)$ links von y gilt, in G ein Element $x > y$, für welches $\varepsilon(x)$ gilt.

Dann folgt: Es gilt $\varepsilon(b)$.

Man kann mit Hilfe dieses Induktionsschlusses leicht den bekannten²³⁾ Überdeckungssatz von BOREL-HEINE beweisen:

Hat man irgend ein System J , welches aus bestimmten Intervallen einer geordneten Menge G besteht, mit der folgenden Eigenschaft: Um jedes Element y von $[G]$ gibt es ein Intervall aus J , so gibt es ein endliches (d. h. aus endlich vielen Intervallen bestehendes) Teilsystem von J mit derselben Eigenschaft.

Wendet man diesen Satz speziell statt auf G auf $[G]$ an, so folgt unmittelbar, jede abgeschlossene Hülle $[G]$ ist bikompakt.

Nach diesem Rückblick auf die Mengenlehre sprechen wir nunmehr wieder über die Sektorsysteme.

Es sei eine geordnete Menge G und eine beliebige Menge \mathfrak{M} gegeben. Wir betrachten das System \mathfrak{A} aller abgeschlossenen Intervalle A von G ²⁴⁾. Es sei p eins der Elemente von \mathfrak{M} . Ferner sei ein bestimmtes System \mathfrak{S} von Teilmengen S von \mathfrak{M} und ein gewöhnliches Umgebungssystem von p in \mathfrak{M} gegeben, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

²²⁾ Definiert man die folgende eindeutige Funktion $\varphi(x)$ über G , es sei in jedem x von G , wofür $\varepsilon(x)$ gilt, $\varphi(x) = 1$, dagegen sei in jedem x von G , wofür $\varepsilon(x)$ nicht gilt, $\varphi(x) = 0$, so ist die Aussage, $\varepsilon(x)$ gilt links von y , äquivalent mit der Aussage, in jedem $I_l(y)$ von G gibt es eine Stelle x , worin $\varphi(x) = 1$ ist.

²³⁾ Vgl. SCHOENFLIES: Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. S. 252. VIIa (1913).

²⁴⁾ Statt \mathfrak{A} konnte man allgemeinere Mengen, z. B. die Menge sämtlicher abgeschlossenen Teilmengen von G betrachten. Wir werden dies am Schluß dieses Paragraphen sogleich allgemein, dann für einen topologischen Raum R (statt G) tun.

- (I) \mathfrak{A} ist eindeutig auf \mathfrak{S} abgebildet, in Zeichen $\sigma(A) = S$.
- (II) Hat man endlich viele Elemente A, A_1, \dots, A_n von \mathfrak{A} und ist A eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\sum_{v=1}^n A_v$, so umschließt die Vereinigungsmenge $\sum_{v=1}^n \sigma(A_v)$ die Menge $\sigma(A)$ bei p .
- (III) Liegt unser p sowohl in $\sigma(A_1)$ als auch in $\sigma(A_2)$ und ist der Durchschnitt $A = A_1 \cdot A_2$ nicht leer, so liegt p auch in $\sigma(A)$.
- (IV) $\sigma(G)$ umschließt \mathfrak{M} bei p .
- (V) Zu je zwei verschiedenen Elementen $x_1 \neq x_2$ von $[G]$ gibt es zwei Elemente A_1, A_2 von \mathfrak{A} , so daß x_1 im Innern von $[A_1]$ und x_2 im Innern von $[A_2]$ liegen und $\sigma(A_1)$ zu $\sigma(A_2)$ bei p fremd ist.

Erfüllt \mathfrak{S} diese Bedingungen (I)–(V), so nennen wir es ein *geordnetes Sektorsystem* von p in \mathfrak{M} (bezüglich \mathfrak{A} und G). Liegt ein solches Sektorsystem vor, so sieht man zunächst leicht, daß es zu jedem abgeschlossenen Intervall A von G eine durch A eindeutig bestimmte Hülle von A gibt, welche ein abgeschlossenes Intervall von unserem $[G]$ ist. Wir bezeichnen diese Hülle von A mit $[A]$. Offenbar haben je zwei verschiedene Elemente $A_1 \neq A_2$ von \mathfrak{A} verschiedene Hüllen $[A_1] \neq [A_2]$ in $[G]$. Bildet man jedes $[A]$ jeweils auf sein A und weiter dieses A mittels der Abbildung σ auf das Element $S = \sigma(A)$ (mit diesem A) ab, so folgt, daß die zusammengesetzte Abbildung $[A] \rightarrow S$ eine eindeutige Abbildung von der Menge aller $[A]$ von $[G]$ auf die Menge \mathfrak{S} ist. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $\sigma([A]) = S^{25}$. Betrachten wir diese Abbildung σ und statt \mathfrak{A} die Menge der $[A]$ in $[G]$, so ergibt sich unmittelbar durch Vergleich von (I)–(7) mit (I)–(V), daß jedes geordnete Sektorsystem topologisch ist. Also folgt aus unserem allgemeinen Hilfssatz unmittelbar als Spezialfall:

Es sei M eine Teilmenge der Menge \mathfrak{M} und p sei ein Häufungselement von M^{26} . Man habe ein geordnetes Sektorsystem von p in \mathfrak{M} bezüglich \mathfrak{A} und G .

Dann gibt es (genau) ein abgeschlossenes Intervall K von $[G]$ mit den folgenden Eigenschaften:

Jeder Sektor $\sigma(A)$ um K umschließt M bei p ; jeder Sektor $\sigma(A)$, dessen Steigungsintervall $[A]$ mindestens ein Element von K ausläßt, umschließt nicht M bei p ; um jedes Element von $[G] \leftarrow K$ gibt es einen Sektor, der zu M bei p fremd ist.

Ferner folgt:

Dieses Intervall K ist der Durchschnitt aller Steigungsintervalle $[A]$ derjenigen Sektoren, die M bei p umschließen.

Wir nennen das erste Element von K die Unterapproximierende von M bei p (bezüglich des \mathfrak{A} und des G), das letzte Element von K die Oberapproximierende

²⁵ Wir nennen hier das $[A]$ das *Steigungsintervall* des Sektors S . Wir wollen natürlich auf $[G]$ kommen, weil diese Menge bikompakt ist. Dieses Ziel erreichen wir dank der Gültigkeit der Gleichung $[A_1 \cdot A_2] = [A_1] \cdot [A_2]$ ($A_1 \cdot A_2 \neq \text{Nullmenge}$). Natürlich hätten wir uns einfacher statt auf die Menge der A bzw. $[A]$ auf die Menge sämtlicher abgeschlossenen Intervalle von $[G]$ festlegen können. Aber mittels unserer ursprünglichen Bezugnahme auf die A von G statt auf die $[A]$ von $[G]$ haben wir eine größere Allgemeinheit erreicht.

Ist B eine Teilmenge von $[G]$, so nennen wir manchmal auch $\sigma(A)$ — statt logisch vollständig gesprochen: $\sigma([A])$ — einen Sektor um B , wenn B im Innern von $[A]$ liegt.

²⁶ D. h. bezüglich des zugrunde gelegten Umgebungssystems von p .

von M bei p (bezüglich des \mathfrak{A} und des G). Wir sagen, M ist bei p **approximierbar** (bezüglich \mathfrak{A} und G), wenn sein Kern ausgeartet ist (wenn also die Unter- und Oberapproximierende von M bei p in ein Element zusammenfällt). Ist dies der Fall, so nennen wir dieses Element die **Approximierende von M bei p** (bezüglich \mathfrak{A} und G). Wir sagen schärfer, M ist bei p **eigentlich bzw. uneigentlich approximierbar**, wenn seine Approximierende bei p ein eigentliches bzw. uneigentliches Element von G ist.

Wir bezeichnen die Unterapproximierende²⁷ von M bei p mit $\underline{\alpha}(p, M)$, entsprechend die Oberapproximierende mit $\bar{\alpha}(p, M)$ und die Approximierende von M bei p (falls dieselbe existiert) mit $\alpha(p, M)$.

Die Approximierbarkeit von M bei p ist also gleichbedeutend mit $\underline{\alpha}(p, M) = \bar{\alpha}(p, M)$.

Zunächst folgt unmittelbar aus dem letzten Hilfssatz:

Ist eine Menge M bei p approximierbar (bezüglich \mathfrak{A} und G) und ist α ihre Approximierende bei p , so umschließt jeder Sektor $\sigma(A)$ um α die Menge M bei p ; dagegen gibt es um jedes von α verschiedene Element von $[G]$ einen Sektor, der zu M bei p fremd ist.

Hat man zwei Teilmengen M_1 und M_2 von \mathfrak{M} und ist p sowohl Häufungselement von M_1 als auch von M_2 , so ist der Kern der Vereinigungsmenge $M_1 + M_2$ bei p offenbar gleich mit dem kleinsten die beiden Kerne von M_1 und M_2 gemeinsam umfassenden Intervall von $[G]$. Also folgt:

$$\underline{\alpha}(p, M_1 + M_2) = \text{Min } (\underline{\alpha}(p, M_1), \underline{\alpha}(p, M_2)),$$

$$\bar{\alpha}(p, M_1 + M_2) = \text{Max } (\bar{\alpha}(p, M_1), \bar{\alpha}(p, M_2)).$$

Hieraus folgt speziell:

Approximiert α jede der beiden Mengen M_1 und M_2 bei p , so approximiert α auch ihre Vereinigungsmenge $M_1 + M_2$ bei p .

Dieses gilt entsprechend statt für zwei Teilmengen von \mathfrak{M} natürlich für beliebig endlich viele Teilmengen von \mathfrak{M} .

Im folgenden wollen wir aus dem allgemeinen Hilfssatz noch einen uns besonders interessierenden anderen Spezialfall ableiten, indem wir statt des Erfüllungseins von (3) und (4), kurz gesagt, eine gewisse Additivität der zu betrachtenden Sektoren in \mathfrak{M} voraussetzen werden.

Hierzu sei eine Menge \mathfrak{M} gegeben, p sei eins ihrer Elemente. Zu diesem p sei ein gewöhnliches Umgebungssystem in \mathfrak{M} gegeben. Weiter habe man einen topologischen Raum R . Dieser sei bikompakt. Wir betrachten die Menge \mathfrak{A} sämtlicher (nicht leeren) abgeschlossenen Teilmengen A von R . Es sei jedes Element τ von R auf je genau eine bestimmte Teilmenge $\sigma(\tau)$ von \mathfrak{M} abgebildet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Der Durchschnitt von zwei Mengen $\sigma(\tau_1)$ und $\sigma(\tau_2)$ ist entweder für je zwei verschiedene Elemente $\tau_1 \neq \tau_2$ von R leer oder er besteht für je zwei verschiedene Elemente $\tau_1 \neq \tau_2$ von R aus dem von uns betrachteten Element p .

(b) Die Vereinigungsmenge sämtlicher $\sigma(\tau)$ umschließt \mathfrak{M} bei p .

(c) Zu je zwei verschiedenen Elementen $\tau_1 \neq \tau_2$ von R gibt es zwei elementfremde abgeschlossene Teilmengen A_1 und A_2 von R , so daß τ_1 im Innern von A_1 und τ_2 im Innern von A_2 liegt.

²⁷ Da wir unser Sektorsystem (bezüglich des \mathfrak{A} und G) fest vorgegeben denken, brauchen wir in den folgenden Bezeichnungen die Abhängigkeit von diesem System nicht anzudeuten.

Wir betrachten zu jedem Element A von \mathfrak{A} je die Vereinigungsmenge

$$\sigma(A) = \sum_{\tau \in A} \sigma(\tau)$$

von sämtlichen Bildmengen $\sigma(\tau)$, deren Urbild τ in A liegt. Dann erfüllt offenbar das System \mathfrak{S} unserer $\sigma(A)$ alle Bedingungen (1)–(7) bezüglich des \mathfrak{A} und des R . Wir nennen \mathfrak{S} ein *einfaches (topologisches) Sektorsystem* von p in \mathfrak{M} (bezüglich R).

Dann folgt aus unserem allgemeinen Hilfssatz, wenn wir darin das \mathfrak{A} durch die Menge sämtlicher (nicht leeren) abgeschlossenen Teilmengen von R und das Wort topologisch durch die beiden Worte einfach topologisch ersetzen, offenbar die Gültigkeit eines wörtlich entsprechenden Hilfssatzes für einfache Sektorsysteme²⁸⁾.

Beispielsweise betrachte man in der Ebene eine Punktmenge M und einen Häufungspunkt p von M . Unsere $U(p)$ seien die Kreisscheiben mit dem Mittel-

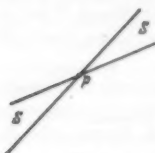


Fig. 2

punkt p . Wir betrachten ein Geradenpaar (in der betrachteten Ebene) mit dem Schnittpunkt p . Das Geradenpaar teilt die Ebene in vier Ebenenstücke. Dann nennen wir jedes der beiden Paare von zwei gegenüberliegenden der insgesamt vier vorhandenen Ebenenstücke einen Doppelwinkel. Schärfer gesagt, verstehen wir unter einem Doppelwinkel mit dem Träger p die volle Ebene und jede Gerade der Ebene durch p und jede abgeschlossene Teilpunktmenge der Ebene, deren Randpunktmenge ein

Geradenpaar mit dem Schnittpunkt p ist. Unsere Sektoren seien in der betrachteten Ebene die Doppelwinkel mit dem Träger p . Dann folgt aus dem Hilfssatz über geordnete Sektoren die Existenz eines Sektorkerns $S(p, M)$ von M bei p . Ist $S(p, M)$ eine Gerade, so ist diese Gerade die Tangente von M bei p .

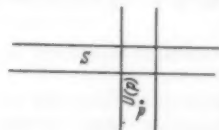


Fig. 3

Wir können aber auch z. B. statt der Doppelwinkel mit dem Träger p „verfeinerte“ Sektoren der Ebene betrachten und zwar, die aus den Punkten sämtlicher derjenigen Geraden der Ebene durch p bestehen, die mit dem um p gelegten Einheitskreis der Ebene als Durchschnittsmenge jeweils

irgend eine abgeschlossene Teilpunktmenge dieses Kreises haben. Anschaulich gesprochen, ergibt sich mit dieser „verfeinerten“ Wahl unserer S natürlich auch ein „feineres“ K . Wir können aber auch z. B. als unsere $U(p)$

²⁸⁾ Z. B. kann unser R jede Hülle einer geordneten Menge sein. Hat man allgemeiner m geordnete Mengen G_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) und bezeichnet man die Elemente von G_μ mit x_μ , so versteht man unter der m -fach geordneten Menge (G_1, \dots, G_m) die Menge der m -Tupel (x_1, \dots, x_m) . Vgl. RIESZ: Über mehrfache Ordnungstypen. Math. Ann. 61, S. 406–421. Ein Element (x_1, \dots, x_m) dieser Menge heißt ein Randelement, wenn für wenigstens ein $\mu = 1, 2, \dots, m$ entweder x_μ das erste oder das letzte Element von G_μ ist. Hat man zu jedem G_μ von $I = (G_1, \dots, G_m)$ eine Hülle $[G_\mu]$ (vgl. Fußnote 17), so nennen wir $([G_1], \dots, [G_m])$ eine (schlichte) Hülle $[I]$ von I . Offenbar ist $[I]$ eine m -fach geordnete Obermenge von I . Werden sämtliche Randelemente von $[I]$ miteinander identifiziert (vgl. ALEXANDROFF-HOPF: Topologie, S. 64), so nennen wir die hierdurch aus $[I]$ hervorgehende Menge eine geschlossene, m -fach geordnete Hülle. Z. B. bilden die Punkte eines jeden Kreises oder auch die Randpunkte eines jeden Rechtecks eine geschlossene, einfach geordnete Hülle; ferner bilden offenbar die Punkte jeder Kugeloberfläche eine geschlossene, zweifach geordnete Hülle. Unser R kann dann z. B. jede (schlichte oder auch geschlossene) m -fach geordnete Hülle sein, da jede Hülle bikompakt ist.

die Vertikalstreifen der Ebene um p und als unsere S die (abgeschlossenen) Horizontalstreifen der Ebene wählen (vgl. Fig. 3). Dann ist offenbar die Approximierbarkeit von M bei p gleichbedeutend mit der Stetigkeit von M bei p .

Wir sehen hieraus, daß die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit unserem Approximierbarkeitsbegriff gemeinsam untergeordnet sind. Wir wollen im folgenden Paragraphen zeigen, daß auch noch sämtliche höheren Ableitungen (etwas verallgemeinert) unter diesen Begriff gemeinsam fallen.

§ 2.

Schmiegepolynome einer Veränderlichen.

Es sei x_0 eine reelle Zahl. Wir betrachten die Gesamtheit der Polynome

$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0)^1 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n ($n = 0, 1, \dots$). Wir denken uns im

folgenden jedes Polynom $\sum_{v=0}^n a_v \cdot (x - x_0)^v$ aus formalen Gründen als Potenz-

reihe $a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_v \cdot (x - x_0)^v + \dots$ oder auch kurz als $\sum a_v \cdot (x - x_0)^v$ geschrieben, deren Koeffizienten dann also jeweils von einer Stelle ab verschwinden. Aus formalen Gründen nennen wir auch noch jedes der beiden Zeichen $+\infty$ und $-\infty$ ein Polynom. Es sei dann G die lexikographisch geordnete Menge unserer Polynome, das soll also heißen, daß für je zwei verschiedene Polynome $g_1(x) = \sum a_v \cdot (x - x_0)^v$ und $g_2(x) = \sum b_v \cdot (x - x_0)^v$ jeweils $g_1 < g_2$ bzw. $g_2 < g_1$ festgesetzt sei, wenn für das kleinste μ in der Folge der Zahlen $0, 1, \dots$, für welches $a_\mu \neq b_\mu$ ist, $a_\mu < b_\mu$ bzw. $b_\mu < a_\mu$ gilt²⁹⁾. Man sieht leicht ein, daß unsere geordnete Menge G in DEDKINDSchen Sinne Lücken hat. Wir wollen nun zunächst diese Lücken von G mit uneigentlichen Elementen ausfüllen.

Hierzu verstehen wir unter einem uneigentlichen Polynom jeden Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_{n-1} \cdot (x - x_0)^{n-1} + \infty \cdot (x - x_0)^n$$

und

$$a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_{n-1} \cdot (x - x_0)^{n-1} - \infty \cdot (x - x_0)^n$$

mit $n = 1, 2, \dots$ und mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Zum Unterschied zu diesen uneigentlichen Polynomen nennen wir jedes Element von G ein eigentliches Polynom³⁰⁾. Auch für die uneigentlichen Polynome benutzen wir von nun an die kurze Bezeichnung $\sum a_v \cdot (x - x_0)^v$ oder ähnlich, wo also unter dem höchsten nicht verschwindenden Koeffizienten dann das Zeichen $+\infty$ bzw. $-\infty$ zu verstehen ist. Auch wollen wir von jetzt ab die kurze Bezeichnung $\sum a_v \cdot (x - x_0)^v$ für jede beliebige Potenzreihe mit reellen Koeffizienten gebrauchen, die nun also nicht mehr schließlich von einer Stelle ab zu verschwinden brauchen, wie dies genau nur bei den (eigentlichen und uneigentlichen) Polynomen der Fall ist. Es sei G^* dann die lexikographisch geordnete Menge sämtlicher (eigentlichen und uneigentlichen) Polynome und

²⁹⁾ Das Zeichen $<$ zwischen den „kurzen“, d. h. aus einem kleinen Buchstaben bestehenden Symbolen für Polynome bedeutet im folgenden immer die Ordnung der Polynome; dagegen bedeutet aber $g(x) < h(x)$ das übliche „kleiner“ der betreffenden Funktionswerte (Zahlen). Selbstverständlich soll das Polynom $+\infty$ und $-\infty$ das letzte bzw. erste Element von G sein.

³⁰⁾ Also auch die Polynome $+\infty$ und $-\infty$, obwohl diese Bezeichnungsweise hierfür zunächst unnatürlich ist.

Potenzreihen. Es ist offenbar $-\infty$ das erste Element und $+\infty$ das letzte Element von G^* und selbstverständlich ist G^* eine geordnete Obermenge von unserem G . Ferner folgt leicht, daß G in G^* dicht ist, d. h. also, zu je zwei Elementen $f < g$ von G^* gibt es ein Element h von G , so daß gilt $f < h < g$. Wir zeigen nun:

G^* ist eine Hülle von G .

Zum Beweise denken wir uns eine DEDEKINDSche Klasseneinteilung A, B von G gegeben, welche eine Lücke in G definiert; d. h. also A hat kein letztes und B kein erstes Element. Wir müssen dann zeigen, es gibt ein Element f von G^* , welches zwischen jedem Element von A und jedem Element von B liegt. Hierzu bezeichnen wir die Elemente von A mit $g = \sum a_v \cdot (x - x_0)^v$, die Elemente von B zur Unterscheidung von jenen mit $h = \sum b_v \cdot (x - x_0)^v$. Dann folgt zunächst, die Menge der nullten Koeffizienten a_0 unserer g ist nach oben beschränkt, da B natürlich nicht aus dem Element $+\infty$ allein bestehen kann. Also hat die Menge der a_0 eine obere Grenze γ_0 . Offenbar ist dieses γ_0 zugleich auch die untere Grenze der Menge der b_0 unserer h . Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(I₀) γ_0 ist kein a_0 .

Dann liegt offenbar das uneigentliche Polynom $f = \gamma_0 - \infty \cdot (x - x_0)$ zwischen jedem Paar g, h von A, B .

(II₀) γ_0 ist kein b_0 .

Dann folgt, daß $f = \gamma_0 + \infty \cdot (x - x_0)$ zwischen jedem Paar g, h von A, B liegt.

(III₀) Es gibt ein gemeinsames $a_0 = b_0 = \gamma_0$; d. h. also, γ_0 ist zugleich das größte a_0 und das kleinste b_0 .

Um im folgenden den vollständigen Induktionsschluß anwenden zu können, nehmen wir an, es seien n reelle Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ bestimmt, so daß für wenigstens ein Element $g = \sum a_v \cdot (x - x_0)^v$ von A und zugleich für wenigstens ein Element $h = \sum b_v \cdot (x - x_0)^v$ von B gilt $a_0 = b_0 = \gamma_0, a_1 = b_1 = \gamma_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1} = \gamma_{n-1}$. Es sei dann A_{n-1} und entsprechend B_{n-1} die Teilmenge sämtlicher g von A bzw. die Teilmenge sämtlicher h von B mit diesen Koeffizienten $a_0 = b_0 = \gamma_0, a_1 = b_1 = \gamma_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1} = \gamma_{n-1}$. Nach unserer Induktionsannahme ist weder A_{n-1} noch B_{n-1} leer. Wir bezeichnen die Menge sämtlicher a_n der zu A_{n-1} gehörenden g mit $\{a_n\}$. Entsprechend sei $\{b_n\}$ die Menge sämtlicher n -ten Koeffizienten b_n der zu B_{n-1} gehörenden h . Da stets $g < h$ gilt und folglich jedes b_n von $\{b_n\}$ eine obere Schranke von $\{a_n\}$ ist, hat die Menge $\{a_n\}$ eine obere Grenze γ_n . Man sieht leicht, daß dieses γ_n zugleich auch die untere Grenze der Menge $\{b_n\}$ ist. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(I_n) γ_n liegt nicht in $\{a_n\}$.

Dann liegt offenbar das uneigentliche Polynom $f = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot (x - x_0) + \dots + \gamma_n \cdot (x - x_0)^n - \infty \cdot (x - x_0)^{n+1}$ zwischen jedem Paar g, h von A, B .

(II_n) γ_n liegt nicht in $\{b_n\}$.

Dann folgt, daß $f = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot (x - x_0) + \dots + \gamma_n \cdot (x - x_0)^n + \infty \cdot (x - x_0)^{n+1}$ zwischen jedem Paar g, h von A, B liegt.

(III_n) Es gibt ein in $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gemeinsames $a_n = b_n = \gamma_n$; d. h. also, γ_n ist zugleich das größte a_n von $\{a_n\}$ und das kleinste b_n von $\{b_n\}$.

In dem hier offenbar allein noch zu behandelnden Falle, daß (III_n) für jedes $n = 0, 1, \dots$ gilt, sieht man leicht, daß dann die Potenzreihe $f = \sum \gamma_r \cdot (x - x_0)^r$ zwischen jedem Paar g, h von A, B liegt. Also gibt es in der Tat in jedem Falle ein Element f von G^* , welches zwischen jedem Elementepaar g, h aus A, B liegt.

Wir kommen nunmehr zum Hauptgegenstand dieses Paragraphen. Zunächst erinnern wir daran, daß es bekanntlich zu je zwei eigentlichen Polynomen $g_1 < g_2$ eine rechtsseitige Umgebung $U_r(x_0)$ auf der x -Achse von x_0 gibt²¹⁾, so daß $g_1(x) < g_2(x)$ für jedes $x \neq x_0$ aus $U_r(x_0)$ und $g_1(x_0) \leq g_2(x_0)$ gilt.

Man habe zwei eigentliche Polynome $g_1(x)$ und $g_2(x)$ (mit dem gemeinsamen Mittelpunkt x_0). Dann nennen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte der x, y -Ebene, die zwischen den beiden Kurven $g_1(x)$ und $g_2(x)$ oder darauf liegen, einen *Polynomsektor*, oder auch den durch g_1 und g_2 bestimmten Sektor (mit dem Mittelpunkt x_0)²²⁾. Hat man ein von $+\infty$ und $-\infty$ verschiedenes eigentliches Polynom $g(x)$ (mit dem Mittelpunkt x_0) vom n -ten Grade (nicht notwendig vom n -ten Effektivgrad), so nennen wir für jede positive Zahl $\eta > 0$ den durch $g(x) - \eta \cdot (x - x_0)^n$ und $g(x) + \eta \cdot (x - x_0)^n$ bestimmten Sektor einen Sektor n -ter Ordnung oder auch den symmetrischen Sektor um $g(x)$ mit dem Radius η (und mit dem Mittelpunkt x_0). Wir bezeichnen diesen Sektor mit $S_{x_0}^{(n)}(\eta, g(x))$ oder auch kurz mit $S^{(n)}$ oder ähnlich.

Beispielsweise sind die Sektoren 0-ter Ordnung, anschaulich gesprochen, die *Horizontalstreifen* konstanter (endlicher) Breite in der x, y -Ebene (vgl. Fig. 4), die also je von zwei Parallelen zur x -Achse begrenzt sind. Ferner sind die Sektoren erster Ordnung (genau) diejenigen (in keine Gerade ausgearteten) Doppelwinkel der x, y -Ebene, die nicht die vertikale Gerade der x, y -Ebene durch ihren Träger als Teilmenge enthalten (vgl. Fig. 5). Hat man einen

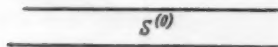


Fig. 4.



Fig. 5.

Sektor S mindestens erster Ordnung und mit dem Mittelpunkt x_0 , so liegt auf der vertikalen Geraden durch den Punkt x_0 der x -Achse in der x, y -Ebene genau ein Punkt von S , und zwar der Schnittpunkt der beiden S bestimmenden Polynome. Wir nennen diesen Punkt den *Träger* von S . Wir nennen Sektoren erster Ordnung auch *Sektorstreifen*.

Man habe einen Polynomsektor S , der durch die beiden Polynome $f_1 < f_2$ bestimmt sei. Es sei f ein Element von G^* . Wir nennen S dann einen Sektor um f , wenn $f_1 < f < f_2$ gilt oder auch, wenn $f = f_1 = -\infty$ gilt oder auch, wenn $f = f_2 = +\infty$ gilt.

Wir wollen hier noch etwas näher bei der Frage verweilen, wie sich die Polynomsektoren; gesondert rechts und links von x_0 verhalten. Wird aus einer

²¹⁾ Natürlich sollen die beiden Polynome um denselben Mittelpunkt x_0 entwickelt sein.

²²⁾ Dieser Sektor besteht also aus allen denjenigen Punkten (x, y) der Ebene, deren Koordinatenpaare x, y entweder $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ oder umgekehrt $g_2(x) \leq y \leq g_1(x)$ erfüllen. Hierbei lassen wir für $g_1(x)$ und $g_2(x)$ auch die Polynome $-\infty$ oder $+\infty$ oder auch beide zu, wobei natürlich $-\infty < y$ und $y < +\infty$ für jede reelle Zahl y festgesetzt ist. Der durch $-\infty$ und $+\infty$ bestimmte Sektor ist also die volle x, y -Ebene.

rechtsseitigen Umgebung $U_r(x_0)$ von x_0 der Punkt x_0 entfernt, so bezeichnen wir die Menge $U_r(x_0) - \{x_0\}$ (also das $U_r(x_0)$ ohne das x_0) mit $U_r(x_0)^{23)}$. Wir denken uns zwei Sektoren S_1 und S_2 gegeben. Es sei S_1 durch die beiden Polynome $f_1 < f_2$ bestimmt; S_2 sei durch die beiden Polynome $g_1 < g_2$ bestimmt. Sind die beiden abgeschlossenen Intervalle $< f_1, f_2 >$ und $< g_1, g_2 >$ von G elementfremd, so gibt es ein $U_r(x_0)$, so daß der Durchschnitt von S_1 , S_2 und dem durch das $U_r(x_0)$ gelegten Vertikalstreifen der x, y -Ebene leer ist.

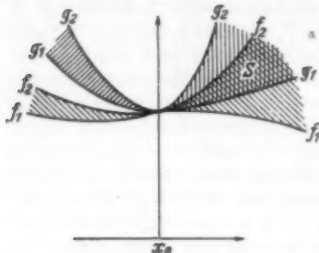


Fig. 6.

Ist dagegen der Durchschnitt der beiden abgeschlossenen Intervalle $< f_1, f_2 >$ und $< g_1, g_2 >$ von G nicht leer, also wiederum ein abgeschlossenes Intervall $< h, k >$ von G , dann existiert ein $U_r(x_0)$, so daß sich in dem durch das $U_r(x_0)$ gelegten Vertikalstreifen der x, y -Ebene der Durchschnitt der beiden Sektoren S_1 und S_2 mit dem durch h und k bestimmten Sektor S völlig deckt. Entsprechendes braucht aber links von x_0 keineswegs der Fall zu sein, da sich ja die Polynome mit ungeradem Effektivgrad bei x_0 durchdringen. Trifft dies z. B. für f_2 und g_1 zu, so können S_1 und S_2 links von x_0 fremd sein, trotzdem sie rechts bei x_0 ein S gemeinsam haben (vgl. Fig. 6). Unterscheiden sich f_1 und g_1 erstmalig in den κ -ten Koeffizienten, g_1 und f_2 erstmalig in den λ -ten Koeffizienten, f_2 und g_2 erstmalig in den μ -ten Koeffizienten und ist hierbei

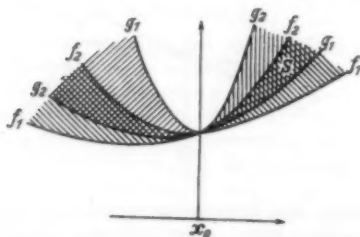


Fig. 7.

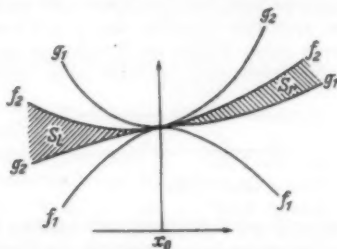


Fig. 8.

$\kappa < \lambda < \mu$, κ gerade, λ und μ ungerade, so wird der Durchschnitt der beiden Sektoren S_1 und S_2 offenbar links bei x_0 von den beiden Polynomen f_2 und g_2 begrenzt, dagegen rechts bei x_0 von den beiden Polynomen g_1 und f_2 (vgl. Fig. 7). Aber auch wenn man einen „linksseitigen“ Sektor S_l von x_0 und einen „rechtsseitigen“ Sektor S_r von x_0 (vgl. Fig. 8) gesondert betrachtet, kann es sein, daß es kein eindeutig bestimmtes engstes S_l und S_r gemeinsam umschließendes (zweiseitiges) S bei x_0 gibt.

Zusammenfassend sehen wir: Der Durchschnitt zweier Polynomsektoren (mit dem gemeinsamen Mittelpunkt x_0) braucht keineswegs zu beiden Seiten bei x_0 wiederum ein Sektor S zu sein; dagegen trifft dies für jede der beiden Seiten von x_0 (d. h. über den $U_l(x_0)$ bzw. $U_r(x_0)$) einzeln zu.

²³⁾ Entsprechend $U_l(x_0) = U_l(x_0) - \{x_0\}$ und $U_r(x_0) = U_r(x_0) - \{x_0\}$.

Um im folgenden alle Betrachtungen für „rechts“ mühelos auf „links“ von x_0 übertragen zu können, setzen wir von jetzt ab „rechts“ von x_0 die Ordnung in G unverändert wie bisher fest; dagegen legen wir „links“ von x_0 die folgende Ordnung fest: Hat man zwei eigentliche Polynome $g_1(x)$ und $g_2(x)$ (mit dem gemeinsamen Mittelpunkt x_0), so setzen wir $g_1 < g_2$ (links von x_0), wenn es ein $U_i(x_0)$ gibt, so daß für jedes x daraus gilt $g_1(x) < g_2(x)$.

Wir führen nun die Untersuchungen „für rechts“ genauer aus. Es sei ein Polynomsektor S mit dem Mittelpunkt x_0 gegeben. Wir betrachten die von der Vertikalen durch x_0 begrenzte rechte (abgeschlossene) Halbebene der x, y -Ebene. Wir nennen den Durchschnitt von S mit dieser (abgeschlossenen) Halbebene einen rechten Halbsektor von x_0 oder auch kurz $\text{den } S_r$. Entsprechend definieren wir mittels Durchschnittsbildung der S mit der linken von der Vertikalen durch x_0 begrenzten (abgeschlossenen) Halbebene die linken Halbsektoren S_l .

Faßt man die durch die $U_r(x_0)$ gelegten Vertikalstreifen der x, y -Ebene als unsere früheren $U(p)$ auf, so sieht man leicht, daß unsere S_r alle Bedingungen (I)–(V) von § 1 erfüllen. Also folgt aus dem allgemeinen Hilfssatz von § 1 (für geordnete Sektorsysteme) unmittelbar die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Man habe eine Punktmenge M in der x, y -Ebene und einen Punkt x_0 der x -Achse, so daß über einem jeden $U_r(x_0)$ wenigstens ein Punkt von M liege.

Dann gibt es (genau) ein abgeschlossenes Intervall $K = \langle f_1^, f_2^* \rangle$ von unserem G^* mit den folgenden Eigenschaften:*

Jeder rechte Halbsektor S_r von x_0 um K umschließt M rechts bei x_0 ; jedes S_r von x_0 , dessen Steigungsintervall von G^ wenigstens ein Element von K ausläßt, umschließt nicht M rechts bei x_0 ; um jedes Element von $G^* - K$ gibt es einen Halbsektor S_r von x_0 , der zu M rechts bei x_0 fremd ist.*

Wie man leicht sieht, gilt dieser Satz völlig analog statt „für rechts“ auch „für links“.

Wir verstehen unter dem *unteren (rechten) Schmiegelement* von M bei x_0 das erste Element f_1^* von K , unter dem *oberen (rechten) Schmiegelement* von M bei x_0 das letzte Element f_2^* von K . Entsprechend unteres (linkes) und oberes (linkes) Schmiegelement von M bei x_0 ²⁴⁾. Selbstverständlich brauchen diese Schmiegelemente nicht eigentliche Polynome zu sein.

Es habe die Punktmenge M bei x_0 die folgenden Schmiegelemente (in der vorhin aufgeführten Reihenfolge):

$$f_1^* = \sum a_v^{(r)} \cdot (x - x_0)^v,$$

$$f_2^* = \sum b_v^{(r)} \cdot (x - x_0)^v,$$

$$g_1^* = \sum a_v^{(l)} \cdot (x - x_0)^v,$$

$$g_2^* = \sum b_v^{(l)} \cdot (x - x_0)^v.$$
²⁵⁾

Es sei

$$a_v^{(r)} = b_v^{(r)} = a_v^{(l)} = b_v^{(l)} = a_v$$

²⁴⁾ Die Existenz sämtlicher vier Schmiegelemente von M bei x_0 folgt also aus der einzigen Bedingung, daß es über jedem $U_r(x_0)$ und jedem $U_l(x_0)$ je mindestens einen Punkt von M gibt. Aber offenbar folgt auch nur, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Existenz sämtlicher vier Schmiegelemente.

²⁵⁾ Im folgenden könnten wir auch die rechten und linken Schmiegelemente gesondert betrachten.

für $\nu = 0, 1, \dots, n$ und jeder dieser gemeinsamen Werte sei eine (eigentliche) Zahl (also $a_\nu \neq -\infty, +\infty$ für $\nu = 0, 1, \dots, n$). Wir sagen dann, M hat bei x_0 das n -te Schmiegepolynom

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu \quad {}^{26)}.$$

Es existieren also die n -ten Schmiegepolynome für jedes n , bis zu dem hin die vier Schmiegelemente ein gemeinsames n -tes Abschnittspolynom besitzen und die Koeffizienten außerdem eigentlich sind.

Anstelle der Vertikalstreifen durch die punktierten Umgebungen von x_0 in der x, y -Ebene kann man natürlich auch die Vertikalstreifen der x, y -Ebene durch die nicht punktierten Umgebungen von x_0 zugrunde legen²⁷⁾. Wir tun das letztere, weil dann die Formulierungen der folgenden Sätze kürzer werden.

Zunächst folgt unter Berücksichtigung von Fußnote ²⁶⁾ ohne weiteres:

Man habe eine Punktmenge M in der x, y -Ebene und einen Punkt x_0 auf der x -Achse, so daß über jedem $U(x_0)$ mindestens ein Punkt von M liege. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent: M hat bei x_0 ein n -tes Schmiegepolynom $\varphi_n(x)$; zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ gibt es ein $U(x_0)$, so daß M über diesem $U(x_0)$ in den (symmetrischen) Sektor $S_{x_0}^{(n)}(\eta, \varphi_n(x))$ hineinfällt.

Man habe eine (reelle) Funktion $f(x)$. Es sei x_0 ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches von $f(x)$. Dann ist die Stetigkeit von $f(x)$ bei x_0 äquivalent mit der Existenz des 0-ten Schmiegepolynoms von $f(x)$ bei x_0 . Ferner ist die Differenzierbarkeit von $f(x)$ bei x_0 äquivalent mit der Existenz des ersten Schmiegepolynoms von $f(x)$ bei x_0 .

Denn die Existenz des 0-ten Schmiegepolynoms von $f(x)$ bei x_0 besagt ja, daß es zu jedem $\eta > 0$ ein $U(x_0)$ gibt, so daß die Kurve $f(x)$ über diesem $U(x_0)$ in einen Horizontalstreifen der x, y -Ebene mit der Breite $2 \cdot \eta$ hineinfällt. Ähnlich besagt die Existenz des ersten Schmiegepolynoms $\varphi_1(x)$ von $f(x)$ bei x_0 , daß es zu jedem $\eta > 0$ ein $U(x_0)$ gibt, so daß die Kurve $f(x)$ über diesem $U(x_0)$ in den Sektorstreifen $S_{x_0}^{(1)}(\eta, \varphi_1)$ hineinfällt.

Ferner kann man die folgenden Sätze beweisen²⁸⁾:

Hat man zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ über einem gemeinsamen Definitionsbereich der x -Achse und besitzen beide bei x_0 ein n -tes Schmiegepolynom $\varphi_n(x)$ bzw. $\psi_n(x)$, dann haben auch $f(x) + g(x)$ und $f(x) \cdot g(x)$ bei x_0 ein n -tes Schmiegepolynom, und zwar ist dann das Schmiegepolynom der Summe gleich der Summe der Schmiegepolynome $\varphi_n(x) + \psi_n(x)$ und das Schmiegepolynom des Produktes ist gleich dem n -ten Abschnittspolynom des Produktes der Schmiegepolynome $\varphi_n(x) \cdot \psi_n(x)$.

²⁶⁾ Liegt einerseits über einem jeden $U_r(x_0)$ mindestens ein Punkt von M und gibt es dagegen andererseits ein $U_l(x_0)$, worüber kein Punkt von M liegt (oder umgekehrt), so nennen wir etwas allgemeiner jedes „rechte“ Schmiegepolynom von M bei x_0 auch ein (beiderseitiges) Schmiegepolynom von M bei x_0 .

²⁷⁾ Als das frühere p (in § 1) kann man dann irgend einen Punkt von M auf der durch das x_0 gelegten vertikalen Geraden der x, y -Ebene wählen oder, falls kein Punkt von M auf dieser Vertikalen liegt, irgend einen beliebigen Punkt dieser Vertikalen. Denn dieses folgt leicht bei Nachprüfung der Bedingung (III). Infolge der etwas „gröberen“ Wahl der (nicht punktierten) U kann natürlich jetzt das K größer werden als vorher bei den „feineren“ U . Dem entspricht für $n = 0$ einerseits bei Zugrundelegung der U die Stetigkeit bei x_0 und andererseits bei Zugrundelegung der U die Konvergenz bei x_0 .

²⁸⁾ Vgl. DÖRGE-WAGNER: Differential- und Integralrechnung, S. 153 ff. (1948).

Haben $g(x)$ und die mittelbare Funktion $h(x) = f(g(x))$ einen gemeinsamen Definitionsbereich und besitzt $g(x)$ bei x_0 ein n -tes Schmiegpolyynom $\psi_n(x)$ und hat ferner die Funktion $f(u)$ bei $u_0 = g(x_0)$ ein n -tes Schmiegpolyynom $\varphi_n(u)$, dann hat auch die mittelbare Funktion $h(x)$ bei x_0 ein n -tes Schmiegpolyynom und zwar ist dieses das n -te Abschnittspolyynom des Polynoms $\varphi_n(\psi_n(x))$.

Aus der Gleichheit der Begriffe Tangente und erstes Schmiegpolyynom folgt leicht, daß der letzte Satz die Kettenregel für die Ableitung mittelbarer Funktionen als Spezialfall für $n=1$ enthält. Der letzte Satz enthält zugleich aber auch als Spezialfall für $n=0$ den Satz über die Stetigkeit mittelbarer Funktionen. Hieraus sieht man, daß man den Satz über die Stetigkeit mittelbarer Funktionen als den einfachsten Fall der Kettenregel bezeichnen kann.

Bisher befaßten wir uns mit der Frage, wann fällt eine Punktmenge M der x, y -Ebene über wenigstens einem $U(x_0)$ in ein vorgegebenes S ? Hierzu bemerken wir, daß wir uns aber (die $U(x_0)$ betreffend) von dem Koordinatensystem völlig unabhängig machen können, wenn wir unsere Frage folgendermaßen stellen, wann ist der Durchschnitt von M mit wenigstens einer Kreisscheibe um einen vorgegebenen Punkt p der Ebene gleich dem Durchschnitt aus M , dieser Kreisscheibe und aus dem vorgegebenen S ? Wie man leicht sieht, sind hierfür die Definitionen der Schmiegelemente und der Schmiegpolynome und die hieraus abzuleitenden Sätze mit ihren Beweisen analog zu den vorigen. Nur erhält man statt der Approximierbarkeit bei x_0 in Bezug auf die durch die $U(x_0)$ gelegten Vertikalstreifen der x, y -Ebene jetzt natürlich eine Approximierbarkeit bei p in Bezug auf die Kreisscheiben um p .

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^{n+1} \cdot \sin x^{-n}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Diese Funktion hat offenbar an der Stelle $x = 0$ das n -te Schmiegpolyynom 0. Man rechnet leicht nach, daß die zweite Ableitung $f''(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht existiert. Wir sehen hieraus, daß für jedes $n \geq 2$ das n -te Schmiegpolyynom existieren kann, ohne daß die n -te Ableitung (an der betrachteten Stelle) existiert. Das Umgekehrte kann aber nicht eintreten. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Man habe eine (reelle) Funktion $h(x)$. Diese habe an der Stelle x_0 der x -Achse eine n -te Ableitung $h^{(n)}(x_0)$.

Dann existiert auch das n -te Schmiegpolyynom von $h(x)$ bei x_0 und dieses ist gleich dem n -ten TAYLORSchen Polynom

$$\sum_{v=0}^n \frac{h^{(v)}(x_0)}{v!} \cdot (x - x_0)^v. {}^{29)}$$

Denn zunächst für $n=0$ und $n=1$ ist dieser Satz nach früherem klar. Wir können daher $n \geq 2$ voraussetzen. Dann folgt nach TAYLOR:

$$h(x) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{h^{(v)}(x_0)}{v!} \cdot (x - x_0)^v + \frac{h^{(n-1)}(\xi) - h^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1}.$$

²⁹⁾ Dieser Satz ist insofern bedeutungsvoll, als mittels dieses Satzes aus jedem bewiesenen Satz für Schmiegpolynome ohne weiteres ein entsprechender Satz über (höhere) Ableitungen folgt. Auch an sich ist er für die Differentialrechnung deshalb interessant, weil mit seiner Hilfe die höheren (LEIBNIZschen) Ableitungen von Kurven unmittelbar an der Kurve selbst gedeutet werden können. Vgl. DÖRGE-WAGNER: Differential- und Integralrechnung (1948), S. 153 ff. und insbesondere S. 156, Fußnote ¹⁶⁾. Ein durch einen Kunstgriff etwas kürzerer (dadurch wohl etwas weniger anschaulicher) Beweis ist uns jetzt bekannt geworden, vgl. N. BOURBAKI, Fonctions d'une variable réelle, Actual. scientif. et industr., Nr. 1074, S. 33 (1949). Über eine gewisse Umkehrung des obigen Satzes vgl. A. ROUSSEL, Sur l'approximation locale des fonctions continues, Bull. Soc. Math. France **69**, S. 97 ff. (1941).

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} = 0$$

sieht man sofort,

$$\varphi_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot (x - x_0)^\nu$$

ist $(n-1)$ -tes Schmiegepolynom von $h(x)$ bei x_0 .

Wir wollen nun zuerst zeigen, daß $h(x)$ bei x_0 auch ein n -tes Schmiegepolynom besitzt. Zunächst gilt nämlich:

(a) Das (uneigentliche) Polynom $\varphi_{n-1}(x) + \infty \cdot (x - x_0)^n$ erfüllt nicht die Bedingungen des unteren rechten Schmiegeelementes von $h(x)$ bei x_0 .

Denn sonst gäbe es zu jeder (auch noch so großen) Zahl ϱ ein $U_r(x_0)$, so daß für jedes x darin gilt:

$$h(x) > \varphi_{n-1}(x) + \varrho \cdot (x - x_0)^n.$$

Dieses besagt nach der TAYLORSchen Formel:

$$\frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} > \varrho \cdot (x - x_0)^n$$

oder auch

$$\frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} > \varrho \cdot (n-1)!.$$

Hieraus folgt wegen $x_0 < \xi_x < x$ erst recht:

$$\frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{\xi_x - x_0} > \varrho \cdot (n-1)!.$$

Diese Relation steht aber im Widerspruch zur Existenz von $h^{(n)}(x_0)$. Also gilt die Aussage (a). Ähnlich folgt:

(b) Das (uneigentliche) Polynom $\varphi_{n-1}(x) - \infty \cdot (x - x_0)^n$ erfüllt nicht die Bedingungen des oberen rechten Schmiegeelementes von $h(x)$ bei x_0 .

Denn sonst könnten wir analog $h(x) < \varphi_{n-1}(x) - \varrho \cdot (x - x_0)^n$ schließen, woraus weiter nach TAYLOR folgen würde

$$\frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} < -\varrho \cdot (n-1)!.$$

Dann wäre aber wegen $x_0 < \xi_x < x$ erst recht:

$$\frac{h^{(n-1)}(\xi_x) - h^{(n-1)}(x_0)}{\xi_x - x_0} < -\varrho \cdot (n-1)!.$$

entgegen der Existenz von $h^{(n)}(x_0)$. Also gilt die Aussage (b)⁴⁰⁾.

Es sei

$$f_1^* = \sum a_\nu^{(*)} \cdot (x - x_0)^\nu$$

das untere rechte,

$$f_2^* = \sum b_\nu^{(*)} \cdot (x - x_0)^\nu$$

⁴⁰⁾ Ließe man als Schmiegepolynome auch uneigentliche Polynome zu, so würde unsere Behauptung auch noch einschließlich für uneigentliche Ableitungen $h^{(n)}(x_0) = -\infty$ und $h^{(n)}(x_0) = +\infty$ zutreffen.

das obere rechte Schmiegeelement von $h(x)$ bei x_0 . Dann folgt weiter:

$$(c) \quad a_n^{(r)} = b_n^{(r)}.$$

Denn nehmen wir an $a_n^{(r)} \neq b_n^{(r)}$, also $a_n^{(r)} < b_n^{(r)}$, so können wir zunächst zwei Zahlen a_n und $\eta > 0$ bestimmen, so daß immer noch

$$a_n^{(r)} < a_n - \eta < a_n + \eta < b_n^{(r)}$$

gilt. Dann gibt es über jedem $U_r(x_0)$ nach dem allgemeinen Hilfssatz sowohl Punkte der Kurve $h(x)$, die unterhalb von $\varphi_{n-1}(x) + (a_n - \eta) \cdot (x - x_0)^n$ liegen, als auch Kurvenpunkte von $h(x)$, die oberhalb von $\varphi_{n-1}(x) + (a_n + \eta) \cdot (x - x_0)^n$ liegen. Mit anderen Worten unterschreitet also die Kurve $h(x)$ rechts von x_0 (mindestens) immer wieder einmal die Kurve $\varphi_{n-1}(x) + (a_n - \eta) \cdot (x - x_0)^n$ und übertrifft auch andererseits (mindestens) immer wieder einmal die Kurve $\varphi_{n-1}(x) + (a_n + \eta) \cdot (x - x_0)^n$ (wie nahe wir rechts von x_0 also auch an x_0 herangehen). Setzen wir

$$h_1(x) = h(x) - (\varphi_{n-1}(x) + a_n \cdot (x - x_0)^n),$$

so übertrifft die Kurve $h_1(x)$ rechts von x_0 immer wieder einmal die Kurve $+\eta \cdot (x - x_0)^n$ und unterschreitet immer wieder einmal die Kurve $-\eta \cdot (x - x_0)^n$. Da $h_1(x)$ wegen $n \geq 2$ über mindestens einem (ganzen) Intervall $I(x_0)$ der x -Achse stetig ist, so folgt nach dem Zwischenwertsatz immer wieder einmal für gewisse x das Erfülltsein der Gleichung $h_1(x) = \eta \cdot (x - x_0)^n$ und immer wieder einmal $h_1(x) = -\eta \cdot (x - x_0)^n$. Es sei x_1 eins dieser x , für das die erste Gleichung $h_1(x_1) = \eta \cdot (x_1 - x_0)^n$ zutrifft. Dann gibt es im offenen Intervall (x_0, x_1) ein x_2 , für welches die Ungleichung $h_1'(x_2) > n \cdot \eta \cdot (x_2 - x_0)^{n-1}$ zutrifft. Denn sonst wäre ja über dem Intervall (x_0, x_1) der x -Achse dauernd die Ableitung $(h_1(x) - \eta \cdot (x - x_0)^n)' \leq 0$, also wegen $h_1(x_1) - \eta \cdot (x_1 - x_0)^n = 0$ dauernd $h_1(x) - \eta \cdot (x - x_0)^n \geq 0$ im Widerspruche dazu, daß immer wieder einmal die Gleichung $h_1(x) = -\eta \cdot (x - x_0)^n$ gilt. Wir sehen hieraus: Rechts von x_0 gilt immer wieder einmal $h_1'(x) > n \cdot \eta \cdot (x - x_0)^{n-1}$, also erst recht $h_1'(x) > \eta \cdot (x - x_0)^{n-1}$. Aus Symmetriegründen gilt analog rechts von x_0 immer wieder einmal $h_1'(x) < -\eta \cdot (x - x_0)^{n-1}$. Ist $n \geq 3$, existiert also $h_1''(x)$ in mindestens einem (ganzen) $I(x_0)$, so ergibt sich völlig analog, daß rechts von x_0 immer wieder einmal $h_1''(x) > \eta \cdot (x - x_0)^{n-2}$ und immer wieder einmal $h_1''(x) < -\eta \cdot (x - x_0)^{n-2}$ zutrifft. Da die $(n-1)$ -te Ableitung $h_1^{(n-1)}(x)$ in mindestens einem (ganzen) $I(x_0)$ der x -Achse existiert, so folgt also schließlich, daß rechts von x_0 immer wieder einmal $h_1^{(n-1)}(x) > \eta \cdot (x - x_0)$ und immer wieder einmal $h_1^{(n-1)}(x) < -\eta \cdot (x - x_0)$ zutrifft im Widerspruch zur Existenz von $h^{(n)}(x_0)$. Also folgt in der Tat (c).

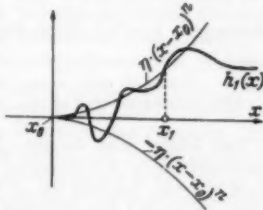


Fig. 9.

Aus (a), (b) und (c) folgt, daß das rechte n -te Schmiegepolynom von $h(x)$ bei x_0 existiert. Spiegelt man die Kurve $h(x)$ samt aller Polynomkurven an der Vertikalen durch x_0 in der x, y -Ebene, so folgt auf Grund der von uns festgesetzten Ordnung der Polynome (links von x_0) ohne weiteres, daß unter der Voraussetzung der Existenz von $h^{(n)}(x_0)$ auch das linke n -te Schmiegepolynom von $h(x)$ bei x_0 existiert. Es bleibt allein noch zu zeigen übrig, jedes dieser

beiden Polynome ist gleich dem n -ten TAYLORSchen Polynom von $h(x)$ bei x_0 . Es genügt, dieses für mindestens eins der beiden Polynome zu zeigen, wie aus Symmetriegründen der Ableitungen und Schmiegepolynome der Kurve $h(-x)$ leicht folgt. Es bleibt also allein noch zu beweisen übrig die Gültigkeit von

$$a_n^{(r)} = \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Hierzu setzen wir:

$$h_1(x) = h(x) - \sum_{v=0}^n \frac{h^{(v)}(x_0)}{v!} \cdot (x - x_0)^v.$$

Dann ist natürlich einerseits $h_1^{(v)}(x_0) = 0$ für $v = 0, 1, \dots, n$, und andererseits ist $q_n(x) = \left(a_n^{(r)} - \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}\right) \cdot (x - x_0)^n$ das rechte n -te Schmiegepolynom von $h_1(x)$ bei x_0 .

Wir nehmen zunächst $a_n^{(r)} - \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!} > 0$ an. Dann gibt es zu der positiven Zahl $\eta = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n^{(r)} - \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}\right)$ ein $x_1 > x_0$, so daß für jedes x aus dem offenen Intervall (x_0, x_1) gilt:

$$(*) \quad h_1(x) > \eta \cdot (x - x_0)^n.$$

Weiter gibt es in jedem Teilintervall (x_0, x_1') von (x_0, x_1) ein x_2 , so daß $h_1'(x_2) > n \cdot \eta \cdot (x_2 - x_0)^{n-1}$ gilt. Denn sonst wäre ja dauernd im Intervall (x_0, x_1') die Ableitung der Differenz $(h_1(x) - \eta \cdot (x - x_0)^n)' \leq 0$, also wegen $h_1(x_0) = -\eta \cdot (x_0 - x_0)^n = 0$ die Differenz selbst ≤ 0 im Widerspruch zu (*).

Wendet man diese Schlußweise auf $h_1^{(v)}(x)$ für $v = 1, 2, \dots, n$ an, so ergibt sich $h_1^{(n)}(x_0) \geq n! \cdot \eta > 0$ im Widerspruch dazu, daß diese Ableitung verschwindet. Ähnlich führt die Annahme $a_n^{(r)} - \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!} < 0$ auf einen Widerspruch.

$$\text{Also folgt in der Tat } a_n^{(r)} = \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Der letzte Satz besagt, daß wir die n -ten Schmiegepolynome als verallgemeinerte n -te TAYLORSche Polynome auffassen können oder auch mit anderen Worten, daß wir die $n!$ -fachen n -ten Koeffizienten der Schmiegepolynome als verallgemeinerte n -te Ableitungen bezeichnen können.

Es ist unser Ziel im nächsten Paragraphen, den letzten Satz auf den Raum zu übertragen.

§ 3.

Schmiegepolynome von zwei Veränderlichen.

Im folgenden wollen wir zunächst Punktmengen im dreidimensionalen Euklidischen Raum mit Hilfe von Polynomen zweier Veränderlichen bei $p = (x_0, y_0, 0)$ approximieren⁴¹⁾.

Wir führen die Transformation ein:

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0.$$

⁴¹⁾ x, y, z und h, k, z sollen im folgenden immer Koordinaten eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems sein.

Es ist p der Nullpunkt der h, k -Ebene. Wir denken uns in p einen Winkel α an der positiven h -Achse in der h, k -Ebene angetragen (vgl. Fig. 10) und weiter auf seinem freien Schenkel den Punkt e im Abstand 1 von p markiert. Wir verstehen dann unter der (geeichten) Geraden durch p in Richtung α die Gerade durch p, e mit dem Nullpunkt p und dem Einheitspunkt e . Wir bezeichnen die Koordinate eines Punktes auf dieser geeichten Geraden vorzugsweise mit t und nennen daher die Gerade selbst oft eine t -Achse. Natürlich ist ihre Richtung α immer nur bis auf additive, ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Wir vereinbaren, in der Vertikalebene (des Raumes) durch die betrachtete t -Achse immer das folgende Koordinatensystem zugrunde zu legen, als Abszissenachse dieser Ebene die t -Achse selbst und als Ordinatenachse dieser Ebene die z -Achse durch p .

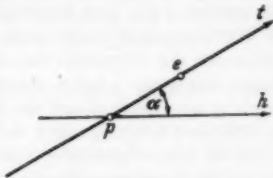


Fig. 10.

Es sei eine Punktmenge M im Raume gegeben. Wir betrachten die t -Achse durch unser p in einer vorgegebenen Richtung α . Der Durchschnitt von M mit der durch unsere t -Achse gelegten Vertikalebene sei eine nicht leere Menge M' . Existiert dann in der betrachteten Vertikalebene das n -te Schmiegpoly-nom von M' bei p (d. h. also bei $t = 0$), so nennen wir dieses Polynom das n -te partielle Schmiegpoly-nom von M bei p in Richtung α .

Es existiere in jeder Richtung α das n -te partielle Schmiegpoly-nom von M bei p . Dann verstehen wir unter der schwachen n -ten Schmiegläche von M bei p diejenige Fläche über der vollen h, k -Ebene, die von der Vereinigungsmenge der n -ten partiellen Schmiegpoly-nome von M bei p , von denen also in jeder Vertikalebene durch p je genau eins (als Kurve) liegt, gebildet wird⁴²⁾. Ist diese n -te Schmiegläche speziell ein zweidimensionales Polynom und zwar, wie man dann leicht beweisen kann, gleichfalls vom Grad n , so nennen wir dieses Polynom das schwache n -te Schmiegpoly-nom von M bei p .

Man habe in jeder Vertikalebene durch p je genau ein Polynom. Dann nennen wir die Vereinigungsmenge dieser Polynome ein Polynombüschel. Jedes der betrachteten Polynome nennen wir ein Polynom des Büschels. Der Punkt p heißt der Mittelpunkt des Büschels. Wir sagen, ein Polynombüschel hat den Grad n , wenn jedes Polynom des Büschels den Grad n hat. Z. B. ist eine schwache n -te Schmiegläche von M bei p offenbar ein Polynombüschel n -ten Grades mit dem Mittelpunkt p .

Man habe in jeder Vertikalebene durch p je genau einen Polynomsektor mit dem Mittelpunkt p . Dann nennen wir die Vereinigungsmenge dieser Sektoren ein Sektorbüschel mit dem Mittelpunkt p . Schließlich definieren wir symmetrische Sektorbüschel. Hierzu denken wir uns ein Polynombüschel vom Grad n mit dem Mittelpunkt p gegeben. Ferner sei eine positive Zahl $\eta > 0$ gegeben. Dann verstehen wir unter dem symmetrischen Sektor vom Radius η um das vorgegebene Büschel die Vereinigungsmenge der folgenden Sektoren: Man nehme in jeder Vertikalebene durch p je den symmetrischen Sektor um das jeweils in dieser Vertikalebene liegende Polynom des vorgegebenen Büschels und zwar stets den Sektor mit dem gleichen Radius η und mit dem festen

⁴²⁾ Diese Fläche ist schlicht über der vollen h, k -Ebene mit Ausnahme höchstens vom Punkte p . Natürlich kann man an Stelle der partiellen (zweiseitigen) Schmiegpoly-nome allgemeiner auch „einseitige“ partielle Schmiegpoly-nome bei p betrachten.

Mittelpunkt p . Ist hierbei das betrachtete Polynombüschel speziell ein Polynom $\varphi(h, k) = \sum_{r=0}^n \sum_{\mu=0}^r a_{r-\mu, \mu} \cdot h^{r-\mu} \cdot k^\mu$, so sprechen wir natürlich vom (symmetrischen) Sektor um $\varphi(h, k)$ mit dem Radius η . Wir bezeichnen diesen Sektor mit $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$. Bezeichnen wir den Abstand eines jeden Punktes $(h, k, 0)$ der h, k -Ebene vom Nullpunkte p je mit $r(h, k)$, so ist der Sektor $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ offenbar gleich der Vereinigungsmenge der Flächen $\varphi(h, k) + \lambda \cdot (r(h, k))^n$ für alle Zahlen λ aus dem Intervall $-\eta \leq \lambda \leq +\eta$.

Wir verstehen unter einem Stern um p eine jede Punktmenge der h, k -Ebene mit der folgenden Eigenschaft, bildet man den Durchschnitt der Punktmenge mit einer t -Achse durch p , so ist dieser immer (also für jede t -Achse durch p) ein Intervall auf der betrachteten t -Achse um p . Dann folgt zunächst aus früheren Überlegungen unmittelbar der folgende Satz:

Ist M eine Punktmenge im Raume, so daß für jede t -Achse durch unser p über jedem (eindimensionalen) $U^1(p)$ dieser t -Achse stets wenigstens ein Punkt von M liegt, dann sind die beiden Aussagen äquivalent: M hat bei p ein schwaches n -tes Schmiegepolynom $\varphi(h, k)$; zu jedem $\eta > 0$ gibt es einen Stern um p in der h, k -Ebene, so daß M über diesem Stern in den Sektor $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ hineinfällt.

Im folgenden interessieren wir uns aber für die Frage, wann die letzte Aussage sogar für „volle“ Umgebungen der h, k -Ebene um p (also statt der Sterne um p) zutrifft.

Wir verstehen unter einer (zweidimensionalen) Umgebung von p das Innere einer jeden Kreisscheibe der h, k -Ebene mit dem Mittelpunkt p . Wir bezeichnen zweidimensionale Umgebungen von p mit $U^{\text{II}}(p)$ oder ähnlich⁴³⁾.

Es sei eine Punktmenge M im Raume gegeben. Es gebe $n+1$, von der k -Achse verschiedene Geraden durch p in der h, k -Ebene, so daß über jedem $U^{\text{I}}(p)$ jeder dieser $n+1$ Geraden stets wenigstens ein Punkt von M existiert⁴⁴⁾. Wir nennen dann ein Polynom $\varphi(h, k) = \sum_{r=0}^n \sum_{\mu=0}^r a_{r-\mu, \mu} \cdot h^{r-\mu} \cdot k^\mu$ ein

starkes n -tes Schmiegepolynom von M bei p , wenn jedes $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ die Menge M bei p umschließt, das soll, schärfer gesagt, heißen, wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $U^{\text{II}}(p)$ gibt, so daß M über diesem $U^{\text{II}}(p)$ in das $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ hineinfällt.

Man sieht dann leicht ein:

Die Existenz des 0-ten starken Schmiegepolynoms von M bei p ist äquivalent mit der Stetigkeit von M bei p , und ferner ist die Existenz des ersten starken Schmiegepolynoms von M bei p äquivalent mit der Existenz einer Tangentialebene von M bei p , und zwar fällt im letzten Falle, wenn eins von beiden existiert, das Schmiegepolynom (als Fläche aufgefaßt) mit der Tangentialebene zusammen.

Denn, anschaulich gesprochen, ist ja jedes $S_p^{(0)}(\eta, a_{0,0})$ eine von zwei Horizontalebene begrenzte Horizontalschicht im Raume mit der Breite $2 \cdot \eta$

⁴³⁾ Zum Unterschiede hierzu bezeichnen wir die eindimensionalen Umgebungen von p manchmal auch mit $U^{\text{I}}(p)$, entsprechend die punktierten eindimensionalen Umgebungen $U^{\text{I}}(p) - \{p\}$ mit $U^{\text{I}}(p)$.

⁴⁴⁾ Diese Voraussetzung über M soll lediglich die Eindeutigkeit der starken n -ten Schmiegepolynome garantieren (vgl. den folgenden Satz (d)). Hierzu reicht aber auch schon die folgende etwas schwächere Voraussetzung über M und p hin, ist M die Vertikalprojektion von M in die h, k -Ebene, so soll der Sektorkern von M bei p (im Sinne des vorletzten Beispiels von § 1) aus mindestens $n+1$, von der k -Achse verschiedenen Geraden bestehen.

und jedes $S_p^{(1)}(\eta, \varphi_1)$ eine von zwei Kegeln mit über p zusammenfallender Spitze begrenzte „Schicht“ um die Ebene $\varphi(h, k)$.

Man habe zwei Punktmengen P und Q im Raum. Es sei g eine Gerade durch unser p in der h, k -Ebene. Wir sagen dann, P und Q sind über g bei p fremd, wenn es ein $U^I(p)$ auf g gibt, so daß der Durchschnitt von P, Q und von dem durch $U^I(p)$ im Raum errichteten Vertikalstreifen entweder nur aus einem über p liegenden Punkt besteht oder leer ist.

Dann kann man zunächst mit einfachsten Mitteln beweisen:

(a) Hat man zwei verschiedene Polynome $\varphi(h, k) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu$

und $\psi(h, k) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^v b_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu$ mit demselben Grad n , so gibt es in dem Büschel sämtlicher Geraden der h, k -Ebene durch unser p , endlich viele Geraden g_1, g_2, \dots, g_m ($m \leq n+1$), so daß gilt: Zu jeder Geraden des betrachteten Büschels, die von g_1, g_2, \dots, g_m verschieden ist, gibt es eine Zahl $\eta > 0$, so daß $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ und $S_p^{(n)}(\eta, \psi)$ über dieser Geraden bei p fremd sind.

(b) Hat man ein Polynom $\varphi(h, k) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu$ und ein λ -tes

Abschnittspolynom $\psi(h, k) = \sum_{v=0}^\lambda \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu$ von $\varphi(h, k)$ mit $\lambda \leq n-1$, so gibt es zu jedem $\eta_1 > 0$ und jedem $\eta_2 > 0$ ein $U^{II}(p)$, so daß der Sektor $S_p^{(n)}(\eta_1, \varphi)$ über diesem $U^{II}(p)$ in den Sektor $S_p^{(A)}(\eta_2, \psi)$ hineinfällt.

Hieraus folgt:

(c) Hat eine Punktmenge M bei p ein starkes n -tes Schmiegepolynom $\varphi(h, k)$, so erfüllt auch jedes λ -te Abschnittspolynom von $\varphi(h, k)$ für $\lambda = 0, 1, \dots, n$ die Bedingungen des starken λ -ten Schmiegepolynoms von M bei p .

Denn sind unsere Polynome, ausführlich geschrieben,

$$\varphi(h, k) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu,$$

$$\psi(h, k) = \sum_{v=0}^\lambda \sum_{\mu=0}^v a_{v-\mu, \mu} \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu \quad \text{mit } \lambda \leq n-1,$$

und ist dann $\eta > 0$ gegeben, so gibt es ein $U_1^{II}(p)$, so daß M über diesem $U_1^{II}(p)$ in den Sektor $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ hineinfällt. Nach (b) gibt es ein $U_2^{II}(p)$, so daß hierüber $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ in $S_p^{(A)}(\eta, \psi)$ fällt. Also fällt M über jedem $U_1^{II}(p)$ und $U_2^{II}(p)$ gemeinsamem $U^{II}(p)$ in $S_p^{(A)}(\eta, \psi)$.

Weiter folgt:

(d) Hat die Menge M bei p ein starkes n -tes Schmiegepolynom $\varphi(h, k)$, so erfüllt kein von diesem $\varphi(h, k)$ verschiedenes Polynom auch noch die Bedingungen des starken n -ten Schmiegepolynoms von M bei p .

Denn es sei $\chi(h, k)$ ein von $\varphi(h, k)$ verschiedenes Polynom n -ten Grades. Dann gibt es zunächst nach (a) eine Gerade g durch p in der h, k -Ebene und eine Zahl $\eta > 0$, so daß die beiden Sektoren $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ und $S_p^{(n)}(\eta, \chi)$ über g bei p fremd sind. Außerdem kann hierbei nach (a) angenommen werden, daß über jedem $U^I(p)$ von diesem g mindestens ein Punkt von M liegt. Da $\varphi(h, k)$

Schmiegpolyinom ist, gibt es ein $U^{II}(p)$, so daß M über diesem $U^{II}(p)$ in den Sektor $S_p^{(n)}(\eta, \varphi)$ hineinfällt. Folglich gibt es ein $U^I(p)$ von g , worüber M dauernd aus $S_p^{(n)}(\eta, \chi)$ herausfällt. Also fällt M über keinem einzigen $U^{II}(p)$ in $S_p^{(n)}(\eta, \chi)$. D. h. kein von $\varphi(h, k)$ verschiedenes Polynom erfüllt auch noch die Bedingungen des n -ten starken Schmiegpolyinoms für M bei p .

Ist z. B. unser M die Vereinigungsmenge von n verschiedenen Geraden $k = a_v \cdot h$ ($v = 1, 2, \dots, n$) der h, k -Ebene, so erfüllt natürlich das identisch in h und k verschwindende Polynom n -ten Grades die Bedingungen des n -ten starken Schmiegpolyinoms von diesem M bei p . Es erfüllt aber auch noch das Polynom $\chi(h, k) = \prod_{v=1}^n (k - a_v \cdot h)$ diese Bedingung. Hieraus sehen wir, daß

wir auf unsere Voraussetzung über M (vgl. Fußnote ⁴⁴) nicht verzichten können, wenn die Eindeutigkeit des starken Schmiegpolyinoms bestehen soll.

Man habe ein Funktion $f(h, k)$.

Wir setzen jetzt bis zum Schlusse dieses Paragraphen generell voraus, daß diese Funktion mindestens über einem (ganzen) $U^{II}(p)$ von $v = (0, 0, 0)$ definiert ist.

Wir bezeichnen die n -te partielle Ableitung von f nach u_1, \dots, u_n mit $f_{u_1 \dots u_n}^{(n)}(h, k)$, wobei jedes u_1, \dots, u_n je entweder das Symbol h oder k bedeute. Ist hierbei speziell $u_v = h$ für $v = 1, 2, \dots, \lambda$ und $u_v = k$ für $v = \lambda + 1, \dots, n$, so bezeichnen wir die n -te partielle Ableitung von f mit diesen Indizes auch mit $f_{h^\lambda k^{n-\lambda}}^{(n)}(h, k)$.

Es seien drei ganze Zahlen gegeben $v \geq 1$, $\kappa \geq 0$ und $\lambda \geq 0$; hierbei sei $\kappa + \lambda = v$. Wir nennen u_1, u_2, \dots, u_v eine (κ, λ) -Kombination, wenn unter diesen Symbolen im ganzen κ -mal h und λ -mal k vorkommt. Wir sagen, die Kombination u_1, u_2, \dots, u_v ist gleich der Kombination v_1, v_2, \dots, v_v , wenn $u_\mu = v_\mu$ für jedes $\mu = 1, 2, \dots, v$ gilt. Dann gibt es bekanntlich im ganzen $\binom{v}{\lambda}$ verschiedene (κ, λ) -Kombinationen. Wir verstehen dann unter

$$\sum_{(\kappa, \lambda)} f_{u_1 \dots u_v}^{(v)}(h, k)$$

die Summe der für das feste κ und λ über sämtlichen (κ, λ) -Kombinationen u_1, u_2, \dots, u_v genommenen $f_{u_1 \dots u_v}^{(v)}(h, k)$. Speziell für $v = 0$ setzen wir

$$\sum_{(\kappa, \lambda)} f_{u_1 \dots u_v}^{(v)}(h, k) = f(h, k).$$

Wir führen die folgende, aus formalen Gründen hier von der üblichen Terminologie etwas abweichende Begriffsbildung für höhere totale Differentiale ein:

Zunächst sagen wir, $f(h, k)$ hat bei p das (erste) totale Differential

$$\varphi(h, k) = f(p) + f_h(p) \cdot h + f_k(p) \cdot k \quad ^{45},$$

wenn dieses Polynom die Bedingungen des ersten starken Schmiegpolyinoms von $f(h, k)$ bei p erfüllt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagen wir hierfür

⁴⁵ Wir bevorzugen die allgemeine Schreibweise $f(q)$ statt $f(h, k)$ mit $q = (h, k, 0)$, weil sie von unserer Koordinatentransformation $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ unabhängig ist. Das Differential von $f(q)$ und ähnlich die folgenden Begriffe sind durch unsere Definitionen selbstverständlich dann für jeden beliebigen Punkt p der x, y -Ebene eindeutig festgelegt.

auch, $f(h, k)$ ist bei p (total) differenzierbar. Wir sagen, $f(h, k)$ hat bei p das zweite totale Differential $f(p) + f'_h(p) \cdot h + f'_k(p) \cdot k + \frac{1}{2} \cdot (f''_{hh}(p) \cdot h^2 + (f''_{hk}(p) + f''_{kh}(p)) \cdot h \cdot k + f''_{kk}(p) \cdot k^2)$, wenn $f(h, k)$ an jeder Stelle von wenigstens einem (ganzen) $U^{II}(p)$ differenzierbar ist und jeder der beiden Koeffizienten $f'_h(h, k)$ und $f'_k(h, k)$ seiner ersten totalen Differentiale bei p differenzierbar ist. Erfüllt $f(h, k)$ diese Bedingungen, so sagen wir hierfür auch $f(h, k)$ ist bei p zweimal (total) differenzierbar.

Wir legen nun den Begriff des n -ten totalen Differentials rekursiv folgendermaßen fest: Es sei der Begriff der $(n-1)$ -maligen Differenzierbarkeit von $f(h, k)$ erklärt. Wir sagen dann, $f(h, k)$ hat bei p das n -te totale Differential

$$\sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} \left(\sum_{s=0}^v \left(\sum_{u_1, \dots, u_s} f_{u_1 \dots u_s}^{(v)}(p) \right) \cdot h^{v-s} \cdot k^s \right),$$

wenn es ein $U^{II}(p)$ gibt, so daß $f(h, k)$ an jeder Stelle in diesem $U^{II}(p)$ $(n-1)$ -mal differenzierbar ist und jede der 2^{n-1} partiellen $(n-1)$ -ten Ableitungen $f_{u_1, \dots, u_{n-1}}^{(n-1)}(h, k)$ von f bei p differenzierbar ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagen wir hierfür auch, $f(h, k)$ ist bei p n -mal (total) differenzierbar.

Dann folgt zunächst: Ist $f(h, k)$ bei p n -mal differenzierbar, so ist sein n -tes totales Differential bei p gleich dem n -ten TAYLORschen Polynom:

$$\sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} \sum_{\mu} \binom{v}{\mu} f_{h^v - \mu k^\mu}^{(v)}(p) \cdot h^{v-\mu} \cdot k^\mu. \quad (44)$$

In Analogie zum n -ten totalen Differential sagen wir, die (eindimensionale)

Funktion $g(x)$ hat bei x_0 das n -te Differential $\sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} \cdot g^{(v)}(x_0) \cdot h^v$ (mit $h = x - x_0$),

wenn die n -te Ableitung $g^{(n)}(x_0)$ existiert. Die Namen: n -tes Differential von $g(x)$ bei x_0 und n -tes TAYLORsches Polynom von $g(x)$ bei x_0 , sind also synonyme Bezeichnungen. Dagegen stecken hinter den Namen: n -tes totales Differential von $f(h, k)$ bei p und n -tes TAYLORsches Polynom von $f(h, k)$ bei p , zwei verschiedene Begriffe. Denn aus der Existenz sogar sämtlicher partieller Ableitungen von $f(h, k)$ bei p jeder endlichen Ordnung braucht doch selbst nicht einmal die Stetigkeit von $f(h, k)$ bei p zu folgen.

Schließlich gilt:

Ist $f(h, k)$ bei p n -mal differenzierbar und ist $\varphi(h, k)$ sein n -tes totales Differential bei p , so folgt für jede Richtung α in p , daß auch die Funktion $\psi(t) = f(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha)$ bei p (d. h. also bei $t=0$) ein n -tes Differential hat und zwar das n -te Differential $\psi(t) = \varphi(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha)$.

Denn zunächst ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von $h = t \cdot \cos \alpha$ und $k = t \cdot \sin \alpha$ in die Formel des n -ten totalen Differentials:

$$\psi(t) = \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} \left(\sum_{\mu} \binom{v}{\mu} f_{h^v - \mu k^\mu}^{(v)}(p) \cdot (\cos \alpha)^{v-\mu} \cdot (\sin \alpha)^\mu \right) \cdot t^v.$$

⁴⁶⁾ Denn dies folgt leicht mit Hilfe unserer rekursiven Definition des n -ten totalen Differentials aus den beiden folgenden bekannten Sätzen:

Existieren $f_h(h, k)$ und $f_k(h, k)$ in wenigstens einem (ganzen) $U^{II}(p)$ und hat jede dieser beiden Ableitungen bei p ein totales Differential, dann existiert und gilt $f''_{hk}(p) = f''_{kh}(p)$.

Existiert jede der 2^n partiellen n -ten Ableitungen von f, h, k in $U^{II}(p)$, und ist jede dieser Ableitungen darin stetig, so kann man für jedes $v = 2, 3, \dots, n$ in jeder Ableitung $f_{u_1, \dots, u_v}^{(v)}(h, k)$ die Indizes u_1, \dots, u_v beliebig permutieren, ohne daß diese Ableitung ihren Wert an irgendeiner Stelle von dem vorgegebenen $U^{II}(p)$ dabei jemals ändert.

Nun ist die eingeklammerte Summe gleich $g^{(\nu)}(0)$ ⁴⁷⁾. Also ist $\psi(t)$ in der Tat das n -te Differential von $g(t)$ bei $t=0$.

Dieses besagt in kurzen Worten, daß der Vertikalschnitt des n -ten totalen Differentials gleich dem n -ten Differential des Vertikalschnittes von $f(h, k)$ ist.

Aus unseren letzten Überlegungen zusammen mit dem letzten Satz des vorigen Paragraphen folgt jetzt ohne weiteres: Existiert das n -te totale Differential von $f(h, k)$ bei p , so existiert auch das schwache n -te Schmiegepolynom von dieser Funktion $f(h, k)$ bei p . Genauer folgt: Existiert das erstere (also dann beides), so ist das schwache n -te Schmiegepolynom gleich dem n -ten TAYLORSchen Polynom von $f(h, k)$ bei p .

Wir kommen nunmehr zum Ziele. Wir können nämlich unter der gleichen Voraussetzung des Satzes seine Behauptung sogar für das starke Schmiegepolynom beweisen. Es gilt:

Existiert das n -te totale Differential von $f(h, k)$ bei p , so existiert auch das starke n -te Schmiegepolynom dieser Funktion bei p .

Genauer gilt: *Existiert das erstere, so ist das starke n -te Schmiegepolynom gleich dem n -ten TAYLORSchen Polynom von $f(h, k)$ bei p .*

Beweis: Wir setzen:

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \cdot f_{h^{\nu-\mu} k^{\mu}}^{(\nu)}(p) \cdot h^{\nu-\mu} \cdot k^{\mu} = T(h, k)$$

und betrachten die Funktion: $F(h, k) = f(h, k) - T(h, k)$. Dann verschwindet das n -te TAYLORSche Polynom dieser Funktion natürlich identisch in h und k . Wir betrachten den Vertikalschnitt von $F(h, k)$ durch p in Richtung α :

$$g(t) = F(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha).$$

Dann folgt aus dem Hilfssatz von Fußnote ⁴⁷⁾:

$$g^{(n-1)}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} \cdot F_{h^{n-1-\mu} k^{\mu}}^{(n-1)}(q) \cdot (\cos \alpha)^{n-1-\mu} \cdot (\sin \alpha)^{\mu}$$

mit $q = (t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha, 0)$, und zwar für jeden Punkt q aus mindestens derjenigen Umgebung $U_1^{\text{II}}(p)$, in der $f(h, k)$ nach Definition (der n maligen Differenzierbarkeit bei p) $(n-1)$ -mal differenzierbar ist. Da nach Voraussetzung unseres Satzes jede Ableitung $F_{h^{n-1-\mu} k^{\mu}}^{(n-1)}(q)$ bei p differenzierbar ist und ferner in p verschwindet, so folgt offenbar:

$$F_{h^{n-1-\mu} k^{\mu}}^{(n-1)}(q) = r(q) \cdot \varepsilon_{\mu}(q)$$

mit $r(q) = |pq|$ (= Abstand von p, q) und mit $\lim_{q \rightarrow p} \varepsilon_{\mu}(q) = 0$ für $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. Setzt man dieses in die rechte Seite der Gleichung von $g^{(n-1)}(t)$ ein,

so folgt, daß es zu jedem $\eta > 0$ ein $U^{\text{II}}(p)$ gibt, so daß für jedes $q = (t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha, 0)$ aus diesem $U^{\text{II}}(p)$ gilt:

$$|g^{(n-1)}(t)| \leq \eta \cdot |t|.$$

⁴⁷⁾ Denn mittels Schluß von ν auf $\nu+1$ zeigt man leicht: Ist $f(h, k)$ bei p n -mal differenzierbar, dann ist für jedes α auch die Funktion $g(t) = f(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha)$ bei p (d. h. also bei $t=0$) n -mal differenzierbar und zwar folgt:

$$g^{(\nu)}(0) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} f_{h^{\nu-\mu} k^{\mu}}^{(\nu)}(p) \cdot (\cos \alpha)^{\nu-\mu} \cdot (\sin \alpha)^{\mu}$$

für $\nu = 0, 1, \dots, n$.

Es sei nunmehr eine Zahl $\eta > 0$ gegeben. Wir nehmen zunächst an, es existiere in irgend einem $U^\Pi(p) \subseteq U_1^\Pi(p)$ ein Punkt $q_1 \neq p$ mit $q_1 = (t_1 \cdot \cos \alpha, t_1 \cdot \sin \alpha, 0)$ und $t_1 > 0$, so daß mit diesem t_1 (und α)

$$g(t_1) > \eta \cdot t_1^n$$

gilt. Hieraus würde zunächst nach dem Zwischenwertsatz für eindimensionale stetige Funktionen für wenigstens ein \bar{t}_1 , $0 < \bar{t}_1 < t_1$ folgen

$$g(\bar{t}_1) = \eta \cdot \bar{t}_1^n.$$

Denn einerseits ist ja $g'(0) = g'(0) = 0$ und andererseits ist natürlich, da wir $n \geq 2$ annehmen können, die Funktion $g(t)$ in jedem t der aus $U_1^\Pi(p)$ stammenden $q = (t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha, 0)$ stetig. Da überdies $g'(t)$ wegen $n \geq 2$ für alle diese t existiert, gibt es eine weitere Zahl t_2 , $0 < t_2 < \bar{t}_1$, so daß

$$g'(t_2) \geq n \cdot \eta \cdot t_2^{n-1},$$

also

$$g'(t_2) > \eta \cdot t_2^{n-1}$$

gilt. Denn wäre über dem Intervall $(0, \bar{t}_1)$ der t -Achse dauernd $(g(t) - \eta \cdot t^n)' < 0$, so würde wegen $g(0) - \eta \cdot 0^n = 0$ folgen $g(\bar{t}_1) < \eta \cdot \bar{t}_1^n$ im Widerspruch zu $g(\bar{t}_1) = \eta \cdot \bar{t}_1^n$.

Es sei $n \geq 3$. Dann gibt es, wie man ähnlich wie vorher zeigen kann, eine weitere Zahl t_3 , $0 < t_3 < t_2$, so daß $g''(t_3) > \eta \cdot t_3^{n-2}$ gilt. Durch Iteration dieser Schlußweise ergibt sich schließlich ein t_n , $0 < t_n < t_{n-1}$, mit dem gilt $g^{(n-1)}(t_n) > \eta \cdot t_n$.

Hätten wir statt $g(t_1) > \eta \cdot t_1^n$ umgekehrt $g(t_1) < -\eta \cdot t_1^n$ ($t_1 > 0$) angenommen, so würde hieraus analog wie vorher die Existenz von n Zahlen $t_1 > t_2 > \dots > t_n > 0$ folgen und das Ergebnis

$$g^{(n-1)}(t_n) < -\eta \cdot t_n$$

Zusammengefaßt folgt also aus der Annahme $|g(t_1)| > \eta \cdot t_1^n$ ($t_1 > 0$) die Existenz eines t_n , $0 < t_n < t_1$, so daß $|g^{(n-1)}(t_n)| > \eta \cdot t_n$ gilt.

Ist nun $U_1^\Pi(p)$ entsprechend unserer ersten Überlegung dasjenige $U^\Pi(p)$, worüber für das vorgegebene η galt $|g^{(n-1)}(t)| \leq \eta \cdot |t|$, so folgt in der Tat $|F(q)| \leq \eta \cdot (r(q))^n$ für alle q in der nicht größeren der beiden Umgebungen $U_1^\Pi(p)$ und $U^\Pi(p)$.

Umgekehrt gibt es natürlich Funktionen, z. B. $f(h, k) = h^{n+1} \cdot \sin \frac{1}{h^n}$, $h \neq 0$; $f(0, k) = 0$, die ein starkes n -tes Schmiegepolynom bei $p = (0, 0, 0)$ besitzen, aber nicht n -mal differenzierbar bei p sind. Es gibt hierunter sogar solche Funktionen, die keine einzige n -te partielle Ableitung bei p besitzen; trotzdem kann also noch das starke n -te Schmiegepolynom bei p existieren.

§ 4.

Topologisches Approximierbarkeitskriterium.

Wir nennen ein topologisches Sektorsystem von p in \mathfrak{M} (bezüglich \mathfrak{A} und R) ein *spezielles topologisches Sektorsystem*, wenn es die Bedingungen (1)–(7) (vgl. § 1) und außerdem noch die folgende Bedingung erfüllt:

(8) Zu jedem Element τ von R und jedem von diesem τ verschiedenen Element τ' von R gibt es ein Element A von \mathfrak{A} , so daß τ im Innern von A liegt, aber das τ' kein Element von A ist.

Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, daß der topologische Raum R bezüglich \mathfrak{A} das FRÉCHETSche Trennungsaxiom erfüllt.

Man habe ein topologisches Sektorsystem \mathfrak{S} (bezüglich \mathfrak{A} und R). Es sei \mathfrak{S}' ein Teilsystem von \mathfrak{S} . Wir nennen \mathfrak{S}' *vollständig* (in bezug auf R), wenn es zu jedem Element τ von R ein $\sigma(A)$ von \mathfrak{S}' gibt, so daß τ im Innern von diesem A liegt⁴⁸⁾.

Dann gilt zunächst das folgende allgemeine

Kriterium: *Hat man eine Teilmenge M von \mathfrak{R} mit dem Häufungselement p und ein spezielles topologisches Sektorsystem \mathfrak{S} von p in \mathfrak{R} (bezüglich \mathfrak{A} und R), so besteht der Kern K von M bei p dann und nur dann aus einem einzigen Element (von R), wenn es in jedem vollständigen Teilsystem \mathfrak{S}' von \mathfrak{S} stets (wenigstens) ein $\sigma(A)$ von \mathfrak{S}' gibt, das M bei p umschließt.*

Denn zunächst setzen wir $K = \{\tau\}$ voraus. Es sei \mathfrak{S}' vollständig. Dann gibt es ein $\sigma(A)$ von \mathfrak{S}' um τ . Nach dem allgemeinen Hilfssatz (vgl. § 1) umschließt dieses $\sigma(A)$ die Menge M bei p . Nun setzen wir umgekehrt voraus, daß die Bedingung des Kriteriums erfüllt ist. Es sei τ ein Element von K . Es sei $\tau' \neq \tau$ ein festes Element von R . Dann gibt es zunächst nach (8) ein $\sigma(A_1)$ um τ , so daß τ' nicht in A_1 liegt. Weiter gibt es zu jedem $\tau'' \neq \tau$ von R ein $\sigma(A'')$ um τ'' , so daß τ nicht in diesem A'' liegt. Es sei \mathfrak{S}' das aus dem einen $\sigma(A_1)$ und sämtlichen $\sigma(A'')$ bestehende Teilsystem von \mathfrak{S} . Dann ist offenbar dieses \mathfrak{S}' vollständig. Folglich gibt es nach der erfüllten Bedingung des Kriteriums ein $\sigma(A)$ von \mathfrak{S}' , das M bei p umschließt. Dann folgt aus dem allgemeinen Hilfssatz (s. § 1) $K \subseteq A$ und nach Konstruktion von \mathfrak{S}' weiter $A = A_1$. Also ist das τ' kein Element von K . Also folgt $K = \{\tau\}$.

Es ist ohne weiteres klar, daß jedes geordnete Sektorsystem die Bedingung (8) erfüllt, und da es ein topologisches Sektorsystem ist, also auch speziell topologisch ist. Wir wenden zunächst unser Kriterium auf den folgenden Spezialfall an:

Wir denken uns hierzu zwei geordnete Mengen G_1 und G_2 gegeben. Es bezeichne x ein Element von G_1 und y ein Element von G_2 . Wir betrachten die Gesamtheit der Paare $(x; y)$. Wir sagen, $(x_1; y_1)$ ist gleich $(x_2; y_2)$, wenn simultan $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt. Es sei \mathfrak{R} die Menge sämtlicher Paare $(x; y)$. Ist $q = (x; y)$ gegeben, so nennen wir das x die Abszisse von q und das y die Ordinate von q . Man kann dann über jeder Teilmenge von G_1 (eindeutige) Funktionen mit Wertbereichen von G_2 betrachten und diesen Funktionen, völlig analog wie in der Euklidischen Ebene, eineindeutig „Kurven“ in \mathfrak{R} zuordnen. Man wähle als \mathfrak{S} die Horizontalstreifen von \mathfrak{R} und als Umgebungen von x_0 die Vertikalstreifen von \mathfrak{R} um x_0 . Dann folgt als Spezialfall unseres Kriteriums ein dem CAUCHYSchen Konvergenzkriterium für Funktionen entsprechender Satz. Nimmt man weiter noch speziell als \mathfrak{R} die Euklidische Ebene, so ist dieser (einfachste) Spezialfall unseres Kriteriums, bei Benutzung von Überdeckungen der Ebene mit Horizontalstreifen konstanter Breite $\eta > 0$ statt unserer \mathfrak{S}' , offenbar völlig äquivalent mit dem CAUCHYSchen Kriterium. Man kann aber auch die Ebene mit Sektorstreifen konstanter Radien $\eta > 0$ durch einen festen Träger p überdecken. Dann ergibt sich als Spezialfall unseres Kriteriums folgendes Differenzierbarkeitskriterium:

Es sei $f(x)$ eine (reelle) Funktion und x_0 ein Häufungspunkt ihres Definitionsbereiches. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent: $f(x)$ ist

⁴⁸⁾ Es gibt in jedem \mathfrak{S} vollständige Teilsysteme, z. B. \mathfrak{S} selbst oder auch das aus $\sigma(R)$ allein bestehende \mathfrak{S}' .

bei x_0 differenzierbar; zu jedem $\eta > 0$ gibt es stets (wenigstens) einen Sektorstreifen $S_{x_0}^{(1)}$ mit diesem Radius η und mit dem Mittelpunkt x_0 , so daß dieses $S_{x_0}^{(1)}$ die Kurve $f(x)$ bei x_0 umschließt.

Man kann aber noch allgemeinere „Horizontalstreifen“ betrachten. Hier zu sei X eine geordnete Menge; ferner habe man eine beliebige Menge Z und ein gewöhnliches Umgebungssystem von p in $Z^{(49)}$. Wir bezeichnen die Elemente von X mit x (oder ähnlich), diejenigen von Z mit z (oder ähnlich) und die Umgebungen des vorgegebenen Umgebungssystems in Z mit $U(p)$ (oder ähnlich). Ist x_0 ein festes Element von X , so nennen wir die Menge der Paare $(x_0; z)$ die Horizontale durch x_0 ; hat man dagegen ein festes Element z_0 von Z , so nennen wir die Menge der Paare $(x; z_0)$ die Vertikale durch z_0 . Ist allgemeiner A ein abgeschlossenes Intervall von X , so verstehen wir unter dem Horizontalstreifen $\sigma(A)$ die Vereinigungsmenge sämtlicher Horizontalen durch die Elemente von diesem A . Ähnlich verstehen wir unter dem durch $U(p)$ bestimmten Vertikalstreifen $V(p)$ die Vereinigungsmenge sämtlicher Vertikalen durch die Elemente von diesem $U(p)$. Ersetzt man die $U(p)$ in § 1 durch diese $V(p)$ und das \mathfrak{M} durch die Menge aller Paare $(x; z)$, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß die hier betrachteten $\sigma(A)$ alle Bedingungen (I)–(V) von § 1 erfüllen. Man habe dann einen bestimmten Begriff B und dazu eine mehrdeutige Abbildung μ von Z in \mathfrak{M} , so daß hierbei jedes z auf je genau eine bestimmte, nicht leere Teilmenge $\mu(z)$ von \mathfrak{M} auf der Vertikalen durch dieses z abgebildet ist. Es sei M die Vereinigungsmenge aller $\mu(z)$ (also für alle Elemente z von Z). Dann nennen wir die Unterapproximierende von M bei p (bezüglich des \mathfrak{M} und des X) das *untere Integral* von B (in bezug auf X , Z und μ). Entsprechend oberes Integral. Fällt die Unter- und Oberapproximierende von M in ein Element (von X) zusammen, so nennen wir dieses Element das *Integral* von B (in bezug auf X , Z und μ). Existiert dieses Integral, so nennen wir B (in bezug auf X , Z und μ) integrierbar. Approximierende von M und Integral von B sind als synonyme Bezeichnungen.

Z. B. sei B eine beschränkte Punktmenge in der x, y -Ebene. Es sei Z das System der Zerlegungen der x, y -Ebene in achsenparallele Rechtecke. Jedes z von Z samt allen seinen Unterteilungen nenne man eine Umgebung $U(p)^{(50)}$. Ferner sei X die (geordnete) Menge der reellen Zahlen und $\mu(z)$ die Inhaltsumme derjenigen Rechtecke von z , die mit der vorgegebenen Punktmenge B einen nicht leeren Durchschnitt haben. Dann ist B in bezug auf diese X, Z und μ (immer) integrierbar und sein Integral ist der äußere PEANO-JORDANSche Inhalt von B . In dem vorliegenden Falle war jedes z auf je einen Wert $\mu(z)$ abgebildet. Es kann aber auch sein, daß jedes z auf unendlich viele Werte abgebildet ist. Wir betrachten hierzu z. B. eine beschränkte (reelle) Funktion $f(q)$ über einem n -dimensionalen Intervall I des n -dimensionalen Euklidischen Raumes. Es sei Z das System der Zerlegungen von I in je endlich viele achsenparallele Teilintervalle von I . Wir bilden jedes z von Z je auf die Menge der zu diesem z gehörenden RIEMANNschen Zwischensummen von $f(q)$ ab. Wir nennen jedes z samt seinen sämtlichen Unterteilungen ein $U(p)$. Es sei X die Menge der reellen Zahlen. Dann deckt sich offenbar die Integrierbarkeit von $f(q)$ in bezug auf diese X, Z und μ vollständig mit dem RIEMANNschen Inte-

⁴⁹⁾ Das Element p hat hier für uns nur formale Bedeutung; es wird uns im folgenden nicht weiter interessieren.

⁵⁰⁾ Vgl. HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, S. 164 (1948).

grierbarkeitsbegriff und auch die Werte des unteren, oberen und des Integrals selbst sind gleich den entsprechenden RIEMANNSchen Integralen⁵¹⁾.

Aus unserem allgemeinen Approximierbarkeitskriterium folgt als Spezialfall unmittelbar das folgende Integrierbarkeitskriterium:

Hat man einen Begriff B und hierzu ein X, Z und μ , so ist B in bezug auf diese X, Z und μ dann und nur dann integrierbar, wenn es in jedem vollständigen Teilsystem \mathfrak{S}' der $\sigma(A)$ einen Horizontalstreifen $\sigma(A)$ von \mathfrak{S}' und ein $U(p)$ in Z gibt, so daß über jedem z aus diesem $U(p)$ je das $\mu(z)$ (ganz) in das $\sigma(A)$ hinein fällt.

Wir nennen speziell unser $\mu(z)$ *monoton* (im Sinne des Enthaltenseins), wenn es zu jedem festen Element z_0 von unserem Z eine Umgebung $U(p)$ in Z gibt, so daß über jedem z aus diesem $U(p)$ das $\mu(z)$ eine Teilmenge von $\mu(z_0)$ ist. Dann folgt speziell aus unserem Integrierbarkeitskriterium:

Hat man einen Begriff B und hierzu ein X, Z und monotonen μ , so ist B in bezug auf diese X, Z und μ dann und nur dann integrierbar, wenn es in jedem vollständigen Teilsystem \mathfrak{S}' unserer $\sigma(A)$ einen Horizontalstreifen $\sigma(A)$ gibt, so daß über wenigstens einem Element z_0 von Z das $\mu(z_0)$ (ganz) in dieses $\sigma(A)$ hinein fällt.

Denn wegen der Monotonie von $\mu(z)$ folgt aus der Aussage, $\mu(z)$ fällt über z_0 in $\sigma(A)$, die Aussage, $\mu(z)$ fällt über wenigstens einem (ganzen) $U(p)$ in das $\sigma(A)$.

Z, B ist das $\mu(z)$, welches wir mit Hilfe der RIEMANNSchen Zwischensummen definierten, monoton. Mit diesem $\mu(z)$ ergibt sich schließlich als Spezialfall des letzten Kriteriums unmittelbar das RIEMANNSche Integrierbarkeitskriterium.

§ 5.

Stetigkeit.

Man habe eine Menge \mathfrak{M} und zu jedem Element p von \mathfrak{M} je ein allgemeinstes⁵²⁾ System von Umgebungen $U(p)$ in \mathfrak{M} ⁵³⁾. Es sei M eine Teilmenge von \mathfrak{M} ; wir nennen dann ein Teilsystem \mathfrak{U} unserer U *vollständig* bezüglich M , wenn es zu jedem Element p von M eine Umgebung U aus dem Teilsystem \mathfrak{U} gibt, so daß dieses U eine Umgebung von p ist.

Wir sagen, die Umgebungen U_1, U_2, \dots, U_n bilden eine p, q verbindende Kette auf M , wenn das U_1 eine Umgebung des p , ferner U_n eine Umgebung von q und der Durchschnitt der drei Mengen M, U_v, U_{v+1} für jedes $v = 1, 2, \dots, n-1$ nicht leer ist⁵⁴⁾. Wir nennen M *zwischen p und q zusammenhängend*, wenn es in jedem bezüglich M vollständigen Teilsystem \mathfrak{U} unserer U eine p, q verbindende Kette U_v ($v = 1, 2, \dots, n$) auf M gibt, so daß jedes U_v dieser Kette eine Umgebung aus \mathfrak{U} ist.

Es sei \mathfrak{M} eindeutig auf eine geordnete Menge G abgebildet. Ist x ein Element von G , so bezeichnen wir mit $\sigma(x)$ die Menge derjenigen Elemente von \mathfrak{M} , die auf das betrachtete x abgebildet sind. Offenbar ist dann $\sigma(x_1)$ zu $\sigma(x_2)$ für je zwei verschiedene $x_1 \neq x_2$ aus G elementfremd und die Vereinigungs-

⁵¹⁾ Weitere bestehende Zusammenhänge mit den vielen anderen bekannten Integral- und Maßbegriffen sollen im folgenden nicht weiter erörtert werden.

⁵²⁾ D. h. wir setzen über die Umgebungen von jedem p tatsächlich nicht mehr voraus, als daß sie Teilmengen von \mathfrak{M} sind.

⁵³⁾ Haben wir eine Umgebung $U(p)$ von p , so bezeichnen wir diese oft auch mit U , falls uns nur die Menge $U(p)$ (also als Teilmenge von \mathfrak{M}), aber nicht das p interessiert.

⁵⁴⁾ Hierbei sind also p und q Elemente von \mathfrak{M} , aber nicht notwendig von M .

menge sämtlicher $\sigma(x)$ gleich \mathfrak{R} . Wir nennen im folgenden jedes $\sigma(x)$ eine Horizontale von \mathfrak{R} (mit der Höhe x). Ist A ein abgeschlossenes Intervall von G , so verstehen wir allgemeiner im folgenden unter $\sigma(A)$ die Vereinigungsmenge derjenigen Horizontalen von \mathfrak{R} , deren Höhe in A liegt. Wir nennen jedes $\sigma(A)$ auch einen *Horizontalstreifen* von \mathfrak{R} (mit dem Bezugsintervall A)⁵⁵.

Es liege p auf der Horizontalen $\sigma(x)$. Dann nennen wir dieses x die Höhe von p . Ferner nennen wir die Menge derjenigen Elemente von \mathfrak{R} , die nicht höher (bzw. nicht niedriger) als p sind, den Unterabschnitt (bzw. den Oberabschnitt) von x oder auch von p (in \mathfrak{R}).

Es sei M eine Teilmenge von \mathfrak{R} ; p sei ein Element von \mathfrak{R} ; ferner sei λ ein Element von G . Wir sagen dann, M ist bei p *gegenüber λ von unten (bzw. von oben) stetig*, wenn es eine Umgebung $U(p)$ gibt, so daß der Durchschnitt $M \cdot U(p)$ eine Teilmenge des Unter- (bzw. des Ober-)Abschnitts von λ ist. Wir sagen, M ist bei p *gegenüber λ stetig*, wenn M bei p gegenüber λ von unten oder von oben stetig ist.

Dann gilt zunächst:

Ist M zwischen p und q zusammenhängend und gibt es in jedem $U(p)$ (wenigstens) ein Element von M , das im Unterabschnitt von λ liegt, und in jedem $U(q)$ ein Element von M , das im Oberabschnitt von λ liegt (oder umgekehrt), und ist ferner M an jeder Stelle von M gegenüber λ stetig, dann gibt es in M (wenigstens) ein Element mit dieser Höhe λ .

Denn zunächst existiert wegen der dritten Voraussetzung zu jedem Element p von M ein $U(p)$, worin für unser M die Stetigkeitsbedingung gegenüber λ erfüllt ist. Das Teilsystem \mathfrak{U} dieser Umgebungen ist natürlich vollständig bezüglich M . Folglich gibt es wegen der ersten Voraussetzung in diesem \mathfrak{U} eine p, q verbindende Kette auf M . Hieraus folgt wegen der zweiten Voraussetzung mit Hilfe der Definition der Kette leicht die Behauptung.

Wir sagen, M *umstellt λ bei p* , entweder wenn die Höhe von p gleich λ ist oder wenn es in jedem $U(p)$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Elemente von M gibt, von denen das eine im Unterabschnitt und das andere im Oberabschnitt von λ liegt.

Dann folgt weiter:

Ist M zwischen p und q zusammenhängend und gibt es in jedem $U(p)$ (wenigstens) ein Element von M , das im Unterabschnitt von λ liegt, und in jedem $U(q)$ ein Element von M , das im Oberabschnitt von λ liegt (oder umgekehrt), dann umstellt M dieses λ bei wenigstens einem seiner Elemente⁵⁶.

Denn umstellt M an keiner einzigen Stelle von M das λ , so hat ja nach dem vorigen Satz wenigstens ein Element von M die Höhe λ .

Beispielsweise ergibt sich als Spezialfall des letzten Satzes: Hat man eine reelle Funktion f (mit beliebig endlich vielen Veränderlichen) über einem zwischen p und q zusammenhängenden Definitionsbereich D , so gibt es zu jedem Zwischenwert λ zwischen $f(p)$ und $f(q)$ wenigstens einen Punkt in D , so daß über jeder Umgebung dieses Punktes wenigstens ein Funktionswert von $f \leq \lambda$ und wenigstens einer $\geq \lambda$ ist.

⁵⁵ Man überzeugt sich leicht davon, daß die hier betrachteten Horizontalstreifen alle Bedingungen (I)–(V) (s. § 1) und (8) (s. § 4) erfüllen. Das Besondere ist aber, daß wir hier ein, für alle p von \mathfrak{R} auf einmal, gemeinsames Sektorsystem haben.

⁵⁶ Wählen wir als unsere $U(p)$ z. B. die Kreisscheiben einer Ebene mit dem Mittelpunkt p , so folgt, daß jede zwischen p' und q' zusammenhängende Punktmenge der Ebene mit jeder p', q' trennenden Geraden der Ebene stets mindestens einen Punkt gemeinsam hat.

Wir nennen M bei p stetig, wenn es zu jedem unserer Horizontalstreifen $\sigma(A)$ um p^{87} ein $U(p)$ gibt, so daß entweder der Durchschnitt $M \cdot U(p)$ leer oder eine Teilmenge des $\sigma(A)$ ist. Wir sagen, M ist stetig, wenn es an jeder Stelle von M stetig ist.

Dann folgt leicht:

Sind p und q zwei Elemente einer stetigen Menge M und ist M zwischen p und q zusammenhängend und gibt es ferner in jedem $U(p)$ (wenigstens) ein Element von M , das im Unterabschnitt von λ liegt, und in jedem $U(q)$ ein Element von M , das im Oberabschnitt von λ liegt (oder umgekehrt), dann gibt es wenigstens ein Element in M mit dieser Höhe λ^{88} .

Denn zunächst folgt aus dem letzten Satz, daß es ein p in M gibt, bei dem M das λ umstellt. Man sieht dann leicht, daß dieses p die gewünschte Höhe λ hat.

Wir sagen von zwei nicht leeren Teilmengen M_1 und M_2 von \mathfrak{M} , M_1 erreicht M_2 , wenn es zu jedem Element p von M_2 wenigstens ein Element von M_1 gibt, das im Oberabschnitt von p liegt. Ergänzend vereinbaren wir noch, daß jede Menge die leere Menge erreicht, aber umgekehrt die leere Menge keine einzige nicht leere Menge erreicht.

Wir sagen, M verhält sich bei p maximal, wenn für jede Umgebung $U(p)$ der Durchschnitt $M \cdot U(p)$ sein Komplement $M - M \cdot U(p)$ erreicht⁸⁹.

Dann gilt zunächst:

Ist M eine bikompakte⁹⁰ Teilmenge von \mathfrak{M} , so gibt es zu jeder nicht leeren Teilmenge M' von M mindestens ein Element von M , bei dem sich M' maximal verhält.

Denn wir nehmen zunächst an, daß sich M' an keiner Stelle von M maximal verhält. Dann gibt es zu jedem Element p von M eine Umgebung $U(p)$, so daß $M' \cdot U(p)$ nicht $M' - M' \cdot U(p)$ erreicht. Das System \mathfrak{U} dieser Umgebungen ist natürlich bezüglich M vollständig. Folglich gibt es (wegen der Bikompaktheit von M) ein endliches M überdeckendes Teilsystem U_1, U_2, \dots, U_n von \mathfrak{U} . Da kein $M' \cdot U_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) das $M' - M' \cdot U_v$ erreicht, ist entweder $M' \cdot U_v$ leer oder es gibt ein Element p'_v von $M' - M' \cdot U_v$, das (im strengen Sinne) höher als jedes Element von $M' \cdot U_v$ ist. Da mindestens ein $M' \cdot U_v$ nicht leer ist, gibt es tatsächlich Elemente p'_v und daher unter diesen (mindestens) ein höchstes p'_μ . Hieraus folgt, daß dieses p'_μ höher als jedes Element von M' ist, im Widerspruch dazu, daß natürlich p'_μ nicht höher als es selbst ist. Aus diesem Widerspruch folgt unsere Behauptung.

Wählen wir z. B. in der x, y -Ebene als Umgebungen von x_0 die Vertikalstreifen der x, y -Ebene um x_0 oder auch allgemeiner im $(n+1)$ -dimensionalen Euklidischen Raume als Umgebungen von p die $(n+1)$ -dimensionalen „Vertikalsäulen“ um p , so folgt speziell, daß es zu jeder reellen Funktion f über einem beschränkten Definitionsbereich D wenigstens einen Punkt von D oder einen Häufungspunkt von D gibt, bei dem sich f maximal verhält.

⁸⁷) D. h. natürlich, daß die Höhe von p im Innern des Intervalls A liegt.

⁸⁸) Offenbar enthält dieser Satz den bekannten Zwischenwertsatz für stetige Funktionen als Spezialfall.

⁸⁹) Völlig analog läßt sich die Aussage, M verhält sich bei p minimal, definieren. Und auch alles folgende über Maximalverhalten gilt entsprechend für Minimalverhalten.

⁹⁰) Wir nennen eine Teilmenge M von \mathfrak{M} bikompakt, wenn es zu jedem bezüglich M vollständigen Teilsystem \mathfrak{U} unserer U endlich viele Umgebungen in diesem Teilsystem \mathfrak{U} gibt, so daß die Vereinigungsmenge dieser endlich vielen Umgebungen eine Obermenge von M ist (also anschaulich gesprochen, M überdeckt).

Man sagt, M hat an der Stelle p ein Maximum (bzw. Minimum), wenn p ein Element von M ist und zugleich M im Unterabschnitt (bzw. Oberabschnitt) von p liegt.

Dann folgt:

Jede stetige und bikompakte Teilmenge M von \mathbb{R} hat (wenigstens) ein Maximum und ein Minimum.

Denn nach dem letzten Satz gibt es ein Element p von M , bei dem sich M maximal verhält. Dann folgt aus der Stetigkeit von M bei p leicht, daß dieses p die Bedingungen des Maximums für M erfüllt. Ähnlich folgt aus dem Minimalverhalten die Existenz eines Minimums von M .

Z. B. folgt speziell hieraus, daß jede stetige (reelle) Funktion mit beschränktem und abgeschlossenem Definitionsbereich an wenigstens einer Stelle ein Maximum hat.

Wir wollen zum Schluß zeigen, daß man selbst auch den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit auf die Teilmengen M von \mathbb{R} übertragen kann. Wir nennen eine Teilmenge M von \mathbb{R} *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem vollständiger Teilsystem H unserer Horizontalstreifen $\sigma(A)$ je ein endliches Überdeckungssystem U_1, U_2, \dots, U_n von M gibt⁶¹⁾, so daß für jedes $v = 1, 2, \dots, n$ der Durchschnitt $M \cdot U_v$ (ganz) in wenigstens einen Horizontalstreifen des Teilsystems H hineinfällt. Dann folgt:

Jede stetige und bikompakte Teilmenge M von \mathbb{R} ist gleichmäßig stetig.

Denn es sei H ein vollständiges Teilsystem unserer Horizontalstreifen. Dann gibt es zu jedem Element p von M ein $\sigma(A)$ aus H um dieses p und ferner wegen der Stetigkeit von M bei p eine Umgebung $U(p)$, so daß der Durchschnitt $M \cdot U(p)$ (ganz) in das $\sigma(A)$ hineinfällt. Da M bikompakt ist, gibt es ein aus endlich vielen dieser Umgebungen bestehendes Überdeckungssystem von M . Offenbar erfüllen diese Umgebungen für unser H die Bedingungen der gleichmäßigen Stetigkeit von M .

Z. B. sei $f(x)$ eine eindeutige Funktion über einem abgeschlossenen und lückenlosen Intervall I einer geordneten Menge X mit einem Wertbereich in einer geordneten Menge Y . Es sei f über I stetig. Dann folgt aus unserem Satz, daß es zu jedem vollständigen Teilsystem H unserer Horizontalstreifen eine Zerlegung von I in endliche viele Teilintervalle von I gibt, so daß über einem jeden dieser Teilintervalle $f(x)$ (ganz) in mindestens einen Horizontalstreifen von H hineinfällt. Ist hierbei speziell Y die Menge der reellen Zahlen, also $f(x)$ eine reelle Funktion über I , so ergibt sich mit Hilfe der Teilsysteme sämtlicher Horizontalstreifen mit jeweils fester konstanter Breite $\eta > 0$, daß sich jede in I stetige Funktion $f(x)$ für jedes $\eta > 0$ je mit einem, aus endlich vielen Rechtecken konstanter Höhe η zusammengesetzten Horizontalbereich, d. h. also, anschaulich gesprochen, mit einem zerschnittenen Horizontalstreifen konstanter Breite η überdecken läßt. Ist speziell auch noch X die Menge der reellen Zahlen, so folgt unmittelbar aus der vorigen Bemerkung, daß jede über einem abgeschlossenen Zahlenintervall I stetige Funktion auch darüber in dem üblichen Sinne gleichmäßig stetig ist.

⁶¹⁾ Das soll heißen, die Vereinigungsmenge dieser Umgebungen U_1, U_2, \dots, U_n ist eine Obermenge von M .

(Eingegangen am 9. April 1950.)

Geometrische Deutung konforminvarianter Eigenschaften des Riemannschen Raumes.

Von

KARL LUDWIG STELLMACHER in Göttingen.

1.

In einer RIEMANNschen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (V_n) mit dem metrischen Fundamentaltensor g_{ik} bezeichnet man nach WEYL die Abänderung der Metrik

$$(1.1) \quad g'_{ik} = \sigma g_{ik}$$

als konforme Transformation und untersucht Größen, die auch gegenüber (1.1) invariant bzw. relativ invariant sind. Ein charakteristisches Kennzeichen dieser konformen Geometrie ist ihre starke Abhängigkeit von der Dimensionszahl.

Es ist das Ziel vorliegender Note, diese Abhängigkeit verständlich zu machen durch geometrische Deutung einiger konforminvarianter Größen, wobei besonders Krümmungskomponenten isotroper Gebilde eine Rolle spielen.

Die Abhängigkeit von der Dimensionszahl in der konformen Geometrie zeigte sich besonders in den Arbeiten von T. Y. THOMAS (I)¹⁾, dem es gelang, ein vollständiges System von Konforminvarianten zu erhalten unter Verwendung eines $(n+2)$ -dimensionalen Kalküls.

Bei THOMAS ist eine getrennte Behandlung gerader und ungerader Dimensionszahlen erforderlich. Für eine gerade Anzahl von Veränderlichen treten gewisse typische Invarianten auf, deren jede nur für eine gewisse gerade Dimensionszahl existiert²⁾. Ganz entsprechendes Verhalten zeigt sich auch in den zwei Arbeiten von SCHOUTEN und HAANTJES (II).

Im folgenden soll auf den Gebrauch von konformen und projektiven Übertragungen, wie sie für die oben angeführten Arbeiten wesentlich sind, verzichtet werden.

In der konformen RIEMANNschen Geometrie steht die Frage an der Spitze, wann eine V_n konform-euklidisch ist, und schon die Beantwortung dieser Frage zeigt eigenartige Dimensionsabhängigkeit. Bekanntlich ist eine V_2 stets konform-euklidisch, eine V_3 dann und nur dann, wenn der nur für $n=3$ konforminvariante COTTONSche Tensor:

$$(1.2) \quad \nabla_{[i} L_{k]} = 0^3); \quad \left(L_{ik} = -R_{ik} + \frac{1}{2(n+1)} R g_{ik} \right)$$

¹⁾ In Klammern gesetzte römische Zahlen beziehen sich auf die Literaturangaben am Schluß der Note.

²⁾ An diesem Sachverhalt ändert sich nichts durch die Tatsache, daß es VANDERSLICE (Proc. Nat. Acad. Sci. Washington 13, 635 (1927) durch einen besonderen Kunstgriff gelang, die Dimensionszahl-Abhängigkeit im THOMASschen Kalkül formal zu überwinden.

³⁾ Die eckigen Klammern an den Indices bedeuten Alternation: $g_{[ik]} = \frac{1}{2}(g_{ik} - g_{ki})$; entsprechend runde Klammern Mischung $g_{(ik)} = \frac{1}{2}(g_{ik} + g_{ki})$. Vgl. SCHOUTEN (IV), S. 24.

verschwindet. Für $n \geq 4$ schließlich ist das Verschwinden des WEYLSchen Konformkrümmungstensors

$$(1.3) \quad C_{ikl}{}^s = R_{ikl}{}^s + g^{sm} \frac{1}{n-2} (L_{il} g_{km} - L_{kl} g_{im} + L_{km} g_{il} - L_{im} g_{kl})$$

notwendig und hinreichend. (Vgl. SCHOOUTEN (III) u. (IV), S. 169). Erwähnt sei noch bezüglich der für die einzelnen geraden Dimensionszahlen charakteristischen THOMASSchen Konforminvarianten, daß diesen in der konformen Geometrie der V_n Variations-Ableitungen von gewissen Integralinvarianten entsprechen. Für $n = 4$ hat man die von BACH (V) untersuchte Invariante

$$(1.4) \quad \int C_{ikl}{}^s C_{s\lambda\mu}{}^i g^{\lambda\mu} g^{kl} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

für $n = 6$ fand ich die Invariante

$$(1.5) \quad \int \left\{ \nabla_\alpha C_{iklm} \nabla^\alpha C^{iklm} - \left(\nabla^\epsilon \nabla_\epsilon + \frac{2}{5} R \right) C_{iklm} \cdot C^{iklm} - \right. \\ \left. - \frac{16}{9} \nabla_\alpha C_{ikl}{}^s \nabla_\beta C^{ikl\beta} \right\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^6.$$

Für höhere gerade Dimensionszahl bleibt die Existenz entsprechender konformer Integralinvarianten und die Verwandtschaft ihrer Variationsableitung mit den erwähnten THOMASSchen Tensoren eine Vermutung.

Die dazugehörigen konforminvarianten LAGRANGESchen Ableitungen spielen eine bedeutende Rolle in der mathematischen Theorie der Wellenausbreitung, d. h. in der Theorie der linearen hyperbolischen Differentialgleichungen. Auch deren bekanntes verschiedenartiges Verhalten bei gerader und ungerader Dimensionszahl hat seinen Grund in dem konforminvarianten Charakter dieser Differentialgleichungen. Davon soll in einer späteren Abhandlung in dieser Zeitschrift die Rede sein. Doch sei bemerkt, daß auch die vorliegende Untersuchung in dem Bestreben durchgeführt wurde, einen Einblick in die Ursachen für die erwähnte Abhängigkeit von der Dimensionszahl, wie sie etwa in der Theorie der linearen hyperbolischen Differentialgleichungen auftritt, zu gewinnen.

2.

Es ist zweckmäßig, den Begriff der Projektivinvarianz mit heranzuziehen. In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (A_n) mit allgemeiner symmetrischer Übertragung $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$ definiert man (wiederum mit WEYL) eine projektive Transformation der Übertragung durch die Forderung, daß bei der betreffenden Abänderung der Γ_{ik}^j die geodätischen Linien in sich übergehen. Das führt auf die projektiven Transformationen:

$$(2.1) \quad \Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j + p_i A_k^j + p_k A_i^j.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß die betreffende Übertragung projektiv-euklidisch ist (d. h. durch passende Wahl der p_i in (2.1) vollständig integabel gemacht werden kann), ist für $n > 2$ das Verschwinden des WEYLSchen Projektiv-Krümmungstensors

$$(2.2) \quad P_{ikl}{}^m = R_{ikl}{}^m - 2 P_{[ik} A_{l]}^m + 2 A_{[i}^m P_{k]l}$$

$$\text{mit} \quad P_{ik} = -\frac{1}{n^2 - 1} (n R_{ik} + R_{ki}); \quad R_{ki} = R_{ik}{}^i{}_i.$$

^{*)} Die Matrix (A_i^j) bezeichne die Einheitsmatrix, p_i ist ein willkürlicher kovarianter Vektor.

Im Falle $n = 2$ verschwindet P_{ikl}^m identisch, und man hat als notwendige und hinreichende Bedingung für projektiv-euklidisches Verhalten

$$(2.3) \quad \nabla_{[l} P_{ij]k} = 0$$

(nur für $n = 2$ projektivinvariant). Schließlich ist eine eindimensionale projektive Mannigfaltigkeit stets projektiv-euklidisch. (s. SCHOUTEN (IV), S. 131.) Auffällig ist die Analogie zwischen diesem Satze und dem entsprechenden der konformen Geometrie. Jedoch zeigt die projektive Geometrie diese starke Abhängigkeit von der Dimensionszahl nur für $n = 1, 2$ und 3 . Weiterhin tritt eine Abhängigkeit von der Dimensionszahl, wie im vorigen Abschnitt für die konforme Geometrie beschrieben, nicht auf.

Die Sonderstellung der Dimensionszahl 2 in der projektiven Geometrie linearer Übertragungen wird verständlich bei Vergleich mit der gewöhnlichen projektiven Geometrie. Auch dort ist in Sonderheit bei der axiomatischen Begründung der Fall $n = 2$ ausgezeichnet durch die Nichtanwendbarkeit des „Ebenen-Axioms“, daß jede ebene Mannigfaltigkeit die Eigenschaft besitzt, mit zwei Punkten einer geraden Linie auch alle übrigen Punkte derselben zu enthalten.

Es ist ein Ziel der folgenden Untersuchung, die konforme Geometrie derart mit der projektiven Geometrie zu verknüpfen, daß die Analogie des Verhaltens dieser beiden Geometrien bezüglich der niedersten Dimensionszahlen verständlich wird⁵⁾.

Die Erklärung, die hier gegeben werden soll, sei vorweggenommen: wir fassen die konforme Geometrie der V_n auf als Geometrie der geodätischen Null-Linien. Wir behandeln demgemäß die konforme Geometrie als eine projektive Geometrie auf dem $(n - 1)$ -dimensionalen Mantel desjenigen isotropen Konoides, das durch alle geodätischen Null-Linien gebildet wird, die von einem gegebenen festen Punkte auslaufen. Da sich diese projektive Geometrie in einer Mannigfaltigkeit X_{n-1} abspielt, die eine Dimension weniger besitzt als die V_n , so läßt sich damit die erwähnte Analogie aufklären. Daß dann zusätzlich in der konformen Geometrie noch beispielsweise der starke Unterschied zwischen gerader und ungerader Dimensionszahl vorhanden ist, erklärt sich dadurch, daß sich bei der konformen Geometrie jeweils alles innerhalb eines quadratischen Gebildes abspielt. Gerade die Geometrie auf quadratischen Mannigfaltigkeiten zeigt den typischen Unterschied zwischen gerader und ungerader Dimensionszahl.

3.

Eine der einfachsten projektivinvarianten Aussagen ist die folgende

$$(3.1) \quad a^i \nabla_i b^k = 0 \bmod (a^k, b^k).$$

Das bedeutet: es gibt zwei Skalare α und β derart, daß für die kovariante Differentiation des Vektors b^k in Richtung des Vektors a^k gilt

$$(3.1a) \quad a^i \nabla_i b^k = \alpha a^k + \beta b^k.$$

Die Projektivinvarianz von (3.1) folgt unmittelbar durch Ausführung der Transformation (2.1). Wenn man also in der projektiven Geometrie auch keinen Parallelismus von Vektoren kennt, so ist doch der Begriff der Parallel-

⁵⁾ Ich verdanke einer freundlichen mündlichen Mitteilung des Herrn K. O. FRIEDRICH diese Problemstellung.

verschiebung eines einfachen Bivektors $a^{[i} b^{k]} = \frac{1}{2} (a^i b^k - a^k b^i)$ in einer Richtung, die dem betreffenden Bivector angehört, projektivinvariant. Allgemein ist die Parallelverschiebung eines einfachen contravarianten p -Vektors in einer Richtung des p -Vektors projektivinvariant.

Die geodätische Mannigfaltigkeit G_p wird definiert durch die Menge aller aus einem vorgegebenen Hyperflächenelement im Punkt 0 auslaufenden geodätischen Linien. Das Hyperflächenelement wird definiert als eine p -dimensionale lineare Vektormannigfaltigkeit, die dem festen Punkte 0 zugeordnet ist. Man nennt nun (vgl. (VI), S. 131) die G_p eben, wenn sie eine der beiden folgenden Forderungen erfüllt, die untereinander äquivalent sind:

1. Die G_p enthält mit zwei Punkten einer geodätischen Linie deren sämtliche Punkte.

2. Jeder in der G_p liegende Vektor bleibt bei Parallelverschiebung längs eines Weges, der ganz in der G_p verläuft, in der G_p .

Daß aus 2. 1. folgt, ist selbstverständlich. Das Umgekehrte beweisen wir im Hinblick auf die spätere Anwendung folgendermaßen:

Wir denken in der G_p p linear unabhängige Vektorfelder $\overset{1}{a}^i, \overset{2}{a}^i, \dots, \overset{p}{a}^i$ derart, daß der p -Vektor $\overset{1}{a}^{[i} \overset{2}{a}^{j_2} \dots \overset{p}{a}^{j_p]}$ das Hyper-Flächenelement der ebenen G_p charakterisiert. Die $\overset{r}{a}^i$ müssen „ X_p -bildend“ sein, da sie alle in der G_p liegen, und daher die folgenden $\frac{1}{2} n \cdot (n-1)$ Integrabilitätsbedingungen erfüllen (vgl. etwa SCHOUTEN (IV), S. 106).

$$(3.2) \quad \overset{r}{a}^i \nabla_i \overset{s}{a}^k - \overset{s}{a}^i \nabla_i \overset{r}{a}^k = 0 \bmod (\overset{1}{a}^k, \dots, \overset{p}{a}^k).$$

Sei nun im Punkte Q der G_p der Vektor $A^k = \sum_{v=1}^p \alpha_v \overset{v}{a}^k$ (α_v beliebige Konstante) gegeben. Dann können Funktionen α_v der Koordinaten derart bestimmt werden, daß

$$(3.3) \quad A^k = \sum_{v=1}^p \alpha_v \overset{v}{a}^k$$

in Q gleich $\overset{0}{A}^k$ wird und daß A^k den Tangentenvektor einer geodätischen Linie bezeichnet, die gemäß Forderung 1. ganz in der G_p verläuft:

$$(3.4) \quad A^i \nabla_i A^k = \lambda A^k.$$

Setzt man hier (3.3) ein und berücksichtigt, daß im Punkt Q die $\overset{0}{\alpha}_v^k$ willkürlich sind, so folgt in Q

$$(3.5) \quad \overset{r}{a}^i \nabla_i \overset{s}{a}^k + \overset{s}{a}^i \nabla_i \overset{r}{a}^k = 0 \bmod (\overset{1}{a}^k, \overset{2}{a}^k, \dots, \overset{p}{a}^k)$$

und wegen (3.2) auch

$$(3.6) \quad \overset{r}{a}^i \nabla_i \overset{s}{a}^k = 0 \bmod (\overset{1}{a}^k, \dots, \overset{p}{a}^k),$$

d. h. die Forderung 2. wie zu beweisen war. Da nun 1. eine rein projektive Aussage enthält, gilt das gleiche auch für 2., womit eine Begründung für die Projektivinvarianz von (3.4) bzw. (3.6) gegeben ist.

Wir beweisen den

Satz 1: Sind alle G_n -en einer A_n (Mannigfaltigkeit mit symmetrischer Übertragung) eben, so ist die A_n projektiv-euklidisch⁶⁾ für $n > 2$.

Zunächst folgt aus der obigen Definition 2., wenn wir einen in der G_2 liegenden Vektor a^k längs eines ebenfalls in der G_2 liegenden infinitesimalen „Parallelogramm“ mit den Seiten a^i, b^k parallel verschoben:

$$(3.7) \quad a^i b^k R_{ikl}^m a^l = 0 \bmod (a^m, b^m).$$

Diese Aussage ist projektiv invariant und nach (2.2) äquivalent mit

$$(3.8) \quad a^i b^k P_{ikl}^m a^l = 0 \bmod (a^m, b^m).$$

Vom Tensor P_{ikl}^m benutzen wir noch seine Symmetrieeigenschaften

$$(3.9) \quad P_{ikl}^m + P_{kil}^m = 0; \quad P_{[ikl]}^m = 0,$$

ferner das Verschwinden der Faltungen

$$(3.10) \quad P_{ikl}^i = 0; \quad P_{i,k}^i = 0.$$

Setzt man dann

$$(3.11) \quad P_{ikl}^m a^k a^l = p_i^m,$$

so folgt

$$(3.11a) \quad p_i^m a^i = 0; \quad p_i^i = 0,$$

und (3.3) schreibt sich

$$(3.12) \quad p_i^m b^i = 0 \bmod (a^m, b^m).$$

Da dies für jeden Vektor b^i gelten soll, so folgt mit passend gewähltem u_i und v .

$$(3.13) \quad p_i^m = u_i a^m + A_i^m \cdot v$$

und aus (3.11a) nach Überschiebung von (3.13) mit a^i bzw. nach Faltung über i, m , da $n \neq 2$,

$$(3.14) \quad v = u_i a^i = 0.$$

Jetzt lautet (3.13)

$$(3.15) \quad P_{ikl}^m a^k a^l = p_i^m = u_i a^m.$$

Da diese Gleichung für jedes a^m und jeden Index $m = 1, 2, \dots, n$ gelten muß, folgt, daß u_i eine Linearform in den a^i ist, daher gilt nach (3.15)

$$(3.16) \quad P_{i(kl)}^m = u_{i(k} A_{l)}^m.$$

Verjüngt man noch die letzte Gleichung über m, l , so folgt nach (3.10) $u_{ik} = 0$. Daher auch $P_{i(kl)}^m = 0$.

Alterniert man diesen hinsichtlich des zweiten und dritten Index symmetrischen Tensor hinsichtlich der beiden ersten Indizes, so folgt unter Berücksichtigung von (3.9) in der Tat $P_{ikl}^m = 0$.

Allgemein kann man leicht notwendige und hinreichende Bedingungen angeben für den ebenen Charakter einer einzelnen festvorgegebenen G_p . Dazu denke man denjenigen einfachen p -Vektor im Ursprung 0 der G_p , von dem alle Erzeugenden auslaufen. Man verschiebe diesen p -Vektor parallel längs der Erzeugenden. So entsteht ein einfaches p -Vektorfeld, das längs der ganzen G_p

*) Ein ähnlicher Satz für eine G_{n-1} in A_n findet sich in VII Bd. 2, S. 180; der vorstehende Satz dürfte sich aus jenem gewinnen lassen auf Grund der Tatsache, daß jede Ebene G_2 auf unendlich viele Weise als Schnittmannigfaltigkeit von ebenen G_p mit $p > 2$ dargestellt werden kann. Umgekehrt folgt natürlich aus dem hier gegebenen Satz der STRUIKESCHE, vgl. CARTAN (VI), S. 131. Vgl. ferner WANG: Ann. of Math. 49, 731 (1949). Die hier vorliegende Art der Behandlung ist mit Rücksicht auf die Anwendung im Abschnitt 5 geboten.

definiert ist (im allgemeinen ist es nicht integrabel) und die Tangentenvektoren q^i der erzeugenden Geodätischen enthält. Wir denken dieses p -Vektorfeld gegeben in der Form $\overset{1}{a}^i \overset{2}{a}^k \dots \overset{p}{a}^l$. Es gibt dann auf G_p ($n-p$) linear unabhängige kovariante Vektoren b_k , die die $\overset{v}{a}^i$ enthalten:

$$(3.17) \quad \overset{\mu}{b}_i \overset{\nu}{a}^i = 0 \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \dots (n-p) \\ \nu = 1, 2 \dots p. \end{matrix}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für den ebenen Charakter der G_p ist dann

$$(3.18) \quad \overset{\nu}{a}^i \nabla_i \overset{\mu}{a}^k = 0 \bmod (\overset{1}{a}^k, \dots, \overset{p}{a}^k)$$

(Bedingungen, die natürlich entsprechend (3.2) die Integrabilität unseres p -Vektorfeldes zu einer X_p implizieren).

Die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen von (3.18) lauten entsprechend (3.8)

$$(3.19) \quad \overset{s}{a}^j \overset{r}{a}^i \overset{\mu}{a}^k P_{jik} = 0 \bmod (\overset{1}{a}^k, \dots, \overset{p}{a}^k)$$

oder nach Überschiebung mit den $(n-p)$ -Vektoren $\overset{\lambda}{b}_i$ der Gleichungen (3.17)

$$\overset{s}{a}^j \overset{r}{a}^i \overset{\mu}{a}^k P_{jik} \overset{\lambda}{b}_m = 0 \quad \begin{matrix} \varrho, \nu, \mu = 1, 2 \dots p \\ \lambda = 1, 2 \dots n-p. \end{matrix}$$

Es gilt also der

Satz 2: Notwendige und hinreichende Bedingung für den ebenen Charakter einer G_p ist, daß sämtliche (Projektiv)-Krümmungskomponenten verschwinden, die ganz innerhalb desjenigen p -Vektorfeldes liegen, das durch Parallelverschiebung des Ursprungs- p -Vektors längs der Erzeugenden der G_p entsteht.

Im Fall der G_2 für $n=3$ existieren z. B. zwei derartige Projektivkrümmungs-Größen, die natürlich nur bis auf einen skalaren nicht verschwindenden Faktor bestimmt sind.

4.

Um nun konforminvariante Aussagen zu gewinnen in Gestalt von projektiv-invarianten Aussagen über isotrope Mannigfaltigkeiten, stellen wir zunächst einige bekannte Eigenschaften der letzteren zusammen.

Isotrope Mannigfaltigkeiten sind definiert als Lösungen der konform-invarianten MONGESchen Gleichung:

$$(4.1) \quad g_{ik} dx^i dx^k = 0$$

und sind daher selbst konforminvariant. Besonderes Interesse verdienen die geodätischen Null-Linien, die bekanntlich konforminvariant sind, und die „geodätischen Null-Flächen“ bzw. -Hyperflächen, die von geodätischen Null-Linien erzeugt werden. Insbesondere wiederum diejenigen null-geodätischen Flächen, die durch Null-Linien erzeugt werden, die von einem festen Punkte und einem ebenen isotropen Flächenelement auslaufen. Dabei wird ein p -dimensionales isotropes Flächenelement definiert durch den „einfachen p -Vektor“ $\overset{1}{\Pi}^i \overset{2}{\Pi}^k \dots \overset{p}{\Pi}^l$, dessen einzelne p Vektoren den Bedingungs-gleichungen

$$(4.2) \quad \overset{\varrho}{\Pi}^i \overset{\nu}{\Pi}_i = 0 \quad (\varrho, \nu = 1, 2 \dots p)$$

genügen. Den Begriff des totalisotropen Elementes macht man sich zweckmäßig klar an Hand eines $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Hilfsraumes P_{n-1} , dessen Punkte den Richtungen eines festen Punktes 0 in V_n zugeordnet sind. Der MONGESche Kegel (2. 1) entspricht dann in P_{n-1} dem quadratischen Gebilde

$$(4.3) \quad g_{ik} \xi^i \xi^k = 0.$$

Die isotropen Flächenelemente der V_n in 0 sind dann in P_{n-1} ebene Punktmannigfaltigkeiten, die ganz in (4. 3) liegen, d. h. jeder Punkt dieser ebenen Mannigfaltigkeiten liegt auf (4. 3). Sind daher $\overset{1}{\Pi}^i, \overset{2}{\Pi}^i, \dots, \overset{p}{\Pi}^i$ linear unabhängige Punkte dieser Mannigfaltigkeit, so muß wegen ihres ebenen Charakters auch jede Linear-Kombination

$$\xi^r = \alpha \overset{1}{\Pi}^r + \beta \overset{2}{\Pi}^r + \dots + \gamma \overset{p}{\Pi}^r$$

identisch in $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ (4. 3) befriedigen, woraus (4. 2) folgt. Bekanntlich existieren solche ebenen „Erzeugenden“ nur für $n \geq 4$.

Da die isotropen Flächenelemente nicht reell zu sein brauchen, so lassen wir auch komplexe Veränderliche zu und sehen daher die g_{ik} als analytische Funktionen der Koordinaten an und lassen demgemäß auch nur analytische Koordinaten-Transformationen zu.

Die Abhängigkeit von der Dimensionszahl in der Struktur der Hyperfläche (2. 3) und ihrer Erzeugenden bzw. im Verhalten der isotropen Flächenelemente der V_n zeigt sich in den bekannten folgenden Sätzen:

Für $n = 2p$ gibt es durch jedes isotrope $(p-1)$ -dimensionale Flächenelement genau zwei p -dimensionale Flächenelemente, die das Vorgegebene ganz in sich enthalten. Isotrope Elemente höherer Dimensionszahl gibt es nicht.

Für $n = 2p+1$ gibt es ebenfalls höchstens p -dimensionale ebene isotrope Flächenelemente. Aber es gibt durch jedes $(p-1)$ -dimensionale Flächenelement eine einparametrische Schar von p -dimensionalen isotropen Flächenelementen⁷⁾.

Derart erscheint der MONGESche Kegel (2. 1) für gerade und ungerade Dimensionszahlen von sehr verschiedenartiger Struktur. Die Art der Abhängigkeit ist verständlicherweise die gleiche wie in der konformen Geometrie. Das Auftreten der isotropen ebenen Flächenelemente nur für $n \leq 4$ entspricht genau dem Auftreten des Konformkrümmungs-Tensors für die gleichen Dimensionszahlen. Demgemäß haben wir nun die Aufgabe zu lösen, eine natürliche Verbindung zwischen Konformkrümmung und totalisotropen Flächenelementen herzustellen⁸⁾.

Bei der konformen Transformation (1. 1) transformieren sich die Übertragungskomponenten

$$(4.4) \quad \overset{*}{\Gamma}_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l + \frac{1}{2} (A_k^l s_i + A_i^l s_k - g_{ik} s^l) \quad \text{mit} \quad s_i = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}.$$

⁷⁾ Damit hängt aufs engste zusammen die bekannte weiterhin wesentliche Tatsache, daß für gerade Gesamtdimensionszahl im euklidischen Raum (und daher auch im konformeuklidischen) diese totalisotropen $(p = \frac{n}{2})$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten eben sind. Für $n = 2p+1$ sind sie abwickelbar.

⁸⁾ Es wäre wünschenswert, auch geometrische Zusammenhänge zwischen dem BACHschen Tensor (EULERSche Ableitung von (1. 4) einerseits und isotropen Mannigfaltigkeiten andererseits zu konstruieren für $n = 4$ (und entsprechend für höhere gerade Dimensionszahlen).

Man erkennt, daß entsprechend (3. 1) und (4. 4) auch die Aussage

$$(4. 5) \quad \overset{v}{\Pi}^i \nabla_i \overset{\mu}{\Pi}^k = 0 \bmod \left(\overset{v}{\Pi}^k, \overset{\mu}{\Pi}^k \right)$$

für Vektoren aus einem totalisotropen Element konforminvariant ist, d. h. wofern (4. 2) erfüllt ist. In einer V_n ist also die Parallelverschiebung eines totalisotropen p -Vektors in einer seiner Richtungen konforminvariant. Entsprechend (3. 7) und (3. 8) ist wegen (4. 2) also auch die Aussage

$$\overset{v}{\Pi}^i \overset{\mu}{\Pi}^k \overset{e}{\Pi}^l R_{ikl}{}^m = 0 \bmod \left(\overset{v}{\Pi}^m, \overset{\mu}{\Pi}^m, \overset{e}{\Pi}^m \right)$$

konforminvariant und gemäß (1. 3) äquivalent mit

$$(4. 5a) \quad \overset{v}{\Pi}^i \overset{\mu}{\Pi}^k \overset{e}{\Pi}^l C_{ikl}{}^m = 0 \bmod \left(\overset{v}{\Pi}^m, \overset{\mu}{\Pi}^m, \overset{e}{\Pi}^m \right).$$

Ferner ist ebenfalls wegen (1. 3):

$$(4. 6) \quad \overset{v}{\Pi}^i \overset{\mu}{\Pi}^k \overset{e}{\Pi}^l \overset{\lambda}{\Pi}^m C_{iklm} = \overset{v}{\Pi}^i \overset{\mu}{\Pi}^k \overset{e}{\Pi}^l \overset{\lambda}{\Pi}^m R_{iklm}$$

eine relative Konforminvariante.

An dieser Stelle sei gleich angemerkt, daß auch für nichtisotrope Vektoren die Aussage

$$(4. 7) \quad a^i \nabla_i b^k = 0 \bmod (a^k, b^k); \quad a^k b_k = 0$$

konforminvariant ist und mit ihrer Hilfe entsprechend dem Vorangehenden auf die Konforminvarianz der Bestimmungszahlen

$$(4. 8) \quad R_{iklm} a^i b^k c^l d^m = C_{iklm} a^i b^k c^l d^m, \text{ falls } a^i c_i = a^i d_i = b^i c_i = b^i d_i = 0,$$

geschlossen werden kann. Läßt man nur Nullrichtungen, aber keine totalisotropen Elemente zu (wie es bei der Signatur der Metrik unserer Raum-Zeit-Welt angezeigt ist), so kommt man auf die konforminvarianten Krümmungskomponenten

$$(4. 9) \quad R_{iklm} a^i \tau^k \tau^l b^m = C_{iklm} a^i \tau^k \tau^l b^m \quad (\tau^i \tau_i = \tau^i a_i = \tau^i b_i = a^i b_i = 0).$$

Damit sind die Möglichkeiten für konforminvariante Bestimmungszahlen des Riemannschen Krümmungs-Tensors erschöpft.

Näheres über die relativen Invarianten (4. 9) und (4. 8), welch letztere bereits von SCHOUTEN (III) behandelt wurde, im 7. und 8. Abschnitt.

5.

Nunmehr können die Beziehungen und Ergebnisse des Abschnittes 3 auf totalisotrope G_p -en in V_n übertragen werden. Wir wollen eine G_p ursprungstotalisotrop nennen, wenn sie von lauter geodätischen Null-Linien erzeugt wird, die von einem totalisotropen Flächenelement im Ursprung 0 auslaufen. Eine ursprungstotalisotrope G_p hat also im allgemeinen nicht die Eigenschaft, daß jede in der G_p liegende Richtung isotrop ist; wohl aber ist das p -Vektorfeld, das wie in Abschnitt 3 durch Parallelverschiebung des erzeugenden (einfachen) p -Vektors längs der erzeugenden geodätischen Null-Linien in den Punkten der G_p konforminvariant definiert ist, totalisotrop.

Wenn dieses p -Vektorfeld in der G_p liegt, ist die G_p totalisotrop. Jede ebene ursprungstotalisotrope G_p ist auch totalisotrop im üblichen Sinne, weil Orthogonalität bei Parallelverschiebung erhalten bleibt.

Wir beweisen den

Satz 3: Sind in einer V_n mit $n \geq 4$ alle ursprungs-totalisotropen G_2 -en eben, so ist die V_n konform-euklidisch.

Wir denken in einer solchen ebenen totalisotropen G_2 zwei Vektorfelder ω^i, Π^i . Es gilt gemäß (4.2) und Forderung 2

$$(5.1) \quad \omega^i \omega_i = \omega^i \Pi_i = \Pi^i \Pi_i = 0; \quad \Pi^i \nabla_i \omega^k = 0 \bmod (\Pi^k, \omega^k); \\ \omega^i \nabla_i \omega^k = 0 \bmod (\Pi^k, \omega^k)$$

und nach (4.5) und (4.5a)

$$(5.2) \quad \Pi^i \omega^k \Pi^l C_{ikl}{}^m = 0 \bmod (\Pi^k, \omega^k).$$

Wir benötigen dann die folgenden bekannten Eigenschaften des Konformkrümmungs-Tensors, die unmittelbar aus seiner Definition (1.3) folgen:

$$(5.3) \quad C_{ikl}{}^i = 0; \quad C_{ikjl} = C_{jlik}; \quad C_{(ik)jl} = 0; \quad C_{(ik)jl} = 0.$$

Setzt man

$$(5.4) \quad C_{ikl}{}^m \Pi^k \Pi^l = k_i{}^m,$$

so folgt unter Benutzung von (5.3)

$$(5.5) \quad k_i{}^i = 0; \quad k_{im} = k_{mi}; \quad k_{im} \Pi^m = 0.$$

Ferner wegen (5.2) und (5.1)

$$(5.6) \quad k_{im} \omega^i \omega^m = 0.$$

Soll nun durch jeden durch O gehenden isotropen Bivektor eine Ebene G_2 sich legen lassen, so folgt, daß (5.6) gilt, für jedes ω^i , das (5.1) befriedigt. In unserem projektiven Hilfsraum P_{n-1} mit ω^i als laufenden Koordinaten geht also das quadratische Gebilde (5.6) durch die Schnittmannigfaltigkeit von $g_{ik} \omega^i \omega^k = 0$ und $\Pi_i \omega^k = 0$. Ist a_i eine weitere nicht weiter festgelegte Ebene in P_{n-1} , so liegt also (5.6) im Büschel $\mu g_{ik} \omega^i \omega^k + a_k \omega^k \cdot \Pi_i \omega^i$. Daher folgt

$$(5.7) \quad k_{im} = \mu g_{im} + a_{(i} \Pi_{m)}.$$

Durch Überschiebung mit g^{im} bzw. Π^m unter Beachtung von (5.5) erhält man

$$n \mu + a_i \Pi^i = \mu + \frac{1}{2} a_i \Pi^i = 0.$$

Daher gilt, da $n \neq 2$,

$$(5.8) \quad \mu = a_i \Pi^i = 0.$$

Wir haben also schließlich

$$(5.9) \quad k_{im} = C_{iklm} \Pi^k \Pi^l = a_{(i} \Pi_{m)}$$

gültig für jedes Π^i mit $g_{ik} \Pi^k \Pi^l = 0$.

Jede einzelne Komponente von (5.9) ist wiederum eine quadratische Form in Π^i , z. B.

$$k_{(1)(1)} = C_{(1)kl(1)} \Pi^k \Pi^l = a_{(1)} g_{(1)i} \Pi^i.$$

Das $k_{(1)(1)}$ in P_{n-1} entsprechende quadratische Gebilde geht also durch die Schnittmannigfaltigkeit von $g_{ik} \Pi^i \Pi^k = 0$ und $g_{(1)i} \Pi^i = 0$. Daher folgt

$$k_{(1)(1)} = \mu g_{kl} \Pi^k \Pi^l + \varrho \Pi_1,$$

wobei ϱ eine lineare Form in Π^k ist und μ unabhängig von Π^k . Da Ent-

sprechendes für alle n Diagonalglieder von k_{im} gilt, so folgt, daß die a_i in (5. 7) Linearformen der Π^k sind; und weiter entspricht (5. 9):

$$(5. 10) \quad k_{im} = \frac{1}{2} (a_{ik} \Pi^k \cdot g_{ml} \Pi^l + a_{mk} \Pi^k \cdot g_{il} \Pi^l) + \mu_{im} g_{kl} \Pi^k \Pi^l,$$

wobei nun die a_{ik} und μ_{im} unabhängig von Π^k sind. Da (5. 10) eine Identität darstellt, so folgt:

$$(5. 11) \quad 2 C_{i(kl)m} = a_{i(k} g_{l)m} + a_{m(k} g_{l)i} + 2 \mu_{im} \cdot g_{kl}.$$

Überschiebung mit g^{im} liefert wegen (5. 5):

$$0 = 2 a_{(kl)} + 2 \mu g_{kl},$$

dasselbe mit g^{kl} ergibt

$$a_{(im)} = -n \mu_{im} = -\mu \cdot g_{im}$$

und schließlich mit g^{im} führt auf $a_{[ik]} = 0$, und $\mu = 0$. Daher folgt $C_{i(kl)m} = 0$ und wegen (5. 5) auch $C_{iklm} = 0$.

6.

Die Gültigkeit des Satzes 2 vom Schluß des Abschnittes 3 für ursprungstotalisotrope G_p -en der V_n ist selbstverständlich:

Das totalisotrope Ursprungselement der G_p sei aufgespannt durch die p linear unabhängigen Vektoren $\overset{\circ}{\Pi}^i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), die (4. 2) befriedigen mögen; die $\overset{\circ}{\Pi}^i$ seien ferner durch Parallelverschiebung längs der Erzeugenden überall auf der G_p definiert. Dann ist notwendig und hinreichend für den ebenen Charakter der G_p wiederum

$$(6. 1) \quad \overset{\mu}{\Pi}^i \overset{\nu}{\Pi}^k \overset{\circ}{\Pi}^l C_{ikl}{}^m = 0 \bmod \left(\overset{1}{\Pi}^m, \dots, \overset{p}{\Pi}^m \right).$$

Besondere Beachtung verdient der Fall $p = n/2$ bei gerader Gesamtdimensionszahl n . In diesem Falle *) folgt nämlich lediglich aus dem Verschwinden aller in der G_p liegenden Krümmungskrümmungskomponenten von der Gestalt

$$(6. 2) \quad C_{ikl}{}^m \overset{1}{\Pi}^i \overset{2}{\Pi}^k \overset{\nu}{\Pi}^l \overset{\circ}{\Pi}^m = 0$$

wiederum (6. 1). Denn diese $n/2$ -dimensionalen isotropen Elemente haben die Eigenschaft, daß jeder Vektor a^i mit

$$(6. 3) \quad a^i \overset{\nu}{\Pi}_i = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, p) \text{ darstellbar ist als } a^i = \sum_{r=1}^p \alpha^r \overset{\nu}{\Pi}^i.$$

Besonders im Falle $n = 4$ genügt für den ebenen Charakter einer G_2 das Verschwinden der einzigen Krümmungskomponente

$$C_{iklm} \overset{1}{\Pi}^i \overset{2}{\Pi}^k \overset{1}{\Pi}^l \overset{2}{\Pi}^m = 0.$$

Somit kann die totalisotrope Krümmungskomponente einer solchen G_2 in V_4 als Kennzeichen für die Unebenheit dieser isotropen Mannigfaltigkeit angesehen werden. Bei höheren geraden Dimensionszahlen gilt Entsprechendes nur für die Gesamtheit aller vollständig isotropen Krümmungskomponenten.

In diesem Zusammenhang lassen sich sehr leicht die Integrabilitätsbedingungen für die Existenz vollständig isotroper Mannigfaltigkeiten J_p

*) Ist dagegen $2p < n$, so gibt es außer den $\overset{\nu}{\Pi}_i$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) noch $(n - 2p)$ -Vektoren $\overset{\nu}{b}_i$ mit $\overset{\nu}{b}_i \overset{\mu}{\Pi}^i = 0$. Außer (6. 2) müssen dann natürlich noch die Gl. $R_{iklm} \overset{\mu}{\Pi}^i \overset{\nu}{\Pi}^k \overset{\circ}{\Pi}^l \overset{\lambda}{\Pi}^m = 0$ erfüllt sein, um auf (6. 1) schließen zu dürfen.

aufstellen, d. h. von solchen Mannigfaltigkeiten, die nur isotrope Richtungen enthalten, für den Fall einer geraden Gesamtdimensionszahl und der Dimensionszahl $p = n/2$ für die totalisotrope Mannigfaltigkeit. Wir beweisen den

Satz 4: Eine p -dimensionale totalisotrope (holonome) Mannigfaltigkeit J_p in V_n mit $n = 2p$ ist notwendig eben.

Zum Beweis denken wir irgend p linear unabhängige Vektorfelder ($\overset{1}{H}^i, \dots, \overset{p}{H}^i$) in der J_p , die natürlich (4. 2) befriedigen müssen. Damit es nun wirklich eine J_p gibt, die sich durch die p Vektorfelder $\overset{v}{H}^i$ legen läßt, sind notwendig und hinreichend entsprechend (3. 2) die $\frac{1}{2} p \cdot (p - 1)$ Integrabilitätsbedingungen:

$$(6. 4) \quad \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k - \overset{\mu}{H}^i \nabla_i \overset{v}{H}^k = 0 \bmod \left(\overset{1}{H}^k, \dots, \overset{p}{H}^k \right).$$

Andererseits kann man die Relationen (4. 2) in jeder in der J_p liegenden Richtung differenzieren. Es folgt:

$$(6. 5) \quad \overset{\mu}{H}_k \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\rho}{H}^k + \overset{\rho}{H}_k \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k = 0 \quad (\mu, v, \rho = 1, 2 \dots p).$$

Ferner aus (6. 4) durch Überschiebung mit $\overset{\rho}{H}_k$

$$(6. 6) \quad \overset{\rho}{H}_k \overset{\mu}{H}^i \nabla_i \overset{v}{H}^k - \overset{\rho}{H}_k \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k = 0 \quad (\mu, v, \rho = 1, 2 \dots p).$$

Denkt man für den Augenblick die Indizes ρ, μ, v fest und voneinander verschieden gewählt, so folgen für diejenigen 6 Skalare, die in (6. 5) und (6. 6) durch Permutation von μ, v, ρ entstehen, 6 linear unabhängige Relationen, nämlich 3 vom Typ (6. 5) und 3 vom Typ (6. 6). Daher folgt das Verschwinden sämtlicher Skalare:

$$(6. 7) \quad \overset{\rho}{H}_k \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k = 0; \quad \rho \neq v \neq \mu.$$

Analog schließt man auf das Verschwinden der entsprechenden Skalare mit 2 gleichen Indizes: Bei festem ρ , und $v = \mu$ gibt es deren 3. Man hat 2 Relationen vom Typ (6. 5) und eine (6. 6) die wiederum von einander linear unabhängig sind, so daß (6. 7) in der Tat auch für 2 gleiche und schließlich gemäß (6. 5) auch für 3 gleiche Indizes ρ, v, μ gilt. — Alle Vektoren der Gestalt $\overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k$ haben also die Eigenschaft, daß ihr inneres Produkt mit jedem der isotropen Vektoren $\overset{\rho}{H}^i$ verschwindet. Daher folgt nach (6. 3)

$$(6. 7) \quad \overset{v}{H}^i \nabla_i \overset{\mu}{H}^k = 0 \bmod \left(\overset{1}{H}^k, \dots, \overset{p}{H}^k \right).$$

Das heißt: Gemäß 2. ist die J_p eben.

Soll sich nun durch jeden Punkt der V_n in jeder totalisotropen p -dimensionalen Hyper-Flächenrichtung eine J_p legen lassen, so folgt, daß jede G_p , die von einem totalisotropen p -dimensionalen Hyperflächenelement ausläuft, eben ist. Da nun jede in 0 ursprungs-totalisotrope G_4 im Falle $n = 6$ als Schnittmannigfaltigkeit von 2, im Falle von $n > 6$ als Schnittmannigfaltigkeit von unendlich vielen ebenen totalisotropen G_p -en, die durch 0 gehen, erhalten werden kann, so folgt nach einer einfachen CARTANSchen Schlußweise (VI), S. 131, daß auch alle totalisotropen G_2 -en eben sind¹⁰⁾. Daher gilt nach dem im vorigen Abschnitt bewiesenen Satz 3 der

¹⁰⁾ Vgl. Fußnote *) auf Seite 38.

Satz 5: Kann man in einer V_n (mit $n = 2p$) durch jeden Punkt in jeder totalisotropen p -Richtung eine totalisotrope p -dimensionale Hyperfläche J_p legen, so ist die V_n konform-euklidisch¹¹⁾.

7.

Wir greifen noch einmal auf die konforminvarianten Bildungen (4. 7) und (4. 8) zurück, um auch dafür eine geometrische Deutung zu geben (oder wenigstens für ihr Verschwinden).

Denkt man eine Kurve gegeben mit dem Tangentenvektor $a^i = \frac{dx^i}{ds}$ und in einem Punkt der gegebenen Kurve normal zur Tangente einen Vektor b^i , so kann man b^i längs der Kurve in konforminvarianter Weise verschieben, indem man fordert, daß b^i im gewöhnlichen Sinne Riemannscher Übertragung längs a^i infinitesimal parallel-verschoben wird, aber nach jedem Schritt infinitesimaler Verschiebung aus der Vektormannigfaltigkeit $\alpha a^i + \beta b^i$ der zu a^i normale ausgesucht wird. Dieser Prozeß ist konforminvariant. Analytisch folgt er im einzelnen aus (4. 7), d. h.

$$(7. 1) \quad a^i \nabla_i b^k = \alpha a^k + \beta b^k, \quad a^i a_i = 1$$

folgendermaßen: durch Überschiebung mit a^k bzw. b^k erhält man aus der Forderung $a^i b_i = 0$:

$$(7. 2) \quad \alpha = -b_k (a^i \nabla_i a^k) \text{ und } \beta = \frac{1}{(b^r b_r)^{\frac{1}{2}}} a^i \nabla_i (b^r b_r)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man für den längennormierten zu verschiebenden Vektor:

$$(7. 3) \quad \frac{b^i}{(b^r b_r)^{\frac{1}{2}}} = B^i$$

und für den Krümmungsvektor der gegebenen Kurve

$$(7. 4) \quad a^i \nabla_i a^k = u^k,$$

so folgt

$$(7. 5) \quad a^i \nabla_i B^k = B_j u^j \cdot a^k$$

(natürlich konforminvariant). Transformiert man mit Hilfe von (1. 1) die a^i -Kurve in eine Geodätische, was mit passend gewähltem σ immer möglich ist, so geht bei dieser speziellen konformen Normierung der Prozeß (7. 2) bzw. (7. 5) in die gewöhnliche Parallelverschiebung über.

Wir definieren also durch (7. 2) oder (7. 5) den Begriff der *konformen Verschiebung* längs einer vorgegebenen Kurve.

Besonders naheliegend ist es, die Konform-Verschiebung eines Vektors längs einer geodätischen Null-Linie zu untersuchen. Sei eine Kongruenz von geodätischen Null-Linien mit der Tangente τ^i als Gradientenfeld gegeben:

$$(7. 6) \quad \tau^r \nabla_r \tau^k = 0; \quad \tau^i \tau_i = 0; \quad \tau_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tau,$$

¹¹⁾ Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu einem Ergebnis der Arbeit von LENSE: Über ametrische Mannigfaltigkeiten, Jber. dtsch. math. Ver. 35, 286 (1926). — Dort liegt jedoch ein Versehen vor, das darauf beruht, daß (auf S. 287) nach Auswahl der sechs Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \chi_1$ die übrigen zehn Funktionen $\varphi_\alpha, \psi_\alpha, \chi_\alpha$ als (irrationale) Funktionen der ersten sechs angesehen werden müssen. Daher ist insbesondere die Schlußweise nicht erlaubt, daß die beiden letzten Gleichungen der Seite 287 nach

$\frac{\partial \chi}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial x_1}$ aufgelöst werden können.

so muß zunächst der zu verschiebende Vektor b^i in der Tangentialebene an die betreffende Nullfläche $\tau = \text{const}$ liegen, damit der Prozeß

$$(7.7) \quad \tau^\nu \nabla_\nu b^i = 0 \bmod (\tau^i, b^i); \quad b^i \tau_i = 0$$

konforminvariant sei. Nach Einführung von $B^i = \frac{b^i}{\sqrt{b^\nu b_\nu}}$ entsprechend (7.3)

bleibt

$$(7.8) \quad \tau^\nu \nabla_\nu B^i = \alpha \tau^i$$

mit willkürlichem α , weil die Bedingung $b^i \tau_i = 0$ in diesem Falle automatisch erhalten bleibt. Daher spricht man hier zweckmäßig von der konformen Parallelverschiebung des Bivektors $b^{(i} \tau^{k)}$ längs einer geodätischen Null-Linie. Dadurch ist ein *konform-geodätischer Flächenstreifen* definiert. Dieser Begriff ist sinnvoll erst für $n \geq 4$, da für $n = 3$ trivialerweise nur der Flächenstreifen der Nullfläche $\tau = \text{const}$ herauskommt.

Wesentlich ist, daß bei diesem Prozeß, wenn er simultan an zwei zueinander (und zu τ^i) orthogonalen Vektoren b^i und c^i ausgeführt wird, deren Orthogonalität erhalten bleibt, obwohl b^i und c^i nur modulo τ^i festgelegt sind.

Wir fragen, wann die in einer Fläche $\tau = \text{const}$ liegenden Bivektoren, die durch Parallelverschiebung längs der Null-Linien in sich übergehen, X_2 -bildend sind, wann also innerhalb der „Wellenfläche“ $\tau = \text{const}$, zweidimensionale Flächen existieren, die aus konform-ebenen Streifen zusammengesetzt sind. In Analogie zu (3.2) ist dafür notwendig und hinreichend

$$(7.9) \quad \tau^i \nabla_i b^k - b^i \nabla_i \tau^k = 0 \bmod (b^k \tau^k).$$

Unter Berücksichtigung von (7.7) folgt daher

$$(7.10) \quad b^i \nabla_i \tau^k = 0 \bmod (b^k, \tau^k).$$

Als Integrabilitätsbedingungen erhält man aus (7.10) und (7.6) unter Berücksichtigung von (7.7):

$$(7.11) \quad 2 \tau^i b^k \nabla_{[i} \nabla_{k]} \tau^l = R_{ik\alpha}{}^l \tau^i b^k \tau^\alpha = 0 \bmod (\tau^l, b^l),$$

und das ist äquivalent mit

$$(7.12) \quad C_{ikl}{}^m b^i \tau^k \tau^l = 0 \bmod (\tau^m, b^m).$$

In Analogie zu (5.4) setze ich $k_{im} = C_{ikl}{}^m \tau^l$ und

$$k_{im} b^i = 0 \bmod (\tau^m, b^m).$$

Soll dies für alle Vektoren b^i gelten mit $b^i \tau_i = 0$, so folgt, daß es einen Skalar μ und einen Vektor q_i geben muß, so daß gilt:

$$k_{ik} = \tau_{(i} q_{k)} + \mu g_{ik}$$

in völliger Analogie zu (3.20). Wie im Abschnitt 3 folgt wegen des Verschwindens von k_i^i und $k_{im} \tau^m \mu = \tau^i q_i = 0$ und daher

$$(7.13) \quad k_{ik} = \tau_{(i} q_{k)}; \quad \tau^i q_i = 0.$$

Das ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sämtliche konform-geodätischen Flächenstreifen, die innerhalb einer Nullfläche $\tau = \text{const}$ liegen, dort X_2 -bildend sind.

Soll das nun für Nullflächen in jeder Nullrichtung gelten, so folgt genau wie im Abschnitt 3 das Verschwinden des Konformkrümmungs-Tensors.

Damit haben wir den Satz 6, der wiederum aufs Beste die Sonderstellung der Dimensionszahlen 3 und 4 beleuchtet:

Satz 6: In einer V_n mit $n \geq 4$ sind alle konformgeodätischen Flächenstreifen dann und nur dann X_2 -bildend, wenn die V_n konform-euklidisch ist. (Für $n = 3$ sind diese Flächenstreifen trivialerweise stets X_2 -bildend.)

Um noch die gewünschte Deutung von (4. 9) zu geben, genügt die Bemerkung, daß im vorstehenden statt (7. 12), gültig für jedes b^i mit $b^i \tau_i = 0$, auch die Forderung des Verschwindens von (4. 9) (a^i und b^i beliebig, aber zueinander orthogonal und in der Tangentialebene τ_i liegend) gewählt werden kann.

8.

Wir nennen eine V_q in V_n konform-eben, wenn sie eine der drei folgenden Eigenschaften besitzt, die einander äquivalent sind:

1. Jeder in der V_q liegende Vektor, der längs eines beliebigen Weges in der V_q konform verschoben wird, bleibt in der V_q .

2. Jede geodätische Null-Linie, die ein Linienelement, d. h. 2 infinit. benachbarte Punkte mit der V_q gemein hat, liegt ganz in der V_q .

3. Die V_q besteht nur aus Nabelpunkten¹²⁾.

Zur analytischen Formulierung von 2. und 3. lehnen wir uns der Einfachheit halber an SCROUTENS Standardwerk (IV), S. 179/180, und beweisen die Äquivalenz nur für $q = n - 1$. Die Erweiterung auf allgemeineres q macht keinerlei Schwierigkeiten.

Sei j^* der Normalenvektor der vorgelegten Fläche (bzw. Hyperfläche), der längs der Fläche und außerhalb als Gradient und von der Länge 1 vorausgesetzt wird, sei ferner $h_{\mu\nu}$ der zweite Fundamentaltensor. Die erzwungene Krümmung (Normalenkrümmung) einer in der V_{n-1} verlaufenden Kurve mit der Tangente i^* ist definiert als

$$(8. 1) \quad u^* = -j^* (h_{\alpha\beta} i^\alpha i^\beta) \quad \text{mit} \quad i^* i_* = 1.$$

Für einen Nabelpunkt ist diese Krümmungskomponente unabhängig von der Richtung der Flächenkurve, also

$$(8. 2) \quad h_{\mu\nu} = \mu' g_{\mu\nu}; \quad \mu = \frac{1}{n-1} h; \quad h = h_{\mu\nu} g^{\mu\nu},$$

wobei $'g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - j_\mu j_\nu$, die in die V_{n-1} -fallende Komponente von $g_{\mu\nu}$ ist.

Soll ferner die Forderung 2. erfüllt sein, so folgt, daß für eine geodätische Null-Linie mit der Tangente τ^* die Bedingung des in der V_{n-1} -Liegens, $\tau_* j^* = 0$, längs der geodätischen Nulllinie erhalten bleiben soll:

$$\tau^k \nabla_k (\tau^* j_*) = j_* \tau^k \nabla_k \tau^* + \tau^k \tau^* \nabla_k j_* = 0.$$

Daher folgt wegen $\tau^k \nabla_k \tau^* = \lambda \tau^*$ und $\tau^k j_k = 0$:

$$\tau^* \tau^\beta \nabla_\alpha j_\beta = \tau^* \tau^\beta h_{\alpha\beta} = 0$$

für jedes τ^* , das $\tau^i j_i = 0$ und $\tau^\alpha \tau^\beta g_{\alpha\beta} = 0$ erfüllt. Daher folgt wiederum (8. 2). Umgekehrt folgt aus $\tau^* \tau^\beta h_{\alpha\beta} = 0$, daß die Bedingung $\tau^i j_i = 0$ längs der Geodätischen erhalten bleibt. — Die Äquivalenz von 2. und 3. ist also erwiesen, gleichzeitig auch die (bekannte) Tatsache, daß der Begriff des Nabelpunktes konforminvariant ist.

¹²⁾ Die Analogie zur CARTANSchen Charakterisierung ebener Mannigfaltigkeiten (in (VI), Chap. V) scheint mir bemerkenswert.

Soll schließlich 1. erfüllt sein, so folgt aus (7. 2), wenn a^r und b^r normal zueinander und zur Flächennormale j^r sind:

$$(8. 3) \quad j_r a^r \nabla_\mu b^r = 0.$$

Daraus folgt wegen der erwähnten Orthogonalitäten

$$(8. 4) \quad b^r a^r \nabla_\mu j_r = 0.$$

Da nun, wenn wir das Normalenfeld außerhalb der V_{n-1} als auto-parallel fortgesetzt denken, definitionsgemäß gilt

$$(8. 5) \quad h_{\mu r} = \nabla_\mu j_r,$$

so folgt aus (8. 4), daß alle orthogonalen Bestimmungszahlen von $h_{\mu r}$ mit zwei ungleichen Indizes verschwinden. Daher folgt wieder (8. 2), das wir zweckmäßig in der Form schreiben

$$(8. 6) \quad \nabla_\mu j_r = \frac{h}{n-1} (g_{\mu r} - j_\mu j_r).$$

Damit ist die Äquivalenz von 1., 2. und 3. gezeigt. SCHOUTEN schreibt die Integrabilitätsbedingungen für die nur auf der V_{n-1} gültige Gl. (8. 6) in der Form:

$$(8. 7) \quad B_{\alpha\beta\gamma}^{ikl} (R_{ikl}{}^\alpha j_\alpha - g_{l[k} h_{i]} \cdot \frac{1}{n-1}) = 0;$$

wobei der davorstehende Koeffizient $B_{\alpha\beta\gamma}^{ikl}$ andeuten soll, daß nur alle in der V_{n-1} liegenden Komponenten von (8. 7) zugelassen sind. Soll es nun zu jeder Normalenrichtung durch einen fest vorgegebenen Punkt mindestens eine Nabelfläche geben, so folgt, daß sämtliche orthogonalen Bestimmungszahlen des Riemannschen Tensors, bezogen auf ein beliebiges orthogonales n -Bein, verschwinden müssen, woraus nach einem SCHOUTENSchen Satze (III, S. 84) das Verschwinden des Konformkrümmungs-Tensors für $n \geq 4$ folgt. Damit ist auch eine Deutung von (4. 8) gegeben.

Es ist bisher nicht bemerkt worden, daß auch im Falle $n = 3$ ein entsprechendes Ergebnis¹³⁾ zu erhalten ist. — Durch Überschiebung von (8. 7) mit $g^{\gamma\beta} = g^{\gamma\beta} - j^\gamma j^\beta$ folgt nämlich

$$(8. 8) \quad B_\alpha^i \left(R_{i\gamma} j^\gamma - \frac{n-2}{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} h \right) = 0; \quad \alpha = 1, 2.$$

weiter, durch Rotationsbildung:

$$B_{[\beta}^k \nabla_{|k|} \left(B_{\alpha]}^i R_{i\gamma} j^\gamma - \frac{n-2}{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} h \right) = 0.$$

Daraus folgt wegen des Gradientencharakters von j_r unter Benutzung von (8. 6)

$$j^r B_\alpha^r B_\beta^i \nabla_{[k} R_{i]\gamma} = 0.$$

Mithin das Verschwinden der orthogonalen Bestimmungszahl des COTTONschen Tensors (1. 2):

$$j^r a^k b^i \nabla_{[k} L_{i]\gamma} = 0; \quad a^i b_i = a^i j_i = b^i j_i = 0.$$

¹³⁾ Das hierzu im Widerspruch stehende Ergebnis für $n = 3$ in SCHOUTEN (III) und (IV), S. 180 beruht auf einem Versehen. Eine Vereinfachung des vorliegenden Beweises für $n = 2, 3$ verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn SCHOUTEN.

Soll sich nun wiederum durch jede Flächenrichtung eine Nabelpunkt-Fläche legen lassen, so folgt wiederum das Verschwinden *aller* orthogonalen Bestimmungszahlen des COTTONSchen Tensors mit drei verschiedenen Indizes. Daraus schließt man dann durch Ausführung passender Drehungen des orthogonalen 3-Beines (ähnlich wie bei SCHOTTEN (III), S. 84) auf das Verschwinden des Tensors $\nabla_{[k} L_{l]r}$.

9.

Die konforminvarianten Aussagen der letzten Abschnitte (4 bis 8) haben die Eigenschaft, darüber hinaus noch invariant zu sein gegenüber „erweitert konformen Transformationen“:

$$(9.1) \quad \Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i + (A_k^i p_l + A_l^i p_k + g_{lk} g^{ia} q_a),$$

wobei p_i und q_i beliebige Vektoren sein dürfen (deren Komponenten analytische Funktionen der Koordinaten sind). Die erwähnten Aussagen sind nämlich sowohl projektivinvariant als auch konforminvariant, ohne daß jemals von der Gradienteneigenschaft von s_i (4. 4) Gebrauch gemacht worden wäre.

Es liegt dann nahe, anstatt der Sätze 3, 4, 5 und 6 verallgemeinert konforminvariante Aussagen zu suchen über eine A_n (allgemeine symmetrische Übertragung¹⁴⁾) mit zusätzlich bis auf einen skalaren Faktor vorgegebenem Fundamentaltensor σg_{ik} . Wählt man einen, g_{ik} , davon aus, so setze man mit SCHOUTEN (IV), S. 128 unter Abspaltung der zu g_{ik} gehörenden CHRISTOFFEL-Symbole $\{^i_{kl}\}$:

$$(9.2) \quad \Gamma_{kl}^i = \{^i_{kl}\} + T_{kl}^i.$$

Ferner

$$(9.3) \quad \nabla_\nu g^{\lambda\mu} = Q_\nu{}^{\lambda\mu}; \quad \nabla_\nu g_{\lambda\mu} = -Q_\nu{}^{\lambda\mu}.$$

$$(9.4) \text{ Daher: } Q_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu}{}^\nu + T_{\lambda\nu}{}^\mu.$$

Bei (9. 1) hat man

$${}'\!T_{\lambda\mu}{}^\nu = T_{\lambda\mu}{}^\nu + (A_\lambda^\nu p_\mu + A_\mu^\nu p_\lambda + g_{\mu\lambda} g^{\nu\alpha} q_\alpha)$$

und

$$(9.5) \quad {}'\!Q_{\lambda\nu\mu} = Q_{\lambda\nu\mu} + (g_{\mu\lambda} (p_\nu + q_\nu) + g_{\nu\lambda} (p_\mu + q_\mu) + g_{\nu\mu} \cdot 2 p_\lambda),$$

durch Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$ bzw. $g^{\nu\mu}$ erhält man nach leichter Rechnung für die Vektoren

$$(9.6) \quad U_\nu = \frac{1}{2(n-1)(n+2)} (n Q_{\alpha}{}^\alpha{}_\nu - Q_\nu{}^\alpha{}_\alpha)$$

und

$$(9.7) \quad V_\nu = \frac{1}{2(n-1)(n+2)} ((n+1) Q_{\alpha}{}^\alpha{}_\nu - 2 Q_\nu{}^\alpha{}_\alpha)$$

die Transformationsgesetze gegenüber (9. 1) in der Form:

$${}'\!U_\nu = U_\nu + (p_\nu + q_\nu)$$

$${}'\!V_\nu = V_\nu + 2 p_\nu.$$

Daher ist

$$(9.8) \quad C_{\lambda\nu\mu}^{\lambda} = Q_{\lambda\nu\mu}^{\lambda} - (A_\nu^\lambda U_\mu + A_\mu^\lambda U_\nu + g_{\mu\nu} g^{\lambda\alpha} V_\alpha)$$

¹⁴⁾ Asymmetrie der Übertragung wäre hier nicht sachgemäß, da ein schiefesymmetrischer Anteil $\Gamma_{[kl]}^i$ der Übertragung durch (9. 1) nicht beeinflußt wird.

verallgemeinert konforminvariant. Es gilt

$$(9.9) \quad C^{\alpha}_{\alpha\mu} = C_{\mu\alpha}^{\alpha} = 0.$$

Das Verschwinden von (9.8) ist offenbar notwendig und hinreichend dafür, daß die A_n durch (9.1) in eine V_n mit vorgegebenem g_{ik} transformiert werden kann.

Ferner sind invariant gegenüber (9.1) die geodätischen Nulllinien, falls sie existieren.

Dafür, daß es geodätische Nulllinien in jeder Nullrichtung gibt, ist notwendig und hinreichend, daß die Eigenschaft eines Vektors a^i , Nullvektor zu sein, bei autoparalleler Verschiebung erhalten bleibe. Aus

$$a^i a^k g_{ik} = 0 \text{ und } a^l \nabla_l (a^i a^k g_{ik}) = 0, \text{ sowie} \\ a^l \nabla_l a^i = \lambda a^i$$

folgt aber

$$a^i a^k a^l \nabla_l g_{ik} = 0$$

für jedes a^i mit $g_{ik} a^i a^k = 0$. Daher hat man nach (9.3) als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz geodätischer Nulllinien in jeder Nullrichtung

$$(9.10) \quad Q_{(i \cdot k l)} = r_{(i} g_{k l)}.$$

Der Vektor r_i transformiert sich bei (9.1)

$${}'r_i = r_i + 2 p_i + q_i.$$

Aus (9.10) folgt:

$$C_{(i \cdot k l)} = 0^*).$$

Außer durch (9.10) ist $Q_{i \cdot k l}$ bestimmt durch einen Tensor

$$H_{ikl} = Q_{[i \cdot k] l},$$

der die Relation

$$H_{[i k l]} = 0$$

erfüllen muß. Es gilt dann

$$Q_{i \cdot k l} = Q_{(i \cdot k l)} + \frac{4}{3} H_{i(k l)}$$

(Entsprechend für den Tensor (9.8)).

Wir definieren ferner eine „pseudo-WEYLSche Übertragung“ durch:

$$(9.10) \quad \bar{I}_{kl}^i = \{^i_{kl}\} + \frac{1}{2} (A_k^i P_l + A_l^i P_k + g_{kl} g^{is} \cdot Q_s).$$

Wir stellen die Frage, wann diese Übertragung durch eine Transformation (9.1) euklidisch gemacht werden kann.

Wir bemerken, daß sich (9.10) auffassen läßt als durch projektive Transformation (2.1) mit $2 p_i = P_i - Q_i$ aus einer WEYLSchen Übertragung

$$(9.11) \quad \bar{F}_{kl}^i = \{^i_{kl}\} + \frac{1}{2} (A_k^i Q_l + A_l^i Q_k + g_{kl} Q^i)$$

hervorgegangen. Danach bilde man aus dem zu (9.10) gehörigen RIEMANNschen Tensor $R_{\omega\mu\nu\lambda} = R_{\omega\mu\nu}{}^{\alpha} g_{\alpha\lambda}$ und alterniere diesen Tensor in den beiden hinteren Indizes. Schreibt man jetzt für den RIEMANNschen Tensor der zu g_{ik} gehörigen RIEMANNschen Übertragung $K_{\omega\mu\nu}{}^{\alpha}$, so erhält man unter

^{*}) Das ist die notwendige und hinreichende Bedingung für Existenz geodätischer Nulllinien!

Benutzung der bei SCHOUTEN (IV) auf Seite 129 und 217 angegebenen Formeln:

$$R_{\omega\mu[\lambda\nu]} = K_{\omega\mu\lambda\nu} - \frac{1}{4} (\varrho_{\omega\lambda} g_{\mu\nu} - \varrho_{\mu\lambda} g_{\omega\nu} + \varrho_{\mu\nu} g_{\omega\lambda} - \varrho_{\omega\nu} g_{\mu\lambda}),$$

wobei

$$\varrho_{\omega\lambda} = 2 \bar{\nabla}_{\omega} Q_{\lambda} + Q_{\omega} Q_{\lambda} - \frac{1}{2} g_{\omega\lambda} Q_{\alpha} Q^{\alpha} + 2 \bar{\nabla}_{\omega} p_{\lambda} - 2 p_{\omega} p_{\lambda}^{15}).$$

Setzt man daher

$$\hat{R}_{\mu\lambda} = R_{\omega\mu[\lambda\nu]} g^{\omega\nu} \text{ und } \hat{L}_{\mu\lambda} = -\hat{R}_{\mu\lambda} + \frac{1}{2(n+1)} \hat{R} g_{\mu\lambda},$$

so ist in Analogie zu (1.3) der Konformkrümmungstensor

$$(9.12) \quad g^{\alpha\beta} C_{\omega\mu\lambda\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\omega\mu[\lambda\nu]} + \frac{1}{n-2} (\hat{L}_{\omega\lambda} g_{\mu\nu} - \hat{L}_{\mu\lambda} g_{\omega\nu} + \hat{L}_{\mu\nu} g_{\omega\lambda} - \hat{L}_{\omega\nu} g_{\mu\lambda})$$

völlig unabhängig von p_i und Q_i und überdies identisch mit dem zur V_n von g_{ik} gehörigen Konformkrümmungstensor (1.3).

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den

Satz 3a: *Läßt sich in einer A_n mit vorgegebenem g_{ik} durch jeden Punkt eine 2-dimensionale totalisotrope ebene Fläche (J_2) legen, so ist die A_n erweitert-konformeuklidisch¹⁶).*

Beweis: Wir gehen wie beim Beweis von Satz 3 aus von dem totalisotropen nicht verschwindenden Bivektorfeld $\omega^{(i} \Pi^{k)}$, das überall die Tangentialebene der J_2 definieren möge und natürlich (4.2) erfüllen soll. Bei Parallelverschiebung bleibt der Bivektor in der J_2 . Ferner bleibt bei Parallelverschiebung innerhalb der J_2 „Orthogonalität bezüglich g_{ik} “ wegen (4.2) erhalten. Daher folgt aus

$$0 = \Pi^i \nabla_i (\omega^k \omega^j g_{ik}) = 2 \omega^i \Pi^l \nabla_l \omega^k + \omega^i \omega^k \Pi^l \nabla_l g_{ik} \text{ wegen (4.3) und (9.3)}$$

$$(9.13) \quad Q_{i \cdot ik} \Pi^i \omega^k = 0.$$

Soll dies für jeden totalisotropen Bivektor gelten, so schließt man analog (5.7) unter Benutzung von (9.9) auf das Verschwinden von (9.8). Daher brauchen wir jetzt nur noch pseudo-WEYLSche Übertragungen (9.10) zuzulassen.

Da nun entsprechend (5.2) sowohl das Verschwinden von

$$\omega^i \Pi^k R_{iklm} \omega^l \Pi^m = 0,$$

als auch

$$\omega^i \Pi^k R_{iklm} \Pi^l \omega^m = 0$$

folgt, so gilt, wenn man die beiden letzten Gleichungen voneinander abzieht, gemäß (9.12) und (5.1) auch

$$\omega^i \Pi^k R_{ik[lm]} \omega^l \Pi^m = \omega^i \Pi^k C_{iklm} \omega^l \Pi^m = 0.$$

Danach sind alle Schlüsse des Abschnitts 5 von Gl. (5.6) an gültig, und der Satz 3a ist bewiesen. Ähnlich kann man auch die übrigen konforminvarianten Sätze der letzten Abschnitte verallgemeinern.

Aus Gleichung (9.12) und deren Ableitung folgt übrigens der Satz: Wenn eine V_n durch erweiterte konforme Transformation (9.1) euklidisch gemacht werden kann, so ist sie konform-euklidisch im gewöhnlichen Sinne

¹⁵) $\bar{\nabla}_i$ ist die kovariante Ableitung unter Benutzung der Übertragung (9.11a).

¹⁶) Der Satz ist auch noch richtig für ursprungtotalisotrope ebene \bar{G}_2 -en, wie ohne Beweis mitgeteilt sei.

Literatur.

I. THOMAS, T. Y.: Conformal Tensors. Proc. of the Nat. Acad. of Sci. Washington, 12, 152 (1926); 18, 103 (1932); 18, 189 (1932).

II. SCHOUTEN u. HAANTJES: Zur konformen Differentialgeometrie I u. II. Math. Ann. 112, 594 (1935); 113, 568 (1936).

III. SCHOUTEN: Über die konforme Abbildung n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung. Math. Z. 11, 58 (1921).

IV. SCHOUTEN: Der „Ricci-Kalkül“. Berlin 1923.

V. BACH, R.: Zur WEYLSchen Relativitätstheorie und zur WEYLSchen Erweiterung des Krümmungsbegriffs. Math. Z. 9, 110 (1921).

VI. CARTAN, ELIE: Leçons sur les espaces de Riemann. Paris 1929, Chap. VI.

VII. SCHOUTEN u. STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. I, Groningen 1935; Bd. II, 1938.

(Eingegangen am 7. Februar 1950.)

Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I.

Von

HELMUT RÖHRL in Würzburg.

Den vermutlich ersten Schritt zu einer übergeordneten Theorie für verschiedene spezielle Funktionen bedeuten die Arbeiten von R. KÖNIG [2] und R. KÖNIG—H. SCHMIDT [7]. Sie umfassen u. a. die TSCHEBYSCHEFFSchen Polynome, die LEGENDESchen und GEGENBAUER -NIELSENSchen Funktionen und gewisse von PINCHERLE angegebene Polynome. Etwas früher bereits wurde von R. KÖNIG [3]—[5] in seiner Klassentheorie das geeignete Hilfsmittel zur Untersuchung von Differentialsystemen geschaffen. Mit ihr baut H. SCHMIDT [9], der kurz vorher die komplementäre Klasse zum ersten Male für ein nicht-hypergeometrisches Differentialsystem studiert hatte [8], seine Arbeit auf, die zu weitreichenden Resultaten hinsichtlich der Art eines Differentialsystems und der Art des zu ihm adjungierten Systems führt. Diese Arbeit faßt die Theorie der meisten speziellen Funktionen, die einem Differentialsystem vom FUCHSSchen Typ genügen, zu einem einheitlichen Ganzen zusammen.

Die hier angestellten Überlegungen führen über H. SCHMIDT hinaus und liefern eine Anzahl von Funktionssystemen als Spezialfälle. Vor allem umfassen sie auch Differentialsysteme mit Stellen der Unbestimmtheit. Dadurch gelingt es für die meisten der gebräuchlichen speziellen Funktionen, falls sie durch ein (lineares) Differentialsystem definiert sind, eine übergeordnete Theorie abzuleiten. Das wesentliche Hilfsmittel ist wie bei H. SCHMIDT die R. KÖNIGSche Klassentheorie.

Während H. SCHMIDT ausgeht von der durch $\prod_{v=0}^n (z - a_v)^{r_v}$ erzeugten Klasse, bildet hier $\prod_{v=0}^n (z - a_v)^{q_v} e^{r(z)}$, $r(z)$ rational in z , den Ausgangspunkt.

In ihrem äußeren Aufbau schließt sich die Arbeit an die H. SCHMIDTSche Theorie an, soweit sie nicht andere, eigene Methoden verwendet, die H. SCHMIDT in seinem Spezialfall nicht benötigt. Die arithmetische Grundlage geht in ihren Gedanken zurück auf die R. KÖNIGSche Theorie für den einfachsten Fall $n = 1$ der relativ zur schlichten Ebene multiplikativen Funktionen [3] bis [5]. Über R. KÖNIG hinausgehend sind in unserem Fall die Klassenfunktionen mit Stellen der Unbestimmtheit in Form von exponentiellen Singularitäten behaftet. Die arithmetische Theorie läuft in der vorliegenden Arbeit vollkommen parallel zu der von H. SCHMIDT a. a. O. verwendeten Spezialisierung der R. KÖNIGSchen Gedankengänge. Weil es sich jedoch hier um allgemeinere Klassen handelt, konnte nicht unmittelbar auf die Arbeiten von R. KÖNIG bzw. H. SCHMIDT verwiesen werden, falls für die arithmetischen Grundlagen nicht größere Vorarbeiten beim Lesen der Arbeit erforderlich sein sollten.

Im ersten Teil der Arbeit werden die arithmetischen Eigenschaften der Klasse entwickelt. Dabei zeigen sich immer wieder deutlich Parallelen zur Theorie der Algebraischen Funktionen. Die Definition des Multiplums erfolgt in der gewohnten Weise. Dabei gelangt man sehr schnell zum RIEMANN-ROCHSchen Anzahltheorem, das hier in zwei Sätze zerfällt (Satz 2, Satz 2'). Entsprechend der Dualität Funktion — Differential werden die Elementarfunktionen und die Elementardifferentiale vollkommen gleichberechtigt definiert. Es ergibt sich eine „Partialbruchzerlegung“, die ganz analog läuft wie die aus der Theorie der Algebraischen Funktionen bekannte. Als Nächstes treten die Elementarfunktionen und -differentiale zweier Variablen auf. Auch die zugehörigen Ableitungssätze haben ihr geläufiges Analogon, das allerdings oft in Nichtbeachtung der erwähnten Dualität nur für die Differentiale angegeben wird. In den folgenden Vertauschungstheoremen tritt diese Dualität zwischen Klasse und komplementärer Klasse einerseits und Funktionen und Differentialen andererseits sehr klar hervor. Aus diesen drei Theoremen folgen die Reduktionssätze, welche — analog den Algebraischen Funktionen — gestatten, für die Klasse eine endliche Basis aufzustellen, falls man zwei Funktionen, die sich nur durch eine Ableitung unterscheiden, identifiziert. Anschließend an die Reduktionssätze folgen Aussagen über die Reduktionskoeffizienten, die in einem gewissen Körper enthalten sind.

Der zweite Teil bringt dann die Untersuchung der Integrale über Klassenfunktionen. Im dritten Teil hängen die bis dahin festen Singularitäten von einem Parameter ab, was zur Aufstellung und Diskussion der Differentialsysteme führt.

§ 1. Definition der Klasse.

Seien in der schlichten Ebene $n + 1$ im Endlichen gelegene Punkte a_0, \dots, a_n gegeben. Jedem dieser Punkte ordnen wir eine „Charakterisierungsfunktion“ $f_v(z)$ zu:

$$(1) \quad f_v(z) = (z - a_v)^{c_{v_v-1,v}} \exp \left\{ - \frac{c_{v_v-2,v}}{z - a_v} - \dots - \frac{c_{0v}}{(v_v - 1)(z - a_v)^{v_v-1}} \right\}$$

mit $c_{0v} \neq 0$; ferner soll für $c_{v_v-1,v} = \alpha_v$ gelten:

$$(1a) \quad 0 \leq \Re(\alpha_v) < 1.$$

Weiter ordnen wir dem Punkt $z = \infty$ die Charakterisierungsfunktion $f_\infty(z)$ zu:

$$(1_\infty) \quad f_\infty(z) = z^{-c_{\gamma_\infty+1,\infty}} \exp \left\{ - c_{\gamma_\infty,\infty} z - \dots - \frac{c_{0\infty}}{\gamma_\infty + 1} z^{\gamma_\infty+1} \right\}$$

mit $c_{0\infty} \neq 0$ für $\gamma_\infty \geq 0$ bzw.

$$f_\infty(z) = z^{-c_{0\infty}}$$

für $\gamma_\infty = -1$. In beiden Fällen verlangen wir für $c_{\gamma_\infty+1,\infty} = \alpha_\infty$:

$$(1_\infty a) \quad \alpha_\infty = - \sum_{v=0}^n \alpha_v \pmod{1}; \quad 0 \leq \Re(\alpha_\infty) < 1.$$

α_v heißt der zu $a_v(\infty)$ gehörige reduzierte Exponent, $A_v = e^{2\pi i \alpha_v}$ der zugehörige Multiplikator. Es ist also $A_v \neq 0$.

Definition 1: Unter der multiplikativen Klasse k verstehen wir die Gesamtheit der Funktionen $y = f(z)$, welche den Bedingungen genügen:

1. Bedeutet $\bar{\mathbb{C}}$ die von den a , nach ∞ durch einander nicht überkreuzende Schnitte aufgeschlitzte Ebene, so ist $f(z)$ in $\bar{\mathbb{C}}$, abgesehen von den Punkten a , und gegebenenfalls ∞ , meromorphen Verhaltens.

2. Ist \mathfrak{L} , der von a , nach ∞ verlaufende Schnitt und bezeichnen wir mit z^+ die bei Durchlaufung von \mathfrak{L} , in Richtung aus a , nach ∞ auf dem rechten Ufer, mit z^- die auf dem linken Ufer von \mathfrak{L} , gelegenen Punkte, so ist

$$f(z^+) = A_v f(z^-).$$

3. In $a_v (\infty)$ ist der Quotient $f(z):f_v(z)$ ($f(z):f_\infty(z)$) rationalen Verhaltens. Offensichtlich ist

$$(2) \quad W(z) = \prod_{v=0}^n f_v(z) \cdot \frac{f_\infty(z)}{z^{-a_\infty}} = z^{a_\infty} \prod_{v=0}^n f_v(z)$$

eine Klassenfunktion. Aus Def. 1 folgt fast unmittelbar, daß k identisch ist mit der Gesamtheit der Funktionen $R(z) W(z)$, wenn $R(z)$ die Menge der in z rationalen Funktionen durchläuft. Da

$$(1b) \quad f'_v(z) = f_v(z) \sum_{\lambda=0}^{\gamma_v-1} \frac{c_{\lambda v}}{(z-a_v)^{\gamma_v-\lambda}}$$

$$(1_{\infty}b) \quad f'_\infty(z) = -f_\infty(z) \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+1} c_{\lambda \infty} z^{\gamma_\infty-\lambda}$$

ergeben sich sofort die folgenden grundlegenden Klasseneigenschaften:

1. mit $y \in k$ ist auch $R(z)y \in k$.
2. mit $y_1 \in k$, $y_2 \in k$ ist auch $y_1 + y_2 \in k$.
3. mit $y \in k$ ist auch $\frac{dy}{dz} \in k$.

In der Folge wollen wir auch Teilmengen von k , welche diesen drei Bedingungen genügen, als Klassen bezeichnen.

Die ganze Zahl $p = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_\infty$ nennen wir nach R. KÖNIG [5] das arithmetische Geschlecht der Klasse. Das Geschlecht ist eine nicht negative ganze Zahl $\leq n+1$.

Von der Klasse k ausgehend erhalten wir weniger umfassende Klassen (daß die folgenden Teilmengen von k wieder Klassen bilden, ist trivial): unter k_v verstehen wir diejenige Teilmenge von k , deren Elemente mit Ausnahme der a_v und eventuell ∞ höchstens in den Punkten der endlichen Menge \mathfrak{B} , welche keinen der Punkte a_v , ∞ enthält, singular werden; entsprechend verstehen wir unter k_∞ diejenige Teilmenge von k , deren Elemente außer den a_v und gegebenenfalls ∞ keine weiteren Singularitäten mehr aufweisen.

§ 2. Divisoren und Multipla.

Nunmehr weisen wir jedem Punkt von $\bar{\mathbb{C}}$ ein Symbol zu und außerdem noch jedem Punkt des rechten Ufers der Schnitte \mathfrak{L}_v , $v=0, \dots, n$. Speziell seien den a_v die Symbole a_v , dem Punkt ∞ das Symbol a_∞ zugeordnet, ferner den Punkten $b_\mu \in \mathfrak{B}$ die Symbole b_μ .

Ist p gewöhnlicher Punkt, d. h. von den a_v und von a_∞ verschieden, und gilt in einer Umgebung von p die Entwicklung¹⁾

¹⁾ Mit t sei von nun an die gewöhnliche Ortsuniformisierende bezeichnet, also $t = z - p$ bzw. $t = 1/z$.

$y = t^\alpha \mathfrak{P}(t)$ mit $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, $\mathfrak{P}(t)$ Potenzreihe in t

bzw. für $\mathfrak{p} = \alpha, \alpha_\infty$ die Entwicklung

$$y : f_\nu(z) = t^\alpha \mathfrak{P}(t) \text{ mit } \mathfrak{P}(0) \neq 0,$$

so heißt α die Ordnungszahl von y im Punkte \mathfrak{p} . Ist $m \leq \alpha$, so heißt y Multiplum von \mathfrak{p}^m ; wir sagen auch: y ist teilbar durch den Divisor \mathfrak{p}^m . Ist y teilbar durch $\mathfrak{p}_1^{m_1}, \dots, \mathfrak{p}_l^{m_l}$, so nennen wir y teilbar durch den Divisor $\Omega = \mathfrak{p}_1^{m_1} \dots \mathfrak{p}_l^{m_l}$. Nach diesen Festlegungen beweisen wir den

Satz 1: Jede nicht identisch verschwindende Funktion aus k ist genau teilbar durch einen Divisor der Gesamtordnung $q = -p$; umgekehrt entspricht jedem Divisor dieser Gesamtordnung eine bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmte Funktion aus k .

Beweis: Sei $y = R(z) W(z)$. Der Term $R(z)$ liefert als rationale Funktion keinen Beitrag zur Gesamtordnung des Divisors, so daß nur noch $W(z)$ zu betrachten ist. Nach (2) hat $W(z)$ in jedem endlichen Punkt die Ordnungszahl 0. In α_∞ gilt:

$$\frac{V(z)}{f_\infty(z)} = t^{-\alpha_\infty - \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu} \mathfrak{P}(t) = t^{-p} \mathfrak{P}(t), \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0,$$

d. h. $W(z)$ ist genaues Multiplum von α_∞^{-p} , womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Sei

$$\Omega = \prod_{\nu=0}^n \alpha_\nu^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}_\mathfrak{e}^{k_\mathfrak{e}} \alpha_\infty^{l_\infty}; \quad l_\infty + \sum_{\nu=0}^n l_\nu + \sum_{\mathfrak{e}} k_\mathfrak{e} = -p$$

gegeben. Dann ist

$$y = \prod_{\nu=0}^n (z - \alpha_\nu)^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} (z - \mathfrak{p}_\mathfrak{e})^{k_\mathfrak{e}} W(z)$$

sicher Multiplum von

$$\Omega' = \prod_{\nu=0}^n \alpha_\nu^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}_\mathfrak{e}^{k_\mathfrak{e}}.$$

In α_∞ kommt:

$$\frac{y}{f_\infty(z)} = t^{-\sum_{\nu=0}^n l_\nu - \sum_{\mathfrak{e}} k_\mathfrak{e} - p} \mathfrak{P}(t) = t^{l_\infty} \mathfrak{P}(t); \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0.$$

Ist nun y_1 ebenfalls Multiplum von Ω , so ist der Quotient aus y und y_1 in der ganzen Ebene eindeutig und endlich, so daß er sich nach dem LIOUVILLESchen Satz auf eine Konstante reduziert.

Satz 1 sprechen wir noch in einer anderen Form aus:

Satz 1a: Jede Klassenfunktion, die durch einen Divisor der Gesamtordnung $q > -p$ teilbar ist, verschwindet identisch.

Sei gegeben der Divisor

$$\Omega = \prod_{\nu=0}^n \alpha_\nu^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}_\mathfrak{e}^{k_\mathfrak{e}} \alpha_\infty^{l_\infty}; \quad \Omega' = \prod_{\nu=0}^n \alpha_\nu^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} \mathfrak{p}_\mathfrak{e}^{k_\mathfrak{e}},$$

dann besitzt das Ideal $J(\Omega')$ die Basis

$$y = \prod_{\nu=0}^n (z - \alpha_\nu)^{l_\nu} \prod_{\mathfrak{e}} (z - \mathfrak{p}_\mathfrak{e})^{k_\mathfrak{e}} W(z).$$

$J(\Omega')$ ist identisch mit der Menge der Funktionen $g(z)y$, wobei $g(z)$ die Menge der Polynome in z durchläuft. Soll nun $g(z)y$ außerdem noch Multiplum von Ω sein, dann ist notwendig

$$0 \leq m \leq -p - q,$$

wenn m der Grad von $g(z)$ und q die Gesamtordnung von Ω ist. Umgekehrt ist diese Gradbedingung auch hinreichend dafür, daß $g(z)y$ Multiplum von Ω ist. Daraus folgt der

Satz 2: Ist $q \leq -p$ die Gesamtordnung des Divisors $\Omega = \Omega' a_{\infty}^{l_{\infty}}$, so existieren in k genau $U_{\Omega} = -q - p + 1$ linearunabhängige Multipla von Ω . Stellt y eine Idealbasis von $J(\Omega')$ dar, so bildet $y, \dots, z^{-q-p}y$ eine Multiplabasis von Ω . Ist dagegen $q > -p$, so existieren in k keine Multipla von Ω .

Für $\Omega = 1$ erhält man die überall endlichen Funktionen von k . Für ihre Anzahl ϱ gilt nach Satz 2:

$$(3) \quad \varrho = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 0 \\ 1 & \text{für } p = 0. \end{cases}$$

Im Falle $p = 0$ normieren wir die Basis $\varphi(z)$ der überall endlichen Funktionen so, daß

$$\varphi(z)/t_{\infty}^0 = 1,$$

wenn y/t^s der Koeffizient von t^s in der Entwicklung von y nach Potenzen der Uniformisierenden ist.

§ 3. Komplementäre Klasse. Differentiale.

Definition \tilde{I} : Unter der zu k komplementären Klasse \tilde{k} verstehen wir diejenige Klasse, welche durch

1. dieselben α_v wie k und
2. die Charakterisierungsfunktionen

$$\tilde{f}_v(z) = \frac{(z - \alpha_v)^{\varepsilon_v}}{f_v(z)} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}_{\infty}(z) = \frac{z^{-\varepsilon_{\infty}}}{f_{\infty}(z)}$$

$$\text{mit } \varepsilon_v = \begin{cases} 0 & \Re(\alpha_v) = 0 \\ 1 & \Re(\alpha_v) > 0 \end{cases}$$

bestimmt ist.

Setzt man sinngemäß als Basis von \tilde{k}

$$(4) \quad \tilde{W}(z) = z^{\alpha_{\infty}} \prod_{v=0}^{n, \infty} \tilde{f}_v(z),$$

so gilt:

$$W(z) \tilde{W}(z) = \prod_{v=0}^n (z - \alpha_v)^{\varepsilon_v} = Z(z).$$

Den Divisor

$$\mathfrak{Z} = a_{\infty}^{\alpha_{\infty}} \prod_{v=0}^n a_v^{\varepsilon_v}$$

nennt man den Verzweigungsdivisor der Klasse. Seine Gesamtordnung ist

$$\varepsilon_{\infty} + \sum_v \varepsilon_v = p + \tilde{p}.$$

Nunmehr wollen wir die Differentiale aus k betrachten. Über die Zugehörigkeit zu k ist nichts mehr zu sagen; dagegen haben wir noch den Begriff der Ordnungszahl für Differentiale festzulegen. Ist p eine gewöhnliche Stelle und gilt in einer Umgebung von p die Entwicklung

$$dw = t^\alpha \mathfrak{P}(t) dt \quad \text{mit} \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0$$

bzw. für $p = a_\infty$ die Entwicklung

$$\int_\infty (z) dw = t^\alpha \mathfrak{P}(t) dt \quad \text{mit} \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0,$$

so heißt α die Ordnungszahl von dw im Punkte p . Aus dieser Definition ergibt sich der

Satz 3: Das Differential ydz aus k ist dann und nur dann Multiplum von Ω , wenn y durch $\Omega \mathfrak{B}^{-1} a_\infty^2$ teilbar ist.

Zusammen mit Satz 1 kommt:

Satz 1': Jedes nicht identisch verschwindende Differential aus k ist genau teilbar durch einen Divisor von der Gesamtordnung $q = \tilde{p} - 2$; umgekehrt entspricht jedem Divisor dieser Gesamtordnung ein bis auf einen Zahlenfaktor bestimmtes Differential aus k .

Satz 1'a: Jedes Differential aus k , das durch einen Divisor der Gesamtordnung $q > \tilde{p} - 2$ teilbar ist, verschwindet identisch.

Eine Multiplabasis von Differentialen für den Divisor Ω erhält man in der Form $y_i dz$, wenn die y_i eine Multiplabasis von Funktionen für den Divisor $\Omega \mathfrak{B}^{-1} a_\infty^2$ bilden. Das führt uns zu

Satz 2': Ist $q \leq \tilde{p} - 2$ die Gesamtordnung des Divisors $\Omega = \Omega' a_\infty^{l_\infty}$, so existieren in k genau $V_\Omega = -q + \tilde{p} - 1$ linearunabhängige Differentiale, die Multipla von Ω sind. Ist y eine Idealbasis von $J(\Omega' \mathfrak{B}'^{-1})$, so ist $yz, \dots, z^{-q+\tilde{p}-2} ydz$ eine Multiplabasis von Ω . Ist $q > \tilde{p} - 2$, so existieren in k keine Differentiale, die Multipla von Ω sind.

Satz 2 und Satz 2' liefern zusammen das bekannte RIEMANN-ROCHSche Anzahlstheorem, wie man sich leicht überzeugt.

Setzt man speziell $\Omega = 1$, so erhält man die überall endlichen Differentiale aus k ; für die Anzahl σ der linearunabhängigen gilt nach Satz 2':

$$(5) \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{p} = 0 \\ \tilde{p} - 1 & \text{für } \tilde{p} > 0. \end{cases}$$

Damit folgt die Anzahl der linearunabhängigen überall endlichen Differentiale aus \tilde{k} zu:

$$(5) \quad \tilde{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{für } p = 0 \\ p - 1 & \text{für } p > 0. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$y = \prod_{v=0}^n (x - a_v)^{-e_v}, \quad \tilde{W}(x) = \frac{1}{W(x)}$$

Idealbasis von $\tilde{J}(\mathfrak{B}'^{-1})$. Damit bilden

$$\frac{dx}{W(x)}, \dots, \frac{x^{p-2} dx}{W(x)}$$

eine Multiplabasis der überall endlichen Differentiale aus \tilde{k} . Von dieser Basis ausgehend gelangen wir zu einer neuen, $d\tilde{\psi}^{(i)}(x)$, welche durch die Normierungsbedingungen gegeben sei:

$$(6) \quad \frac{d\tilde{\varphi}^{(i)}(x)}{d\tau} / \tau_{a_\infty}^{k-1} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, p-1.$$

Da die alte Basis in a_∞ die bzw. Ordnungszahlen $0, \dots, p-2$ aufweist, sind die Normierungsbedingungen (6) zu erfüllen; daß das System $d\tilde{\varphi}^{(i)}$ tatsächlich eine Basis bildet, folgt aus der linearen Unabhängigkeit, die sich unmittelbar aus den Normierungsbedingungen ergibt.

An diese Ausführungen schließen wir an die

Bemerkung: Ist y eine Funktion aus k und $d\tilde{w}$ ein Differential aus \tilde{k} , so ist $y d\tilde{w}$ ein rationales Differential, so daß gilt:

$$\sum_{\text{Residuen}} y d\tilde{w} = 0.$$

§ 4. Elementarfunktionen und -differentiale einer Variablen.

Definition 2: Eine Klassenfunktion $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, b)$ aus k heißt Elementarfunktion der Ordnung γ für die Stelle b , wenn sie

a) falls b gewöhnlich: 1. Multiplum von $b^{-\gamma} a_\infty^{-p+1}$ ist,

$$\gamma \geq 1 \quad 2. \text{ in } b \text{ den Hauptteil } \frac{1}{t^\gamma} \text{ hat,}$$

b) falls $b = a_\infty \neq a_\infty$: 1. Multiplum von $b^{-\gamma} a_\infty^{-p+1}$ ist,

$$\gamma \geq 1 \quad 2. \text{ in } b \text{ den Hauptteil } \frac{1}{t^\gamma} \text{ hat,}$$

c) falls $b = a_\infty$:

1. Multiplum von $a_\infty^{-\gamma}$ ist,
 $\gamma \geq p$ 2. in a_∞ die Entwicklung aufweist:

$$A) \quad p > 1: \frac{1}{t^\gamma} + \frac{M_1^{(\gamma)}}{t^{p-1}} + \dots + \frac{M_{p-1}^{(\gamma)}}{t} + \dots$$

$$B) \quad p \leq 1: \frac{1}{t^\gamma} + t^{1-p} \mathfrak{P}(t).$$

Dabei seien die $M_{p-i}^{(\gamma)}$ vorläufig noch unbestimmt.

Ähnliche Definitionen, wenn auch allgemeinerer Natur treten ebenfalls bei den Algebraischen Funktionen auf, z. B. R. KÖNIG (6), S. 77.

Unter der Voraussetzung der Existenz der $\mathfrak{E}^{(\gamma)}$ leiten wir auf Grund der Bemerkung des letzten Paragraphen die Gleichungen her:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} b \neq a_\infty: \quad \frac{d\tilde{\varphi}^{(i)}}{d\tau} / t_b^{\gamma-1} + \mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, b) / a_\infty^{-i} &= 0 \\ b = a_\infty: \quad \frac{d\tilde{\varphi}^{(i)}}{d\tau} / t_{a_\infty}^{\gamma-1} + M_{p-i}^{(\gamma)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, p-1.$$

Damit sind die in Def. 2 noch offen gelassenen Größen bestimmt.

Nach Satz 1a sieht man sofort, daß es höchstens eine Elementarfunktion gegebener Ordnung und Stelle geben kann: die Differenz zweier hypothetischer Elementarfunktionen gleicher Ordnung und Stelle wäre durch a_∞^{-p+1} teilbar und somit identisch 0.

Die Existenz wenigstens einer Elementarfunktion vorgeschriebener Ordnung und Stelle weisen wir durch Konstruktion nach, womit sich gleichzeitig ein expliziter Ausdruck für die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, b)$ ergibt.

Es bilden die Funktionen

1. $b \neq a_\infty$: $\frac{W(z)}{(z-d)^\gamma}, \dots, \frac{W(z)}{z-d}$ eine Multiplabasis für $b^{-\gamma} a_\infty^{-\gamma+1}$ mit $\gamma \geq 1$;

2. $b = a_\infty$: $W(z), \dots, z^{\gamma-p} W(z)$ eine Multiplabasis für $a_\infty^{-\gamma}$ mit $\gamma \geq p$.

Somit erhält man:

a) falls b gewöhnlich:

Es gilt: $\frac{1}{W(z)} = C_0 + C_1 t + \dots, C_0 \neq 0$.

(8a) Setzen wir: $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, b) = \left\{ \frac{C_0}{(z-d)^\gamma} + \dots + \frac{C_{\gamma-1}}{z-d} \right\} W(z)$,

so kommt in b : $t^\gamma \mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, b) = 1 + t^\gamma \mathfrak{P}(t)$.

b) falls $b = a_v \neq a_\infty$:

Es gilt: $\frac{f_v(z)}{W(z)} = C_0^{(v)} + C_1^{(v)} t + \dots, C_0^{(v)} \neq 0$.

(8b) Setzen wir: $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_v) = \left\{ \frac{C_0^{(v)}}{(z-a_v)^\gamma} + \dots + \frac{C_{\gamma-1}^{(v)}}{z-a_v} \right\} W(z)$,

so kommt in a_v : $t^\gamma \mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_v) = 1 + t^\gamma \mathfrak{P}(t)$.

c) falls $b = a_\infty$:

Es gilt: $\frac{z^p f_\infty(z)}{W(z)} = C_0^{(\infty)} + C_1^{(\infty)} t + \dots, C_0^{(\infty)} \neq 0$.

(8c) Setzen wir: $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_\infty) = \{C_0^{(\infty)} z^{\gamma-p} + \dots + C_{\gamma-p}^{(\infty)}\} W(z)$,

so kommt in a_∞ : $t^\gamma \mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_\infty) = 1 + t^{\gamma-p+1} \mathfrak{P}(t)$.

Damit sind die Elementarfunktionen explizit aufgestellt. Mit ihrer Hilfe soll jetzt die „Partialbruchzerlegung“ der Klassenfunktionen durchgeführt werden (vgl. R. KÖNIG (6), S. 78).

Sei y ein Element von k . Für die Entwicklung von y in den Polstellen p gilt dann, wenn γ die höchste Polordnungszahl ist:

$$\frac{c_{j\gamma}}{t^\gamma} + \frac{c_{j,\gamma-1}}{t^{\gamma-1}} + \dots$$

Wir verabreden: unter dem „effektiven Hauptteil“ von y in p_j verstehen wir:

$$\left. \begin{aligned} p_j &\neq a_\infty: \frac{c_{j\gamma}}{t^\gamma} + \dots + \frac{c_{j1}}{t}, \gamma \geq 1 \\ p_j &= a_\infty: \frac{c_{j\gamma}}{t^\gamma} + \dots + \frac{c_{jp}}{t^p}, \gamma \geq p \end{aligned} \right\} \text{sonst } 0.$$

Wenn im folgenden von Hauptteilen schlechthin die Rede ist, meinen wir entweder den Hauptteil im gewöhnlichen Sinn oder den effektiven Hauptteil, je nachdem, welcher der beiden der umfassendere ist.

Wir betrachten die Klassenfunktion

$$y^* = y - \sum_{\text{eff. Hauptt.}} c_{jk} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j).$$

Da y^* in jedem endlichen Punkt eine nicht-negative Ordnungszahl aufweist und außerdem durch a_∞^{-p+1} teilbar ist, verschwindet sie nach Satz 1 a identisch. Also erhalten wir die Partialbruchdarstellung in k :

$$(9) \quad y = \sum_{\text{eff. Hauptt.}} c_{jk} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j).$$

Nach der Bemerkung des vorhergehenden Paragraphen gilt bei Summation über die Hauptteile:

$$(10) \quad \sum_{j,k} c_{jk} \frac{d\psi^{(i)}}{dt} \Big|_{t_j^{k-1}} = 0 \quad i = 1, \dots, p-1; p > 1.$$

Damit bestehen für die Koeffizienten der Hauptteile für $p > 1$ genau $p-1$ Bedingungsgleichungen. Während (9) den Abbau der Klassenfunktionen liefert, soll nun auch der Aufbau der Klassenfunktionen durchgeführt werden. Dazu geben wir die p_j und die ihnen zugeordneten c_{jk} vor und bilden die Klassenfunktion:

$$y = \sum_{\text{eff. Hauptt.}} c_{jk} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j).$$

Behauptung: Erfüllen die c_{jk} für $p > 1$ die Bedingungen (10), während sie für $p \leq 1$ vollkommen willkürlich sind, so weist y die durch die c_{jk} vorgeschriebenen Hauptteile auf.

Daß in jedem Fall im Endlichen die gewünschten Hauptteile vorliegen, ist trivial.

1. a_∞ ist nicht unter den p_j enthalten.

a) $p \leq 1$: y ist durch a_∞^{-p+1} teilbar, so daß in a_∞ kein Hauptteil auftritt, wie es auch sein soll.

b) $p > 1$: y ist durch a_∞^{-p+1} teilbar, so daß die Polordnung in a_∞ nicht größer als $p-1$ sein kann. Der Koeffizient von $t_{a_\infty}^{-i}$, $i = 1, \dots, p-1$, wird:

$$C_{\infty i} = \sum_{j,k} c_{jk} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j) / t_{a_\infty}^{-i} = - \sum_{j,k} c_{jk} \frac{d\psi^{(i)}}{dt} \Big|_{t_j^{k-1}} = 0,$$

so daß die Behauptung auch in diesem Fall gilt.

2. Sei $p_1 = a_\infty$.

a) $p \leq 1$: Da die $\mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j)$, $j = 2, 3, \dots$, durch a_∞^{-p+1} teilbar sind, liefern diese Terme keinen Beitrag zum Hauptteil in a_∞ ; dieser wird also einzig durch die $\mathfrak{E}^{(k)}(z, p_1)$ bestimmt. Wegen (8c) und der folgenden Gleichung liegt hier der gewünschte Hauptteil vor.

b) $p > 1$: In a_∞ erhält man als Koeffizienten von $t_{a_\infty}^{-i}$, $i = 1, \dots, p-1$ (niedrigere Potenzen haben wegen (8c) und der folgenden Gleichung schon die richtigen Faktoren, höhere Potenzen kommen wegen der Teilbarkeit durch a_∞^{-p+1} nicht in Frage):

$$\begin{aligned} C_{\infty i} &= \sum_{j=1}^p \sum_k c_{jk} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_j) t_{a_\infty}^{-i} + \sum_{k \geq p} c_{1k} \mathfrak{E}^{(k)}(z, p_1) / t_{a_\infty}^{-i} = \\ &= - \sum_{j=1}^p \sum_k c_{jk} \frac{d\psi^{(i)}}{dt} \Big|_{t_j^{k-1}} - \sum_{k \geq p} c_{1k} \frac{d\psi^{(i)}}{dt} \Big|_{t_{a_\infty}^{k-1}} = \\ &= \sum_{k \leq p-1} c_{1k} \frac{d\psi^{(i)}}{dt} \Big|_{t_{a_\infty}^{k-1}} = c_{1i}. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung allgemein bewiesen. Mit diesen abschließenden Betrachtungen kann der Aufbau und Abbau der Klassenfunktionen als erledigt angesehen werden.

Definition 2'. Ein Klassendifferenzial $d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x, b)$ aus \mathfrak{k} heißt Elementardifferential der Ordnung γ für die Stelle b , wenn es

- a) falls b gewöhnlich: 1. Multiplum von $b^{-\gamma} a_\infty^{p-1}$ ist,
 $\gamma \geq 1$ 2. in b den Hauptteil $\frac{d\tau}{\tau^\gamma}$ hat,
 b) falls $b = a_r \neq a_\infty$: 1. Multiplum von $b^{-\gamma} a_\infty^{p-1}$ ist,
 $\gamma \geq 1$ 2. in b den Hauptteil $\frac{d\tau}{\tau^\gamma}$ hat,
 c) falls $b = a_\infty$: 1. Multiplum von $a_\infty^{-\gamma}$ ist,
 $\gamma \geq -p+2$ 2. in a_∞ die Entwicklungen besitzt:
 A) $p > 0$: $\left\{ \frac{1}{\tau^\gamma} + \tau^{p-1} \mathfrak{P}(\tau) \right\} d\tau$
 B) $p = 0$: $\left\{ \frac{1}{\tau^\gamma} + \frac{N_1^{(\gamma)}}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) \right\} d\tau$.

Für $p = 0$ folgt analog zu (7):

$$(11) \quad \begin{aligned} b \neq a_\infty: \quad & \varphi(x) / \tau_b^{\gamma-1} + \frac{d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x, b)}{d\tau} \Big|_{a_\infty}^{-1} = 0. \\ b = a_\infty: \quad & \varphi(x) / \tau_{a_\infty}^{\gamma-1} + N_1^{(\gamma)} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus bestimmen sich die $N_1^{(\gamma)}$. Zur Frage der Eindeutigkeit und Existenz gilt das schon bei den Elementarfunktionen Gesagte. Die Aufstellung der Elementardifferentiale erfolgt wie dort, und zwar erhalten wir:

a) falls b gewöhnlich:

$$\text{Es gilt: } W(x) = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 \tau + \dots, \tilde{C}_0 \neq 0,$$

$$(12a) \quad \text{und } d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x, b) = \left\{ \frac{\tilde{C}_0}{(x-d)^\gamma} + \dots + \frac{\tilde{C}_{\gamma-1}}{x-d} \right\} \frac{dx}{W(x)}.$$

b) falls $b = a_r \neq a_\infty$:

$$\text{Es gilt: } \frac{W(x)}{f_r(x)} = \tilde{C}_0^{(\gamma)} + \tilde{C}_1^{(\gamma)} \tau + \dots, \tilde{C}_0^{(\gamma)} \neq 0,$$

$$(12b) \quad \text{und } d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x, a_r) = \left\{ \frac{\tilde{C}_0^{(\gamma)}}{(x-a_r)^\gamma} + \dots + \frac{\tilde{C}_{\gamma-1}^{(\gamma)}}{x-a_r} \right\} \frac{dx}{W(x)}.$$

c) falls $b = a_\infty$:

$$\text{Es gilt: } \frac{W(x)}{x^p f_\infty(x)} = \tilde{C}_0^{(\infty)} + \tilde{C}_1^{(\infty)} \tau + \dots, \tilde{C}_0^{(\infty)} \neq 0,$$

$$(12c) \quad \text{und } d\mathfrak{F}^{(\gamma)}(x, a_\infty) = - \left\{ \tilde{C}_0^{(\infty)} x^{\gamma+p-2} + \dots + \tilde{C}_{\gamma+p-2}^{(\infty)} \right\} \frac{dx}{W(x)}.$$

Man ersieht ohne weiteres, daß im Fall c) nicht-positive Ordnungen auftreten können und zwar folgt nach der Festlegung der Basis für die überall endlichen Differentiale (6):

$$(13) \quad d\mathfrak{F}^{(1-i)}(x, a_\infty) = d\tilde{\varphi}^{(i)}(x) \quad i = 1, \dots, p-1$$

Ähnlich wie bei den Funktionen können wir für die Differentiale eine Partialbruchzerlegung durchführen. Wir definieren wieder den Begriff des effektiven Hauptteils. Unter ihm verstehen wir im Punkt:

$$\left. \begin{aligned} p_i \neq a_\infty: \quad & \frac{c_{i\gamma}}{\tau^\gamma} + \dots + \frac{c_{i1}}{\tau}, \quad \gamma \geq 1 \\ p_i = a_\infty: \quad & \frac{c_{i\gamma}}{\tau^\gamma} + \dots + \frac{c_{i-p+2}}{\tau^{-p+2}}, \quad \gamma \geq -p+2 \end{aligned} \right\} \text{sonst } 0.$$

Zum Begriff des Hauptteils schlechthin gilt wieder das schon oben Gesagte. Es gilt dann die Partialbruchzerlegung

$$(14) \quad d\dot{w} = \sum_{\text{eff. Hauptt.}} c_{jk} d\tilde{y}^{(k)}(z, p_j).$$

Geben wir nun für den Aufbau der Differentiale die Polstellen p_j und die zugehörigen c_{jk} vor, dann können wir wie oben beweisen:

Erfüllen für $p = 0$ die c_{jk} die Bedingung

$$(15) \quad \sum_{j,k} c_{jk} \varphi(x) / \tau_j^{k-1} = 0,$$

während sie für $p > 0$ vollkommen willkürlich sind, so weist

$$d\dot{w} = \sum_{\text{eff. Hauptt.}} c_{jk} d\tilde{y}^{(k)}(x, p_j)$$

die durch die c_{jk} vorgeschriebenen Hauptteile auf.

Damit ist der Aufbau und der Abbau der Differentiale bekannt.

§ 5. Elementarfunktionen und- differentiale zweier Variablen.

Definition 3: Eine analytische Funktion $E^{(h)}(z, x)$ der beiden Variablen x, z heißt Elementarfunktion zweier Variablen der Ordnung h , wenn für gewöhnliches, festes $x = \xi_0$ gilt:

$$(16) \quad E^{(h)}(z, \xi_0) = \mathfrak{E}^{(h)}(z, \xi_0).$$

Die Existenz der $E^{(h)}$ vorausgesetzt, folgt nach Satz 1a sofort die Einzigkeit: bei gewöhnlichem x hat die Differenz zweier hypothetischer Elementarfunktionen h -ter Ordnung im Endlichen überall nicht negative Ordnungen, während sie durch α_{∞}^{-p+1} teilbar ist und damit für jedes gewöhnliche x identisch verschwindet. Deshalb muß die Differenz identisch verschwinden.

Offensichtlich ist

$$(17) \quad E^{(1)}(z, x) = \frac{1}{z-x} \cdot \frac{W(z)}{W(x)}.$$

Ferner betrachten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} E^{(1)}(z, x) &= \frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} \left\{ \frac{1}{z-x} \cdot \frac{1}{W(x)} \right\} W(z) = \\ &= \left\{ \sum_{\lambda=0}^h \frac{1}{\lambda!} \frac{1}{h!} \frac{(h-\lambda)!}{z-x^{h-\lambda+1}} \cdot \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{1}{W(x)} \right) \right\} W(z) = \\ &= \left\{ \sum_{\lambda=0}^h \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{1}{W(x)} \right) \cdot \frac{1}{(z-x)^{h-\lambda+1}} \right\} W(z). \end{aligned}$$

Wählt man $x = \xi_0$ gewöhnlich, so sieht man durch Vergleich mit (8a):

$$\frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} E^{(1)}(z, x) / x = \xi_0 = \mathfrak{E}^{(h+1)}(z, \xi_0).$$

Das liefert uns den *Ableitungssatz*:

$$(18) \quad E^{h+1}(z, x) = \frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} E^{(1)}(z, x).$$

Die Elementarfunktionen und -differentiale zweier Variablen sind auch in der Theorie der Algebraischen Funktionen geläufige Bildungen (vgl. KÖNIG (6), S. 85 usw.). Ebenso existiert dort der Ableitungssatz und die weiteren im Folgenden abgeleiteten Theoreme.

Jetzt wollen wir $E^{(1)}(z, x)$ nach $\tau = x - d$ bzw. $\tau = \frac{1}{x}$ entwickeln.

1. Sei ξ_0 gewöhnlich, $x - x_0 = \tau$, $\left| \frac{\tau}{z - x_0} \right| < 1$. Dann gilt:

$$E^{(1)}(z, x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\tau^\lambda}{(z - x_0)^{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{W(x)} \cdot W(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} A_{\gamma+1}(z) \tau^\gamma,$$

wenn noch zusätzlich $|x - x_0| < r$, wo r der Konvergenzradius der Entwicklung

$$\frac{1}{W(x)} = C_0 + C_1 \tau + \dots$$

ist. Für $A_{\gamma+1}(z)$ kommt:

$$A_{\gamma+1}(z) = \left\{ \frac{C_0}{(z - x_0)^{\gamma+1}} + \dots + \frac{C_\gamma}{(z - x_0)} \right\} W(z) = \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, \xi_0)$$

2. Sei $\xi_0 = a_r \neq a_\infty$, $x - a_r = \tau$, $\left| \frac{\tau}{z - a_r} \right| < 1$. Es kommt ebenso:

$$f_r(x) E^{(1)}(z, x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_r) \tau^\gamma,$$

wenn noch $|x - a_r| < r$, r Konvergenzradius von $\frac{f_r(x)}{W(x)} = C_0^{(r)} + C_1^{(r)} \tau + \dots$.

3. Sei $\xi_0 = a_\infty$, $\tau = \frac{1}{x}$, $|\tau z| < 1$, $|\tau| < \text{Min } |a_r^{-1}|$. Es kommt

$$\begin{aligned} f_\infty(x) E^{(1)}(z, x) \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\tau^p}{z - \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{f_\infty(x)}{\tau^p W(x)} \cdot W(z) = \\ &= \tau^{p-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \tau^\gamma z^\gamma \frac{f_\infty(x)}{\tau^p W(x)} \cdot W(z) = \sum_{\gamma=p-1}^{\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(t, a_\infty) \tau^\gamma \end{aligned}$$

mit $|\tau| < r$, r Konvergenzradius von

$$\frac{f_\infty(x)}{\tau^p W(x)} = C_0^{(\infty)} + C_1^{(\infty)} \tau + \dots$$

Beachten wir noch den Ableitungssatz, dann lautet unter den entsprechenden Konvergenzbedingungen der Entwicklungssatz, für welchen jedoch nur der im folgenden benötigte Anfang der Serie angeschrieben sei:

Entwicklungssatz:

1. ξ_0 gewöhnlich: $E^{(1)}(z, x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, \xi_0) \tau^\gamma$

$$E^{(2)}(z, x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, \xi_0) \tau^{\gamma-1}$$

2. $\xi_0 = a_r \neq a_\infty$: $E^{(1)}(z, x) = \frac{1}{f_r(x)} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_r) \tau^\gamma$

$$\begin{aligned} E^{(2)}(z, x) &= \frac{1}{f_r(x)} \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_r) \tau^{\gamma-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_r) \right] \tau^{\gamma-\gamma^*} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \tau_0 = a_\infty: \quad E^{(1)}(z, x) \frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{f_\infty(x)} \cdot \sum_{\gamma=p-1}^{\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_\infty) \tau^\gamma \\
 E^{(2)}(z, x) \frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{f_\infty(x)} \left\{ - \sum_{\gamma=p-1}^{\infty} (\gamma+2) \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_\infty) \tau^{\gamma+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma=p+1}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\gamma-p+1} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\infty) \right] \tau^{\gamma-\gamma_\infty} \right\}
 \end{aligned}$$

wenn wir noch setzen: $c_{\lambda\infty} = 0$ für $\lambda > \gamma_p - 1$, bzw. $\lambda > \gamma_\infty + 1$.

$E^{(1)}(z, x)$ ist also die erzeugende Funktion der Elementarfunktionen einer Variablen.

Definition 3': Ein analytisches Differential $d\tilde{F}^{(h)}(x, z)$ der beiden Variablen x, z heißt Elementardifferential zweier Variablen der Ordnung h , wenn für gewöhnliches, festes $z = z_0$ gilt:

$$(19) \quad d\tilde{F}^{(h)}(x, z_0) = d\tilde{\mathfrak{F}}^{(h)}(x, z_0).$$

Analog den Elementarfunktionen findet man den

Ableitungssatz:

$$(20) \quad d\tilde{F}^{(h+1)}(x, z) = \frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial z^h} d\tilde{F}^{(1)}(x, z); \quad d\tilde{\mathfrak{F}}^{(1)}(x, z) = \frac{1}{x-z} \cdot \frac{W(x)}{W(z)} dx.$$

Die Bildungen der Elementardifferentiale zweier Variablen und der zugehörige Ableitungssatz treten in der Literatur ziemlich häufig auf (vgl. KÖNIG (6), S. 85 usf.; BLISS (1), S. 111 usf.).

Unter den entsprechenden Konvergenzbedingungen erhalten wir wieder den Entwicklungssatz, für den auch jetzt nur die beiden ersten Stufen angegeben seien:

Entwicklungssatz:

$$1. z_0 \text{ gewöhnlich: } d\tilde{F}^{(1)}(x, z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, z_0) t^\gamma$$

$$d\tilde{F}^{(2)}(x, z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, z_0) t^{\gamma-1}$$

$$2. z_0 = a_p \neq a_\infty: d\tilde{F}^{(1)}(x, z) = f_p(z) \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, a_p) t^\gamma$$

$$\begin{aligned}
 d\tilde{F}^{(2)}(x, z) &= f_p(z) \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, a_p) t^{\gamma-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda p} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1-\lambda)}(x, a_p) \right] t^{\gamma-\gamma_p} \right\}
 \end{aligned}$$

$$3. z_0 = a_\infty: d\tilde{F}^{(1)}(x, z) = f_\infty(z) \sum_{\gamma=-p+1}^{\infty} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, a_\infty) t^\gamma$$

$$\begin{aligned}
 d\tilde{F}^{(2)}(x, z) &= -f_\infty(z) \left\{ \sum_{\gamma=-p+1}^{\infty} \gamma d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, a_\infty) t^{\gamma-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma=-p+1}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\gamma+p-1} c_{\lambda\infty} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1-\lambda)}(x, a_\infty) \right] t^{\gamma-\gamma_\infty} \right\}
 \end{aligned}$$

wenn wir noch setzen $c_{\lambda\infty} = 0$ für $\lambda > \gamma_p - 1$, bzw. $\lambda > \gamma_\infty + 1$.

§ 6. Vertauschungstheoreme.

In diesem Paragraphen betrachten wir vorerst in $E^{(h)}(z, x)$, $d\tilde{F}^{(h)}(x, z)$ die ersten beiden Variablen als fest und führen nach der zweiten die Partialbruchzerlegung durch. Weil man nach der Partialbruchzerlegung die ersten Variablen wieder variieren kann, erhält man bestimmte Identitäten in zwei Variablen. Es zeigt sich, daß in diesen Identitäten je zwei der

$$E^{(h)}, dF^{(h)}, \tilde{E}^{(h)}, d\tilde{F}^{(h)}$$

der gleichen Ordnung verknüpft sind. Man erhält die Zusammenstellungen:

$$\begin{array}{ll} E^{(h)} d x \div d \tilde{F}^{(h)} : V_{Ih} & \text{Vertauschungstheorem I. Art } h\text{-ter Stufe} \\ E^{(h)} \div \tilde{E}^{(h)} : V_{IIh} & \text{Vertauschungstheorem II. Art } h\text{-ter Stufe} \\ d F^{(h)} \div d \tilde{F}^{(h)} : V_{IIIh} & \text{Vertauschungstheorem III. Art } h\text{-ter Stufe} \end{array}$$

Die Relation zwischen $dF^{(h)}$, $\tilde{E}^{(h)}$ kann man durch Vertauschung von k und \tilde{k} auf V_{Ih} zurückführen.

Für unsere Zwecke benötigen wir nur die Vertauschungstheoreme 2. Stufe, so daß wir nur die Fälle $h = 1, 2$ herleiten werden. Die Theoreme höherer Stufe würde man auf die gleiche Art wie die 2. Stufe erhalten. Sei § vorerst gewöhnlich und fest.

I. Art: Wir betrachten $E^{(h+1)}(z, x) dx$, $h = 0, 1$ als Differential aus \tilde{k} und zerlegen in Partialbrüche. Als singuläre Stellen kommen in Frage

$$1. x = \beta \quad 2. x = a, \quad 3. x = a_\infty.$$

1. $x = \beta$: der Hauptteil wird nach dem Ableitungssatz

$$\frac{1}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} \left(\frac{1}{x - \beta} \right) = \frac{(-1)^{h+1}}{(x - \beta)^{h+1}},$$

dargestellt durch

$$(-1)^{(h+1)} d\tilde{F}^{(h+1)}(x, z).$$

2. $x = a$: der Hauptteil wird nach dem Entwicklungssatz mit $c_{\lambda, \beta}^{(0)} = 0$; $c_{\lambda, \beta}^{(1)} = c_{\lambda, \beta}$:

$$- \sum_{\gamma=0}^{\gamma_\infty-1} \sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda, \beta}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\beta) \tau^{\gamma-\gamma_\infty},$$

dargestellt durch:

$$- \sum_{\gamma=0}^{\gamma_\infty-1} \sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda, \beta}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\beta) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_\infty-\gamma)}(x, a_\beta).$$

3. $x = a_\infty$: nach dem Entwicklungssatz wird der effektive Hauptteil gleich

$$\sum_{\gamma=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \sum_{\lambda=0}^{\gamma-p+1} c_{\lambda, \infty}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\infty) \tau^{\gamma-\gamma_\infty},$$

dargestellt durch:

$$\sum_{\gamma=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \sum_{\lambda=0}^{\gamma-p+1} c_{\lambda, \infty}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\infty) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_\infty-\gamma)}(x, a_\infty).$$

Für $\gamma_\infty \leq 0$ tritt hier kein effektiver Hauptteil auf. Zusammenfassend:

$$E^{(1)}(z, x) dx + d\tilde{F}^{(1)}(x, z) = 0$$

$$E^{(2)}(z, x) dx - d\tilde{F}^{(2)}(x, z) = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda\nu} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_\nu) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\nu-\mu)}(x, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \sum_{\lambda=0}^{\mu-p+1} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_\infty) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_\infty-\mu)}(x, a_\infty),$$

wobei die letzte Summe für $\gamma_\infty \leq 0$ wegfällt.

II. Art: Nunmehr zerlegen wir $E^{(h+1)}(z, x)$, $h = 0, 1$ als Funktion aus \tilde{k} in Partialbrüche. Als singuläre Stellen kommen wieder nur die obigen in Frage. Die einzelnen Beiträge dieser Stellen sind:

1. $x = \mathfrak{z}$: $(-1)^{h+1} \tilde{E}^{(h+1)}(x, z).$

2. $x = a_\nu$: beachtet man, daß die Charakterisierungsfunktion nicht mehr $f_\nu(z)$, sondern $\tilde{f}_\nu(z)$ ist, so lautet der Term:

$$\varepsilon_\nu \mathfrak{E}^{(h+1)}(z, a_\nu) \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}(x, a_\nu) - \sum_{\gamma=0}^{\gamma_\nu+\varepsilon_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda\nu}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\nu) \tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma+\varepsilon_\nu-\gamma)}(x, a_\nu).$$

3. $x = a_\infty$: der Beitrag wird

$$- \sum_{\gamma=p-1}^{\gamma_\infty+\varepsilon_\infty-p-2} \sum_{\lambda=0}^{\gamma-p+1} c_{\lambda\infty}^{(h)} \mathfrak{E}^{(\gamma+1-\lambda)}(z, a_\infty) \tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_\infty+\varepsilon_\infty-\gamma-2)}(x, a_\infty).$$

Ist jedoch

$$\gamma_\infty < p + \tilde{p} + 1 - \varepsilon_\infty,$$

so verschwindet dieser Beitrag. Also:

$$E^{(1)}(z, x) + \tilde{E}^{(1)}(x, z) = \sum_{\nu=0}^n \varepsilon_\nu \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_\nu) \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}(x, a_\nu)$$

$$E^{(2)}(z, x) - \tilde{E}^{(2)}(x, z) = \sum_{\nu=0}^n \varepsilon_\nu \mathfrak{E}^{(2)}(z, a_\nu) \tilde{\mathfrak{E}}^{(1)}(x, a_\nu) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_\nu+\varepsilon_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda\nu} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_\nu) \tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_\nu+\varepsilon_\nu-\mu)}(x, a_\nu) -$$

$$- \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+\varepsilon_\infty-p-2} \sum_{\lambda=0}^{\mu-p+1} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_\infty) \tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_\infty+\varepsilon_\infty-\mu-2)}(x, a_\infty),$$

wobei die letzte Summe fehlt, wenn $\gamma_\infty < p + \tilde{p} + 1 - \varepsilon_\infty$.

III. Art: Nunmehr halten wir \mathfrak{z} für den Augenblick fest und zerlegen $d\tilde{F}^{(h+1)}(x, z) dz$, $h = 0, 1$ als Differential aus k . Als singuläre Punkte kommen in Frage:

1. $z = \mathfrak{z}$ 2. $z = a_\nu$ 3. $z = a_\infty$.

Die Beiträge lauten:

1. $(-1)^{h+1} d\tilde{F}^{(h+1)}(z, x) dx$

2. $\sum_{\gamma=0}^{\gamma_\nu+\varepsilon_\nu-1} \sum_{\lambda=0}^{\gamma} c_{\lambda\nu}^{(h)} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1-\lambda)}(x, a_\nu) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_\nu+\varepsilon_\nu-\gamma)}(z, a_\nu)$

$$3. (-1)^{h+1} \sum_{\gamma=-p+1}^{\tilde{p}-h-\varepsilon_{\infty}} \binom{\gamma}{h} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x, a_{\infty}) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(2-\gamma-h-\varepsilon_{\infty})}(z, a_{\infty}) + \\ + \sum_{\gamma=-p+1}^{\gamma_{\infty}+\tilde{p}-\varepsilon_{\infty}} \sum_{\lambda=0}^{\gamma+p-1} c_{\lambda\infty}^{(h)} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1-\lambda)}(x, a_{\infty}) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_{\infty}+2-\gamma-\varepsilon_{\infty})}(z, a_{\infty}),$$

wobei die entsprechenden Summen nicht auftreten, wenn

$$\tilde{p} - \varepsilon_{\infty} < -p + h + 1 \text{ bzw. } \gamma_{\infty} < -p - \tilde{p} + \varepsilon_{\infty} + 1.$$

Somit folgt:

$$d\tilde{F}^{(1)}(x, z) dz + d\tilde{F}^{(1)}(z, x) dx = - \sum_{\mu=-p+1}^{\tilde{p}-\varepsilon_{\infty}} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\mu+1)}(x, a_{\infty}) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(2-\mu-\varepsilon_{\infty})}(z, a_{\infty}) \\ d\tilde{F}^{(2)}(x, z) dz - d\tilde{F}^{(2)}(z, x) dx = \\ = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_v-\varepsilon_v-1} \sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda v} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\mu+1-\lambda)}(x, a_v) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\gamma_v-\varepsilon_v-\mu)}(z, a_v) + \\ + \sum_{\mu=-p+1}^{\tilde{p}-1-\varepsilon_{\infty}} \mu d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\mu+1)}(x, a_{\infty}) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(1-\mu-\varepsilon_{\infty})}(z, a_{\infty}) + \\ + \sum_{\mu=-p+1}^{\gamma_{\infty}+\tilde{p}-\varepsilon_{\infty}} \sum_{\lambda=0}^{\mu+p-1} c_{\lambda\infty} d\tilde{\mathfrak{F}}^{(\mu+1-\lambda)}(x, a_{\infty}) d\tilde{\mathfrak{F}}^{(2+\gamma_{\infty}-\mu-\varepsilon_{\infty})}(z, a_{\infty}).$$

Dabei fallen die entsprechenden Summen weg, wenn

$$\tilde{p} - \varepsilon_{\infty} < -p + h + 1 \text{ bzw. } \gamma_{\infty} < -p - \tilde{p} + \varepsilon_{\infty} + 1.$$

Um die Vertauschungstheoreme höherer Stufe explizit anzugeben, hätte man auf die Entwicklungssätze höherer Stufe zurückzugreifen. Diese werden aber in ihrer allgemeinen Form sehr unübersichtlich, falls $W(z)$ Exponentialfaktoren enthält. Treten jedoch solche nicht auf, so haben die Entwicklungssätze und die Vertauschungstheoreme höherer Stufe eine relativ einfache Gestalt, wie man bei H. SCHMIDT (9) sieht.

Die Vertauschungstheoreme gestatten uns nun, die Klassen auf eine endliche Basis zurückzuführen.

§ 7. Reduktionssätze.

Wir werden von jetzt an V_{IA} wegen seiner übersichtlicheren Form, und nur deshalb, bevorzugen. Um die Reduktion auf eine endliche Basis durchzuführen, brauchen wir den Begriff der Kongruenz.

Definition 4: Zwei Klassenfunktionen heißen kongruent, $y_1 = y_2$, wenn ihre Differenz $y_1 - y_2$ gleich der Ableitung einer Klassenfunktion ist.

Es gilt:

$$d\tilde{F}^{(2)}(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} d\tilde{F}^{(1)}(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} E^{(1)}(z, x) dx.$$

Dies liefert uns vermöge des Entwicklungssatzes und nach V_{I_2} bei Entwicklung nach τ und Koeffizientenvergleich:

1. $x = b$ gewöhnlich:

$$(21_\gamma) \quad \gamma \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, b) = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_\nu-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\nu-\mu-1} c_{\lambda\nu} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\nu-\mu-\lambda)}(x, a_\nu)}{d\tau} / \tau_b^{\gamma-1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+p-\mu-2} c_{\lambda\infty} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\infty-\mu-\lambda)}(x, a_\infty)}{d\tau} / \tau_b^{\gamma-1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\infty)$$

2. $x = a_j, \neq a_\infty$:

$$(22_\gamma) \quad \gamma \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_j) - \sum_{\lambda=0}^{\gamma_j-1} c_{\lambda j} \mathfrak{E}^{(\gamma_j+\gamma-\lambda)}(z, a_j) = \\ = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_\nu-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\nu-\mu-1} c_{\lambda\nu} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\nu-\mu-\lambda)}(x, a_\nu)}{d\tau} / \tau_{a_j}^{\gamma-1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+p-\mu-2} c_{\lambda\infty} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\infty-\mu-\lambda)}(x, a_\infty)}{d\tau} / \tau_{a_j}^{\gamma-1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\infty)$$

3. $x = a_\infty$:

A) $\gamma \geq p-1$:

$$(23_\gamma) \quad -(\gamma+2) \mathfrak{E}^{(\gamma+1)}(z, a_\infty) + \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+1} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma_\infty+\gamma+2-\lambda)}(z, a_\infty) = \\ = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_\nu-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\nu-\mu-1} c_{\lambda\nu} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\nu-\mu-\lambda)}(x, a_\nu)}{d\tau} / \tau_{a_\infty}^{\gamma+1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+p-\mu-2} c_{\lambda\infty} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\infty-\mu-\lambda)}(x, a_\infty)}{d\tau} / \tau_{a_\infty}^{\gamma+1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\infty)$$

B) $\gamma < p-1$:

$$(23_\gamma) \quad \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+\gamma+2-p} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\gamma_\infty+\gamma+2-\lambda)}(z, a_\infty) = \\ = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_\nu-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\nu-\mu-1} c_{\lambda\nu} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\nu-\mu-\lambda)}(x, a_\nu)}{d\tau} / \tau_{a_\infty}^{\gamma+1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_\infty+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\gamma_\infty+p-\mu-2} c_{\lambda\infty} \frac{d \mathfrak{F}^{(\gamma_\infty-\mu-\lambda)}(x, a_\infty)}{d\tau} / \tau_{a_\infty}^{\gamma+1} \right\} \mathfrak{E}^{(\mu+1)}(z, a_\infty).$$

Dabei fallen für $\gamma_\infty \leq 0$ diejenigen Summen weg, bei welchen die Summation versagt.

Wie man sich leicht überzeugt, sind (21 γ), (22 γ) nur für positive γ nicht-trivial. Im Fall 3B) ist nur die Formel (23 $_{p-2}$) von Interesse, weil die übrigen Formeln auf der rechten Seite 0 aufweisen.

Hätten wir nicht nach Potenzen von τ , sondern nach Potenzen von t entwickelt, so wären wir auf die Reduktionstheoreme für die $d \mathfrak{F}^{(\gamma)}$ gestoßen. Von diesen interessiert uns aber nur der zu 3B) analoge Fall. Wir erhalten dabei:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda=0}^{\gamma_{\infty}+p+\gamma} c_{\lambda\infty} d\tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_{\infty}+\gamma+2-\lambda)}(x, a_{\infty}) = \\
 (24') \quad & = - \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\gamma_{\nu}-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda\nu} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_{\nu}) / \tau_{a_{\infty}}^{\gamma+1} \right\} d\tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_{\nu}-\mu)}(z, a_{\nu}) + \\
 & + \sum_{\mu=p-1}^{\gamma_{\infty}+p-2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\mu-p+1} c_{\lambda\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+1-\lambda)}(z, a_{\infty}) / t_{a_{\infty}}^{\gamma+1} \right\} d\tilde{\mathfrak{E}}^{(\gamma_{\infty}-\mu)}(x, a_{\infty}).
 \end{aligned}$$

Auch hier ist nur die Relation für $\gamma = -p$ nichttrivial.

Aus den Gleichungen (22.) lassen sich die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_j)$, $\gamma \geq \gamma_j^{+1}$, aus den Gleichungen 3A) die $\mathfrak{E}^{(\gamma)}(z, a_{\infty})$, $\gamma \geq \gamma_{\infty} + p + 1$ bestimmen. (23_{p-2}) liefert schließlich noch $\mathfrak{E}^{(\gamma_s)}(z, a_0)$, da der Koeffizient wird:

$$c_{00} \frac{W(x)}{f_0(x)} / x = a_0 = \frac{x^p /_{\infty}(x)}{W(x)} / x = \infty = c_{00} \tilde{C}_0^{(0)} C_0^{(\infty)}$$

und somit von 0 verschieden ist.

Damit erhalten wir den

Reduktionssatz für k_0 und $k_{\mathfrak{N}}$: Die Funktionen der Klasse k_0 lassen sich reduzieren, d. h. sind kongruent einer Linearverbindung, auf die

$$N_0 = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \gamma_{\infty}$$

Elementarfunktionen

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_0), \dots, \mathfrak{E}^{(\gamma_0-1)}(z, a_0), \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_1), \dots, \\
 & \mathfrak{E}^{(\gamma_n)}(z, a_n), \mathfrak{E}^{(p)}(z, a_{\infty}), \dots, \mathfrak{E}^{(\gamma_{\infty}+p)}(z, a_{\infty}).
 \end{aligned}$$

Analog bekommt man aus dieser Basis für k_0 sofort eine Basis für $k_{\mathfrak{N}}$ durch Hinzufügen der Funktionen

$$\mathfrak{E}^{(1)}(z, b_1), \dots, \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_m),$$

so daß man für $k_{\mathfrak{N}}$ eine $N_{\mathfrak{N}}$ -gliedrige Basis angeben kann mit

$$N_{\mathfrak{N}} = N_0 + m = \gamma_0 + \dots + \gamma_{\infty} + m.$$

Ist $\gamma_{\infty} = -1$, dann werden zur Reduktion keine Elementarfunktionen der Stelle a_{∞} benötigt, so daß man die entsprechenden Funktionen in der Basis zu streichen hat.

Nun beweisen wir den

Satz 4: In $k_{\mathfrak{N}}$ gibt es $N_{\mathfrak{N}}$ kongruenzunabhängige Funktionen.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Richtigkeit unserer Behauptung für k_0 . Sei

$$(25) \quad y_{\mu} = (z-c)^{\mu} \prod_{\nu=0}^n (z-a_{\nu})^{\gamma_{\nu}} W(z); \quad \mu = 0, \dots, N_0 - 1$$

mit geeigneten, noch festzulegenden l_{ν} . Wären nun diese Funktionen linearabhängig, dann müßte es ein System von nicht lauter verschwindenden Zahlen c_{μ} geben, so daß

$$\sum_{\mu=0}^{N_0-1} c_{\mu} y_{\mu} = 0.$$

D. h. es müßte mit rationalem $h(z)$ gelten:

$$\sum_{\mu=0}^{N_1-1} c_{\mu} (z-c)^{\mu} \prod_{\nu=0}^n (z-a_{\nu})^{l_{\nu}} W(z) = \frac{d}{dz} \{h(z) W(z)\} = \\ = \left\{ h'(z) + h(z) \left\{ \sum_{\nu=0}^n \sum_{\lambda=0}^{\gamma_{\nu}-1} \frac{c_{\mu\nu}}{(z-a_{\nu})^{\gamma_{\nu}-\lambda}} - \sum_{\lambda=0}^{\gamma_{\infty}} c_{\lambda\infty} z^{\gamma_{\infty}-\lambda} \right\} \right\} W(z).$$

Da die linke Seite der Gleichung genau teilbar ist durch

$$\prod_{\nu=0}^n a_{\nu}^{l_{\nu}},$$

gilt dies auch für die rechte. Daraus folgt aber:

$$h(z) = g(z) \prod_{\nu=0}^n (z-a_{\nu})^{l_{\nu} + \gamma_{\nu}},$$

wo $g(z)$ ein Polynom von z ist. Soll $h(z)$ nicht identisch verschwinden, dann muß $g(z)$ notwendig einen Grad $q \geq 0$ haben; da weiter die Faktoren von $W(z)$ auf beiden Seiten Polynome sind, müssen sie wegen der Identität beide den gleichen Grad haben, so daß gelten muß:

$$q + \sum_{\nu=0}^n (l_{\nu} + \gamma_{\nu}) + \gamma_{\infty} \leq N_0 - 1 + \sum_{\nu=0}^n l_{\nu}, \quad \gamma_{\infty} \geq 0.$$

Daraus ergibt sich aber $q \leq -1$, im Widerspruch zur Graddefinition. Während im Falle $\gamma_{\infty} \geq 0$ der Faktor der rechten Seite immer den Grad

$$q + \sum_{\nu=0}^n (l_{\nu} + \gamma_{\nu}) + \gamma_{\infty}$$

erreicht, d. h. für jedes System l_{ν} , ist dies für $\gamma_{\infty} = -1$ nicht mehr der Fall; wählt man aber die l_{ν} so, daß

$$\sum_{\nu=0}^n (l_{\nu} + \gamma_{\nu} + \alpha_{\nu}) > 0,$$

dann wird auch hier wieder dieser Grad erreicht, womit dann auch der obige Schluß gezogen werden kann.

Es folgt also $h(z) = 0$ und hieraus

$$\sum_{\mu=0}^{N_1-1} c_{\mu} (z-c)^{\mu} = 0,$$

was das Verschwinden sämtlicher c_{μ} im Gefolge hat. Damit ist gezeigt, daß die Funktionen (25) unter den Einschränkungen für $\gamma_{\infty} = -1$ tatsächlich unabhängig sind.

Um den Satz für k_3 zu beweisen, gehen wir so vor: die zur Basis von k_0 hinzukommenden Funktionen weisen im Endlichen je einen schlichten Pol 1. Ordnung auf; diese Pole sind voneinander verschieden. Ein Pol 1. Ordnung kann nicht durch Ableitung einer Klassenfunktion erzeugt werden, wenn er in einem gewöhnlichen Punkt liegt; soll die Ableitung der Klassenfunktion $R(z) W(z)$ in einer gewöhnlichen Stelle einen Pol 1. Ordnung aufweisen, so muß $R(z)$ in dieser Stelle wenigstens einen Pol 1. Ordnung haben, woraus sich aber für die Ableitung ein Pol höherer als 1. Ordnung ergibt. Aus demselben Grund kann auch keine Abhängigkeit zwischen den Funktionen der für k_3

angegebenen Basis existieren. Damit ist der Satz bewiesen. Wir können nunmehr sagen, daß die im Reduktionssatz auftretenden Basen jeweils auch „minimale“ Basen sind, d. h. nicht mehr reduziert werden können.

Es war

$$N_{\mathfrak{B}} = \gamma_0 + \dots + \gamma_{\infty} + m.$$

Sei nun $\gamma_{\infty} \geq 0$. Würde man durch eine linear gebrochene Substitution $z = \infty$ zu einer regulären Stelle machen, dann würde im Endlichen eine neue singuläre Stelle auftreten mit $\gamma' = \gamma_{\infty} + 2$, wie man aus (1_{∞}) erkennt. Wir würden also in der transformierten Klasse zu einer „Stammzahl“

$$N_{\mathfrak{B}'} = \gamma_0 + \dots + \gamma_n + \gamma' + m - 1 = N_{\mathfrak{B}} + 1$$

gelangen. Diese Erscheinung führt sich darauf zurück, daß zwar die Elemente der Ausgangsklasse nach der Transformation der transformierten Klasse angehören, die Elemente der mit der transformierten Basisfunktion und den transformierten singulären Stellen gebildeten Klasse z. T. jedoch nicht in der Ausgangsklasse enthalten waren²⁾.

Nun wollen wir eine wichtige algebraische Aussage über die bei der Reduktion auftretenden Koeffizienten machen. Es ist

$$\frac{W(z)}{f_v(z)} = \tilde{C}_0^{(v)} \{1 + t \mathfrak{P}(t)\}; \quad v = 0, \dots, n; \quad \frac{W(z)}{z^p f_{\infty}(z)} = \tilde{C}_0^{(\infty)} \{1 + t \mathfrak{P}(t)\},$$

wobei die Koeffizienten von $\mathfrak{P}(t)$ dem Körper

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(c_{00}, \dots, c_{\gamma_0} - 1, 0, \dots, c_{\gamma_{\infty} + 1}, \infty, a_0, \dots, a_n)$$

entnommen sind. Ferner ist, wenn wir formal setzen: $\frac{1}{z - a_{\infty}} = z$,

$$(26) \quad \mathfrak{E}^{(v)}(z, a_v) = \tilde{C}_0^{(v)} \left\{ \frac{\delta_0^{(v)}}{(z - a_v)^v} + \dots + \frac{\delta_v^{(v)}}{(z - a_v)^0} \right\} W(z); \quad v = 0, \dots, n, \infty$$

mit $\delta_1^{(v)} \in \mathfrak{k}$ und $\tilde{C}_0^{(v)} \tilde{C}_0^{(v)} = 1$.

Sei nun die Funktion $y = R(z) W(z)$ aus k_0 gegeben. $R(z)$ soll nur Koeffizienten aus dem Körper \mathfrak{k}_1 aufweisen. Bildet man nun den Erweiterungskörper

$$(27) \quad \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1),$$

so wird der effektive Hauptteil in a_v :

$$(28) \quad \tilde{C}_0^{(v)} \left\{ \frac{\delta_v^{(v)}}{(z - a_v)^v} + \dots \right\} \quad v = 0, \dots, n, \infty$$

mit $\delta_1^{(v)} \in \mathfrak{K}_0$. Des weiteren gilt die Darstellung

$$(26') \quad d \tilde{\mathfrak{P}}^{(v)}(x, a_v) = \tilde{C}_0^{(v)} \left\{ \frac{\tilde{\delta}_0^{(v)}}{(x - a_v)^{v+p}} + \dots + \frac{\tilde{\delta}_{v+p}^{(v)}}{(x - a_v)^0} \right\} \frac{dx}{W(x)}; \quad v = 0, \dots, n, \infty$$

mit $\tilde{\delta}_1^{(v)} \in \mathfrak{k}$. Damit ergibt sich speziell:

$$(29) \quad \frac{d \tilde{\mathfrak{P}}^{(v)}(x, a_v)}{dx} / \tau_{a_j}^k = \tilde{C}_0^{(v)} \tilde{C}_0^{(j)} \tilde{\delta}_{jv}^{(vk)} \quad \text{mit } \tilde{\delta}_{jv}^{(vk)} \in \mathfrak{k}.$$

²⁾ Diese Bemerkung verdanke ich einem frdl. Hinweis von Herrn Prof. H. SCHMIDT.

Schließlich kann man folgern:

$$(30) \quad \mathfrak{E}^{(j)}(z, a_j) = C_0^{(j)} \sum_{\nu=0}^n \check{C}_0^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_\nu} d_{\mu\nu}^{(j)} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu) + C_0^{(j)} \check{C}_0^{(\infty)} \sum_{\mu=0}^{\gamma_\infty} d_{\mu\infty}^{(j)} \mathfrak{E}^{(\mu+p)}(z, a_\infty)$$

mit $j = 0, \dots, n, \infty$; $d_{\mu\nu}^{(j)} \in \mathfrak{F}$.

(23_{p-2}) lautet:

$$(31) \quad 0 = \sum_{\nu=0}^n \check{C}_0^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_\nu} d_{\mu\nu} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu) + \check{C}_0^{(\infty)} \sum_{\mu=0}^{\gamma_\infty} d_{\mu\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+p)}(z, a_\infty)$$

mit $d_{\mu\nu} \in \mathfrak{F}$, $d_{\gamma_\nu, 0} \neq 0$. So erhält man aus (28) vermöge (30), (31) die reduzierte Darstellung von y :

$$(32) \quad y = R(z) W(z) = \check{C}_0^{(0)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_0-1} e_{\mu 0} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_0) + \sum_{\nu=1}^n \check{C}_0^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_\nu} e_{\mu\nu} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu) + \check{C}_0^{(\infty)} \sum_{\mu=0}^{\gamma_\infty} e_{\mu\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+p)}(z, a_\infty)$$

mit $e_{\mu\nu} \in \mathfrak{R}_0$.

Gehen wir jetzt von k_0 zu $k_{\mathfrak{B}}$ über, so haben wir noch die Elementarfunktionen für gewöhnliche Stellen zu betrachten. Setzt man

$$W(b_\lambda) = \dot{D}_\lambda \cdot W(b_\lambda) = \frac{1}{D_\lambda}$$

und ist der Erweiterungskörper

$$(27a) \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{R}_0, b_1, \dots, b_m)$$

gegeben, so wird der Hauptteil von y in b_λ von der Form:

$$(33) \quad \dot{D}_\lambda \left\{ \frac{\delta_\mu^{(1)}}{(z-b_\lambda)^\mu} + \dots + \frac{\delta_1^{(1)}}{(z-b_\lambda)} \right\} \quad \text{mit } \delta_\mu^{(1)} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$$

und ferner

$$(34) \quad \frac{d \check{\mathfrak{E}}^{(j)}(z, a_\nu)}{d\tau} / \tau_{b_\lambda}^k = \check{C}_0^{(\nu)} D_\lambda \delta_{\lambda\nu}^{(j,k)} \quad \text{mit } \delta_{\lambda\nu}^{(j,k)} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}},$$

so daß sich die reduzierte Darstellung für Funktionen aus $k_{\mathfrak{B}}$ ergibt:

$$(35) \quad y = \check{C}_0^{(0)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_0-1} e_{\mu 0} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_0) + \sum_{\nu=1}^n \check{C}_0^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\gamma_\nu} e_{\mu\nu} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu) + \check{C}_0^{(\infty)} \sum_{\mu=0}^{\gamma_\infty} e_{\mu\infty} \mathfrak{E}^{(\mu+p)}(z, a_\infty) + \sum_{\lambda=1}^m \dot{D}_\lambda d_\lambda \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_\lambda)$$

mit $e_{\mu\nu} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$, $d_\lambda \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$.

Wir fassen zusammen in

Satz 5: Sei $\mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$ ein Körper, der die Größen

$$c_{00}, \dots, c_{\gamma_\infty+1, \infty}, a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$$

enthält; sind dann die Koeffizienten von $R(z)$ diesem Körper entnommen, so gilt für die Klassenfunktion $y = R(z) W(z)$ die reduzierte Darstellung (35).

In Satz 5 kann man anstelle der Funktionen

$$\mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu), \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_\lambda)$$

auch die Funktionen

$$\check{C}_0^{(\nu)} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu), \check{D}_1 \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_1)$$

als Basis einführen. Die Elemente dieser Basis haben die Eigenschaft, daß die ihnen entsprechende rationale Funktion $R(z)$ nur Koeffizienten aus \mathfrak{K}_2 aufweist. Das führt uns dazu, aus k_0 bzw. k_2 Teilklassen auszuscheiden dadurch, daß man für die rationalen Funktionen $R(z)$ nur noch solche zuläßt, deren Koeffizienten aus einem Körper \mathfrak{K} desselben Typs wie \mathfrak{K}_2 entnommen sind. Diese Teilklassen (daß die so definierten Mengen Klassen bilden, ist trivial) nennen wir $k_0(\mathfrak{K})$ bzw. $k_2(\mathfrak{K})$. Für jede dieser Klassen kennen wir bereits eine Basis:

$$(36) \quad \check{C}_0^{(0)} \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_0), \dots, \check{C}_0^{(0)} \mathfrak{E}^{(\gamma_0-1)}(z, a_0), \check{C}_0^{(1)} \mathfrak{E}^{(1)}(z, a_1), \dots, \check{C}_0^{(n)} \mathfrak{E}^{(\gamma_n)}(z, a_n), \\ \check{C}_0^{(\infty)} \mathfrak{E}^{(p)}(z, a_\infty), \dots, \check{C}_0^{(\infty)} \mathfrak{E}^{(p+\gamma_\infty)}(z, a_\infty), \check{D}_1 \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_1), \dots, \check{D}_m \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_m).$$

Für eine beliebige Basis von $k_2(\mathfrak{K})$ gilt der

Satz 6: Zwischen je $N_2 + 1$ Funktionen von $k_2(\mathfrak{K})$ besteht eine Kongruenzabhängigkeit mit Koeffizienten aus \mathfrak{K} .

Beweis: Nach Satz 5 finden wir für die $N_2 + 1$ Funktionen y_i die reduzierte Darstellung:

$$y_i = \sum_{\mu=1}^{\gamma_0-1} e_{\mu 0}^{(i)} \check{C}_0^{(0)} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_0) + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\gamma_\nu} e_{\mu \nu}^{(i)} \check{C}_0^{(\nu)} \mathfrak{E}^{(\mu)}(z, a_\nu) + \\ + \sum_{\mu=0}^{\gamma_\infty} e_{\mu \infty}^{(i)} \check{C}_0^{(\infty)} \mathfrak{E}^{(p+\mu)}(z, a_\infty) + \sum_{\mu=1}^m e_{\mu, n+2}^{(i)} \check{D}_\mu \mathfrak{E}^{(1)}(z, b_\mu)$$

mit $e_{\mu \nu}^{(i)} \in \mathfrak{K}$. Verschwinden alle $e_{\mu \nu}^{(i)}$, dann ist nichts mehr zu beweisen. Sei also der Rang r der Matrix $(e_{\mu \nu}^{(i)})$ größer als 0. Der Rang ändert sich nicht, wenn man in die Matrix noch die Spalte

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N_2+1} \end{pmatrix}$$

einfügt. Da alle $(r+1)$ -reihigen Determinanten dieser neuen Matrix verschwinden, erhält man wenigstens eine Kongruenzabhängigkeit mit Koeffizienten aus \mathfrak{K} ; denn bei der Entwicklung jener $(r+1)$ -reihigen Determinanten, die ein Stück der eingefügten Spalte enthalten, nach den y_i können nicht alle auftretenden Koeffizienten verschwinden, weil sonst der Rang von $(e_{\mu \nu}^{(i)})$ kleiner als r sein müßte.

Damit fassen wir Satz 5 allgemeiner:

Satz 5a: Ist $\mathfrak{E}^{(1)}, \dots, \mathfrak{E}^{(N_2)}$ eine Basis von $k_2(\mathfrak{K})$, deren Elemente \mathfrak{K} entnommen sind, so gilt für jede Funktion y der Klasse die Reduktion

$$y = \sum_{\mu=1}^{N_2} e_\mu \mathfrak{E}^{(\mu)}$$

mit $e_\mu \in \mathfrak{K}$.

Die Zuordnung $y \rightarrow ydz$ zwischen Funktionen und Differentialen der Klasse k ist umkehrbar eindeutig; bei dieser Zuordnung bleiben die Begriffe kongruenzabhängig und kongruenzunabhängig erhalten. Das zeigt, daß durch die Verwendung der Differentiale auch keine stärkere Reduktion der Klasse

erzielt werden kann. Wegen Satz 4 liefert auch keines der anderen Vertauschungstheoreme eine weitergehende Reduktion. Die Zahl N_3 , die Stammzahl, ist eine Invariante der Klasse, d. h. unabhängig davon, ob man Funktionen oder Differentiale zugrunde legt und welches Vertauschungstheorem man zur Reduktion benützt.

Literaturverzeichnis.

- [1] BLISS: Algebraic Functions, New York, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 16 (1933). — [2] KÖNIG: Über Polynomsysteme, die aus der hypozykloidalen Abbildung entspringen. I. J. ang. Math. 159, 67 (1928). — [3] KÖNIG: Die Elementartheoreme bei den RIEMANNschen Transzendenten. Math. Z. 15, 26 (1922). — [4] KÖNIG: Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den RIEMANNschen Transzendenten. Math. Ann. 79, 76 (1919). — [5] KÖNIG: Die Integrale der RIEMANNschen Transzendenten. Math. Ann. 80, 1 (1921). Und die dort angegebenen Arbeiten. — [6] KÖNIG-KRAFFT: Elliptische Funktionen. Berlin-Leipzig: W. d. Gruyter 1928. — [7] KÖNIG-SCHMIDT: Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidalen Abbildung entspringen. II. J. ang. Math. 162, 69 (1930). — [8] SCHMIDT, HERMANN: Über die komplementäre Klasse bei den hypozykloidalen Funktionssystemen. Math. Z. 33, 714 (1931). — [9] SCHMIDT HERMANN: Über multiplikative Funktionen und die daraus entspringenden Differentialsysteme. Math. Ann. 105, 325 (1931).

(Eingegangen am 25. Januar 1950.)

Conditioned Disjunction as a primitive connective for the m -valued Propositional Calculus.

By
ALAN ROSE in Aberdeen.

It has been shown by POST¹⁾ that in the 2-valued Propositional Calculus the conditioned disjunction function with the same truth-table as $(X \& Y) \vee (Z \& \bar{Y})$ together with the logical constants t and f form a complete set of independent connectives. CHURCH has given a separate proof²⁾ of this together with a proof that if the conditioned disjunction function is written $[X, Y, Z]$ the dual of any expression can be obtained by writing the expression backwards and interchanging the letters t and f .

We consider here the corresponding problem for the m -valued propositional calculus³⁾. We denote the truth-values by $1, 2, \dots, m$ where 1 is the designated truth-value. We take as primitives the logical constants $1, 2, \dots, m$ together with the conditioned disjunction function $[Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y]$ which has the same truth-value as X_n when Y has the truth-value n ($n = 1, 2, \dots, m$). If we take $J_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) as the function which has the truth-value 1 when X has the truth-value i , and which has the truth-value m when X has a truth-value different from i ⁴⁾, the conditioned disjunction function has the same truth-table as $(X_1 \& J_1(Y)) \vee (X_2 \& J_2(Y)) \vee \dots \vee (X_m \& J_m(Y))$. Thus this function may be read " X_1 or X_2 or ... or X_m according as Y has the truth-value 1 or Y has the truth-value 2 or ... or Y has the truth-value m ". Y is written at both ends of the expression in order to preserve symmetry. This symmetry can be preserved by writing Y in the middle only when m is even. It will be shown that our primitives form a complete set of independent connectives. A theorem about duality will then be proved. In the case $m = 2$ this theorem reduces to the theorem proved by CHURCH⁵⁾.

We first prove functional completeness by induction on the degree of the function considered.

All functions of degree 0 can be defined in the system since all these functions are taken as primitives.

We now assume that all functions of degree n can be defined in terms of the primitives and deduce that all functions of degree $n + 1$ can be defined in terms of the primitives. Suppose that the function $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ takes the same truth-value as $\Psi_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ when X_{n+1} takes the

¹⁾ POST, EMIL L.: The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Ann. of Math. Studies, No. 5, Princeton, N.J. 1941.

²⁾ CHURCH, ALONZO: Portugal. Math. 7, 87 (1948).

³⁾ See EMIL L. POST: Amer. J. Math. 43, 163 (1921); ŁUKASIEWICZ, JAN, a. ALFRED TARSKI: C. r. Soc. Sci. Lettr. Warsaw, Cl. III, 23, 30 (1930).

⁴⁾ Cf. ROSSER, J. B., a. A. R. TURQUETTE: J. Symbol. Log. 10, 61 (1945).

⁵⁾ Op. cit.

truth-value i ($i = 1, 2, \dots, m$). Ψ_i can be defined in terms of the primitives by our induction hypothesis. Then $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ can be defined by

$$\Phi(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) = df. [X_{n+1}, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, X_{n+1}].$$

Thus the system is functionally complete.

We now consider the independence of the primitives. Conditioned disjunction cannot be defined in terms of the other primitives since these other primitives are all constants. It follows from the truth-table for conditioned disjunction that in terms of this function and the logical constants $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ ($i = 1, 2, \dots, m$) we cannot define any function which always takes the truth-value i . For, if X_1, X_2, \dots, X_m all take truth-values different from i , $[Y, X_1, X_2, \dots, X_m, Y]$ takes a truth-value different from i , and therefore any propositional function of X_1, X_2, \dots, X_i ($i = 1, 2, \dots$) takes a truth-value different from i when X_1, X_2, \dots, X_i all take truth-values different from i . Thus our primitives are independent.

We now consider the question of duality. In the 2-valued propositional calculus we can define the dual of a function $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ as follows. Let $u_i = f$ when $t_i = t$, and let $u_i = t$ when $t_i = f$. Suppose that Φ takes the truth-value $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ when, for all i , X_i takes the truth-value t_i . Then if $\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ takes the truth-value opposite to $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ when, for all i , X_i takes truth-value u_i , Ψ is said to be the dual of Φ . This definition may be generalised to an m -valued system as follows.

Suppose that $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ takes the truth-value $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ when, for all i , X_i takes the truth-value t_i , and that $\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ takes the truth-value $\psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ when, for all i , X_i takes the truth-value t_i . Then if, for all t_i ,

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = m - \psi(m - t_1 + 1, m - t_2 + 1, \dots, m - t_n + 1) + 1,$$

Ψ is said to be the dual of Φ .

Thus, since the logical constant i ($i = 1, 2, \dots, m$) always takes the truth-value i , the dual of i is $m - i + 1$.

Let the duals of $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}$ be $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m, \mathcal{D}$ respectively. It will now be shown that the dual of $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$ is $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ so that the dual of any expression can be obtained writing the expression backwards and interchanging the constants i and $m - i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

When \mathcal{B} takes the truth-value i , $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$ takes the same truth-value as \mathcal{A}_i . But when \mathcal{D} takes the truth-value $m - i + 1$, $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ takes the same truth-value as the $(m - i + 1)$ th \mathcal{C} in $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$, i. e. as \mathcal{C}_i . Thus when \mathcal{D} takes the truth-value $m - i + 1$ and \mathcal{C}_i takes the truth-value equal to the difference between $m + 1$ and the truth-value of \mathcal{A}_i , the truth-value of $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ is equal to the difference between $m + 1$ and the original truth-value of $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$. Hence, since \mathcal{C}_i is the dual of \mathcal{A}_i and \mathcal{D} is the dual of \mathcal{B} , $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m-1}, \dots, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}]$ is the dual of $[\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}]$. Hence the dual of any expression can be obtained by writing the expression backwards and interchanging the constants i and $m - i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

We note in conclusion that the ŁUKASIEWICZ-TARSKI negation function⁶⁾ can be defined by

$$\bar{\mathcal{A}} = df. [\mathcal{A}, m, m - 1, \dots, 2, 1, \mathcal{A}].$$

⁶⁾ Op. cit. This is also the second negation function, $\approx X$, of POST, see footnote ⁵⁾.

Hence, if \mathfrak{B} is the dual of \mathfrak{A} , the dual of $\bar{\mathfrak{A}}$ is

$$[\mathfrak{B}, m, m-1, \dots, 2, 1, \mathfrak{B}],$$

i. e. $\bar{\mathfrak{B}}$. Thus we have proved the following Theorem: *If \mathfrak{C} is a formula of the m -valued Propositional Calculus in which the primitive functions are conditioned disjunction and the constants $1, 2, \dots, m$, and \mathfrak{C} is written without any abbreviations other than abbreviation by means of the LUKASIEWICZ-TARSKI negation function defined as above, the dual of \mathfrak{C} can be obtained by writing the expression backwards and interchanging the constants i and $m-i+1$ ($i = 1, 2, \dots, m$).*

(Eingegangen am 29. September 1950.)

Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen RIEMANNscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden.

Von

KLAUS PÖSCHL in Karlsruhe.

1. Die RIEMANNschen Flächen mit p periodischen Enden sind seinerzeit von ULLRICH¹⁾ eingeführt worden im Hinblick auf das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Sie bilden eine Flächenklasse vom parabolischen Typus²⁾, sind nur über endlich vielen Grundpunkten a_1, a_2, \dots, a_q verzweigt und besitzen bei p Enden p logarithmische Windungspunkte. Die in $z \neq \infty$ meromorphe erzeugende Funktion einer solchen Fläche ist daher zufolge des Randstellensatzes von AHLFORS-DENJOY³⁾ mindestens vom Mitteltypus der Ordnung $p/2$. Die Wachstumsordnung kann, wie noch näher ausgeführt wird, bei besonderem asymmetrischem Aufbau der Fläche diese untere Schranke übersteigen. Ordnung, Defekte und Indizes der Erzeugenden lassen sich allein aus Daten des Streckenkomplexes berechnen; dies ist ein Ergebnis von WITTICH⁴⁾. Für die geschlossene Uniformisierung einer solchen Fläche kennt man nur Beispiele in einfachen symmetrischen Fällen, keines bisher im genannten bedeutsamsten Fall der Wachstumserhöhung gegenüber $p/2$. Um ein schlichtes Bild einer solchen Fläche zu gewinnen, das die Wertverteilung übersehen läßt, muß man zu anderen Hilfsmitteln greifen. Es handelt sich insbesondere um die Methode quasikonformer Abbildungen, gestützt auf einen von WITTICH⁵⁾ allgemein bewiesenen Verzerrungssatz, die hier zum Ziele, d. h. zu Aussagen über Ordnung, Defekte und Indizes der algebraischen Verzweigkeit, führt. Man nimmt zunächst eine Zerschneidung der Fläche in endlich viele Teile vor, die für sich uniformisiert werden, und setzt die Bilder der Teile aneinander, indem man die Randzuordnungen durch passende quasikonforme Hilfsabbildungen erzwingt. Dabei muß die Abweichung einer solchen Abbildung $\zeta \rightarrow t$ von der Konformität, gemessen durch $D_{\zeta|t} - 1$, genügend klein sein, d. h. $D_{\zeta|t}$ muß für $|\zeta| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell $\rightarrow 1$ streben, oder aber ein solches Gebiet der ζ -Ebene, in dem nicht $D_{\zeta|t} = 1$, beispielsweise von Streifenform sein, damit der erwähnte Satz anwendbar bleibt. Es werde etwa $\zeta \neq \infty$ auf $t \neq \infty$ quasikonform abgebildet. Dieser Satz verbürgt bei Konvergenz des Integrales

$$(1a) \quad \iint_{|\zeta| \geq \varrho} (D_{\zeta|t} - 1) \left[d \log \zeta \right], \quad (\varrho \geq \varrho_0),$$

¹⁾ Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N.F. 1, Nr. 9 (1936).

²⁾ WITTICH, H.: Über die konforme Abbildung einer Klasse RIEMANNscher Flächen. Math. Z. 45 (1939).

³⁾ Vgl. z. B. E. ULLRICH, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. dtsh. Math.-Ver. 46 (1936).

⁴⁾ Über eine Klasse meromorpher Funktionen. Arch. Math. 1 (1948). Diese Note stellt das Referat über eine bisher unveröffentlichte ausführliche Arbeit dar.

⁵⁾ Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. 51 (1947).

die Existenz einer endlichen positiven Zahl α , so daß

$$(1b) \quad |t| = \alpha |\zeta| (1 + \varepsilon(\zeta))$$

mit $\varepsilon(\zeta) \rightarrow 0$ für $|\zeta| \rightarrow \infty$. Dabei ist, wie üblich, unter $D_{\zeta}|t| = \frac{\text{Max} \frac{dt}{d\zeta}}{\text{Min} \frac{dt}{d\zeta}}$ der

Dilatationsquotient der Abbildung im Punkte ζ zu verstehen.

2. Der in dieser Untersuchung eingeschlagene Weg unterscheidet sich vom Vorgehen WITTICH⁶ hinsichtlich der Zerschneidung der Fläche und der notwendigen quasikonformen Hilfsabbildungen. Man geht wiederum von der Darstellung mittels des Streckenkomplexes γ aus; durch γ in der z -Ebene, die Grundpunkte a_j ($j = 1, \dots, q$) und die Zerschneidungskurve \mathfrak{C} sei die über der w -Ebene ausgebreitete Fläche \mathfrak{B} gegeben⁷). Die erzeugende Funktion ist dann nach allgemeinen Sätzen bei entsprechender Normierung eindeutig bestimmt. Der Komplex der Flächen mit p (≥ 1) periodischen Enden besteht aus einem Kern mit endlich vielen Knoten und den p Enden E_μ ($\mu = 1, \dots, p$), deren jedes eine endliche Periode besitzt, die sich in Knotenzahl und Aufbau in infinitum wiederholt. Kern und Enden sind durch an p getrennten Stellen vom Kern nach außen laufende Glieder verknüpft. Zwischen den Enden liegen die logarithmischen Elementargebiete. Von den logarithmischen Windungspunkten können mehrere oder auch alle über demselben Grundpunkt a_k liegen. Das im folgenden angewandte Zerschneidungsverfahren besteht nun darin, innerhalb der p logarithmischen Elementargebiete Schnitte zu führen, die in bestimmter Weise in den betreffenden logarithmischen Windungspunkt einlaufen und die Fläche, abgesehen von einem endlich vielblättrigen, den Kern enthaltenden Teil \mathfrak{I} , in p Teilflächen zerlegen. Dabei wird es vorteilhaft sein, gewisse elementare Abänderungen der Zerschneidungskurve \mathfrak{C} , die die Punkte a_j in der w -Ebene in Nummernfolge (mod q) verbindet, vorzunehmen; gemeint sind Abänderungen innerhalb punktfremder Kreise mit den a_j ($j = 1, \dots, q$) als Mittelpunkten — solche Kreise lassen sich wegen der Endlichkeit von q stets angeben —, die auf Flächenaufbau und Streckenkomplex ohne Einfluß sind⁸). Und zwar werden aus später ersichtlichen Gründen Teile von \mathfrak{C} in der Umgebung derjenigen a_j , über denen mindestens ein logarithmischer Windungspunkt liegt, durch Geradenstücke ersetzt. Wählt man dann die p Schnittkurven passend, so erhält man als Bilder der Flächenteile p schlichte Gebiete, die sich wenig von Halbebenen unterscheiden. Eine erste quasikonforme Abbildung führt sie dann genau in solche — etwa obere und untere Halbebenen p komplexer Hilfsebenen z_μ — über; gewisse Halbumbegrenzungen von $z_\mu = 0$ werden dabei nicht berücksichtigt. Nach Korrektur der Randpunkte auf der reellen Achse, was mittels einer zweiten quasikonformen Abbildung im Verein mit einer Streckung geschieht, lassen sich dann die einzelnen Halbebenen aneinanderfügen.

Diese Verheftung ergibt so als Bild von $(\mathfrak{B} - \mathfrak{I})$ eine aus p Halbblättern aufgebaute RIEMANNsche Fläche über einer s -Ebene, aus der eine Umgebung

⁶) Die Eigenschaften des Streckenkomplexes werden als bekannt angenommen. S. hierzu insbesondere G. ELfvING, Über eine Klasse von RIEMANNschen Flächen und ihre Uniformisierung, Acta Soc. Sci. fenn. N.S. Nr. 3 (1934), u. R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, auf welche Darstellung hinsichtlich der vorkommenden Begriffe verwiesen sei. Die Bezeichnungsweise schließt sich an WITTICH, l. c. ⁶), an.

⁷) Vgl. E. DRAPE, Über die Darstellung RIEMANNscher Flächen durch Streckenkomplexe. Dtsch. Math. 1 (1936).

des Windungspunktes $s = 0$ auszuschließen ist. Diese ist ideal-zusammenhängend, denn die Punkte ihrer beiden freien Ufer sind noch nach einer bestimmten Vorschrift zu identifizieren. Dies gelingt schließlich mit Hilfe einer geeigneten allgemeinen Potenz $s = Z^{\alpha + ib}$, wodurch man also als quasikonformes Bild von $|z| < \infty$ die punktierte Ebene $|Z| < \infty$ erhalten hat, — jeweils bis auf eine Ausnahmeumgebung des Nullpunktes. Besteht dabei die Konvergenz von

$$h(R) = \iint_{|Z| \geq R} (D_Z |s - 1|) |d \log Z|$$

bei genügend großem R , etwa $R \geq R_0$, so folgt aus dem Verzerrungssatz (1), daß für große $|z|$ Kreise $|z| = \text{const}$ nahezu wieder in Kreise $|Z| = \text{Const}$ übergehen und umgekehrt; dies erlaubt dann, Wertverteilungsaussagen von der Z -Ebene in die z -Ebene zu übertragen.

3. Für die partielle Uniformisierung geht man von folgender grundlegenden Tatsache aus^{*)}:

Jedes periodische Ende E_μ ist die „Hälfte“ eines Komplexes γ_μ , dem eine Fläche \mathfrak{F}_μ entspricht, die durch die Umkehrung von $w_\mu = R_\mu(e^z)$ auf die punktierte z_μ -Ebene abgebildet wird; R_μ bedeutet darin eine geeignete rationale Funktion. Die beiden logarithmischen Windungspunkte von \mathfrak{F}_μ liegen über verschiedenen oder dem gleichen Grundpunkt, je nachdem $R_\mu(0) \neq R_\mu(\infty)$ oder $R_\mu(0) = R_\mu(\infty)$. Grundpunkte a_k und Zerschneidungskurve \mathfrak{C} sollen für \mathfrak{B} und \mathfrak{F}_μ übereinstimmen; dabei können durchaus einige der a_k (im Höchsfalle $q - 2$) für $w_\mu = f_\mu(z_\mu)$ gewöhnliche Stellensorten sein, d. h. \mathfrak{F}_μ hat über diesen a_k lauter schlichte Blätter. Für das Folgende ist die explizite Kenntnis der Funktionen $R_\mu(u)$ nicht erforderlich ($u = e^z$); es wird nur auf ihr asymptotisches Verhalten für große $|z_\mu|$ ankommen, worüber der Komplex die nötigen Aussagen liefert.

Die Reihenfolge der Enden E_μ , beginnend mit einem beliebig gewählten E_1 , soll durch positiven Umlauf um den Kern gegeben sein. Es bezeichne $a^{(\mu)}$ den logarithmischen Windungspunkt, dem das logarithmische Elementargebiet zwischen E_μ und $E_{\mu+1}$ entspricht; $a^{(\mu)}$ liegt über einem der a_j ($j = 1, \dots, q$). Ferner werde in der z -Ebene unter jenem Ufer von E_μ das rechte verstanden, dem man bei Umlaufen des Kernes in positiver Richtung zuerst begegnet, und unter $2\omega_\mu$ bzw. $2\omega'_\mu$ die Anzahl der Glieder, aus denen das rechte bzw. linke Ufer einer Periode von E_μ besteht. Vom Streckenkomplex γ_μ der Funktionen $w_\mu = R_\mu(e^z)$, der die Periode $2\pi i$ besitzt, bilde das rechte Ufer von E_μ rechte oder linke Begrenzung, je nachdem μ ungerade oder gerade ist. Gegebenenfalls erfordert dies eine ganze lineare Transformation in der z_μ -Ebene. Aus diesen Festsetzungen folgt dann:

$$\begin{aligned} a^{(\mu-1)} &= R_\mu(\infty), & a^{(\mu)} &= R_\mu(0) & \text{für ungerades } \mu & \text{ bzw.} \\ a^{(\mu-1)} &= R_\mu(0), & a^{(\mu)} &= R_\mu(\infty) & \text{für gerades } \mu, \end{aligned}$$

und es gilt für große $|z_\mu|$ mit $\Re z_\mu > 0$ bzw. $\Re z_\mu < 0$ jedenfalls eine Entwicklung:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{w_\mu - a^{(\mu-1)}} &= d_\mu e^{(-1)^{\mu-1} \sigma_\mu z_\mu} (1 + \eta_\mu(z_\mu)), & (-1)^{\mu-1} \Re z_\mu > 0; \\ \frac{1}{w_\mu - a^{(\mu)}} &= d'_\mu e^{(-1)^\mu \sigma_\mu z_\mu} (1 + \eta'_\mu(z_\mu)), & (-1)^\mu \Re z_\mu > 0; \end{aligned} \right.$$

^{*)} Vgl. E. ULLRICH, I c. 1), H. WITTICH, I. c. 4).

für $a^{(\lambda)} = \infty$ ist w_μ statt $\frac{1}{w_\mu - a^{(\lambda)}}$ zu schreiben; σ_μ und σ'_μ sind positive ganze Zahlen, und die Funktionen $\eta_\mu(z_\mu)$, $\eta'_\mu(z_\mu)$ verschwinden wie eine Potenz von $e^{(-1)^\mu z_\mu}$ bzw. $e^{(-1)^{\mu+1} z_\mu}$ mit einem Exponenten ≥ 1 , wenn $|z_\mu|$ in der betreffenden Halbebene gegen Unendlich geht.

Die Bildkurven von \mathfrak{C} in der z_μ -Ebene begrenzen die „Fundamentalthalbbereiche“, d. h. die Gebiete, denen auf \mathfrak{F}_μ jeweils ein Halblatt \mathfrak{I} oder \mathfrak{A} entspricht.

Eine einfache geschlossene Kurve K trenne den Kern des gegebenen Komplexes γ ab. Nun werde, wie oben schon vorweggenommen, die Kurve \mathfrak{C} elementar so abgeändert, daß sie $a^{(\mu-1)}$ und $a^{(\mu)}$ unter fester Richtung passiert. Ist dies erfolgt, so nähern sich für große $|z_\mu|$ die Bilder von \mathfrak{C} Parallelen zur reellen z_μ -Achse. Um dies einzusehen, betrachten wir etwa die Umgebung von $a^{(\mu-1)}$ (für $a^{(\mu)}$ gelten die gleichen Überlegungen); dort soll nun auf \mathfrak{C} $w_\mu - a^{(\mu-1)} = \varrho e^{i\theta}$ mit festem θ gelten⁹⁾. Es folgt dann nach (2) auf \mathfrak{C} :

$$-\log \varrho - i\theta = \log d_\mu + (-1)^{\mu-1} \sigma_\mu z_\mu + \log(1 + \eta_\mu(z_\mu)),$$

oder mit $\theta + \arg d_\mu = \sigma_\mu D_\mu$:

$$(3) \quad (-1)^\mu \sigma_\mu z_\mu = \log |d_\mu \varrho + i D_\mu \sigma_\mu + \log(1 + \eta_\mu(z_\mu))|,$$

wobei das Zusatzglied mit $|z_\mu| \rightarrow \infty$ rasch verschwindet. Darin ist die Behauptung enthalten. Außerdem folgt, wenn $|z_\mu|$ auf einem dieser nunmehr festgelegten Bilder von \mathfrak{C} gegen ∞ geht, dann $w_\mu(z_\mu)$ gegen $a^{(\mu)}$ strebt; d. h. in (3) geht $\varrho \rightarrow 0$, so daß wir auch sagen können, η_μ bzw. $\log(1 + \eta_\mu)$ geht mit $\varrho \rightarrow 0$ auf \mathfrak{C} wie eine positive Potenz von ϱ gegen Null. Ferner ergibt sich nun sofort aus dem Streckenkomplex, daß $\sigma_\mu = \omega_\mu$, $\sigma'_\mu = \omega'_\mu$ zu setzen ist. Statt (2) gelten also jetzt auf \mathfrak{C} die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} \{w_\mu - a^{(\mu-1)}\}^{-1} = |d_\mu| e^{iD_\mu \omega_\mu} e^{(-1)^{\mu-1} \omega_\mu z_\mu} (1 + \eta_\mu(z_\mu)), \\ \{w_\mu - a^{(\mu)}\}^{-1} = |d'_\mu| e^{iD'_\mu \omega'_\mu} e^{(-1)^\mu \omega'_\mu z_\mu} (1 + \eta'_\mu(z_\mu)), \end{cases}$$

und zwar gelten solche Beziehungen für alle μ . Man beachte, daß das zu $a^{(\mu)}$ gehörige logarithmische Elementargebiet sowohl vom linken Ufer von E_μ wie vom rechten Ufer von $E_{\mu+1}$ begrenzt wird. In der Umgebung von $a^{(\mu)}$ auf \mathfrak{C} besteht also einerseits für w_μ die zweite der Gln. (4), andererseits für $w_{\mu+1}$ die erste dieser Gl., wenn man überall μ durch $\mu + 1$ ersetzt.

Weiter kann aber über die in den logarithmischen Elementargebieten zu führenden Schnittlinien c_μ noch geeignet verfügt werden: Sie sollen auf \mathfrak{B} stets im gleichen Halblatt auf $a^{(\mu)}$ zulaufen, d. h. in der z -Ebene keine Linie des „Graphen“¹⁰⁾ überschreiten, zumindest nicht für große $|z|$. Ja, man kann dafür von einer gewissen Entfernung vom Kern an eine dieser Linien selbst wählen, wodurch man erreicht, daß c_μ unter fester — nämlich mit der von \mathfrak{C} übereinstimmenden — Tangente auf \mathfrak{B} in den logarithmischen Windungspunkt $a^{(\mu)}$ einläuft; und zwar wird man dafür eine von einer Kernstrecke ausgehende Linie wählen, deren Ausgangspunkt vom Kern dessen dem logarithmischen Elementargebiet $a^{(\mu)}$ zugewandtes Ufer ungefähr halbiert¹¹⁾. Man kann

⁹⁾ Wird dies für alle p logarithmischen Windungspunkte $a^{(\mu)}$ durchgeführt, so gehört zu jedem a_j über dem mindestens eines der $a^{(\mu)}$ liegt, ein solches konstantes θ .

¹⁰⁾ Vgl. R. NEVANLINNA, I. c. ⁸⁾.

¹¹⁾ Zumindest verlaufe c_μ zwischen zwei solchen Linien und schmiege sich einer hinreichend stark an.

dann annehmen, den Schnitt in einem Bereich geführt zu haben, wo sich die Einflüsse der beiden benachbarten Enden $E_\mu, E_{\mu+1}$ nahezu ausgleichen. Die Skizze in Abb. 1 mag die beschriebenen Verhältnisse an einem einfachen Beispiel mit $p = 3, q = 3$ veranschaulichen. γ besteht dort aus einer „Sinusleiter“

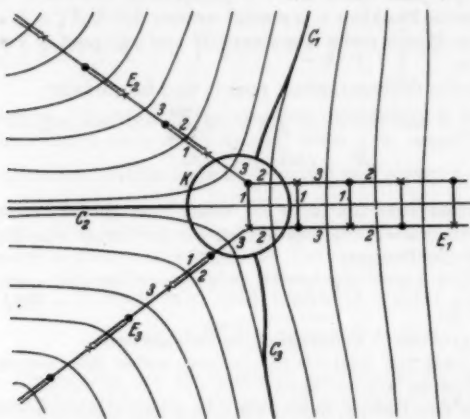


Abb. 1. Zerschneidung einer Fläche mit $p = 3$ Enden.

E_1 und zwei logarithmischen Enden E_2, E_3 ; $a^{(1)}$ und $a^{(3)}$ liegen über a_2 , $a^{(2)}$ über a_1 .

4. Der regelmäßige Aufbau der Fläche, wie er sich in der Periodizität der Enden ausdrückt, erlaubt folgende vereinfachte Definitionen¹²⁾ für Wachstumsordnung λ , Defekt $\delta(a)$ und Verzweigungsindex $\vartheta(a)$ der Stellensorte $w = a$:

$$(5) \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}, \quad \delta(a) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a)}{n(r)}, \quad \vartheta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r, a)}{n(r)}$$

mit $n(r) = \text{Max } n(r, a) = n(r, a) + 0$ (1) für alle $a \neq a_k$; $n(r, a)$ bzw. $n_1(r, a)$ bedeutet bekanntlich die Anzahl der a -Stellen in $|z| \leq r$, jede g -fache a -Stelle dabei g -mal bzw. $(g-1)$ -mal gezählt.

$\delta(a)$ und $\vartheta(a)$ können nur für $a = a_k$ ($k = 1, \dots, q$) von Null verschieden sein, und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Ordnung aller algebraischen Windungspunkte folgt aus dem Satz von COLLINGWOOD-TEICHMÜLLER¹³⁾, daß nur für diejenigen a_k der Defekt nicht verschwindet, über denen mindestens ein logarithmischer Windungspunkt liegt. Ein solcher bringt jedoch stets positiven Defekt. Unter Heranziehung der EULERSchen Polyederformel läßt sich zeigen, daß die betrachtete Flächenklasse allgemein die genaue Defektrelation

$$(6) \quad \sum_{j=1}^q \delta(a_j) + \sum_{j=1}^q \vartheta(a_j) = 2$$

erfüllt.

¹²⁾ Vgl. R. NEVANLINNA, I. c. ⁴⁾, H. WITTICH, I. c. ⁴⁾.

¹³⁾ O. TEICHMÜLLER: Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Dtsch. Math. 2 (1937).

5. Der Durchführung der Zerschneidung und Abbildung im allgemeinen Falle seien noch zwei einfache Hilfsätze, die die erforderlichen quasikonformen Transformationen betreffen, vorangestellt:

Hilfsatz 1: Es soll die Viertelebene $\Im z = y \geq 0$, $\Re z = x \geq 0$ so auf sich abgebildet werden, daß dabei $\Re z = 0$ punktweise festbleibt, während längs der reellen Achse die Punkte $z = x$ ersetzt werden durch $\Re \zeta = \xi = x + q(x) + M$ ($\zeta = \xi + i\eta$), wo M eine reelle Konstante ist und q folgenden Voraussetzungen genügt:

1. $q(x)$ ist stetig differenzierbar, positiv und beschränkt;

2. es ist $\frac{dq}{dx} \leq 0$ und für $x \rightarrow \infty$ gilt $q \rightarrow 0$, $\frac{dq}{dx} \rightarrow 0$; für $x \geq r^{(1)}$ sei

$$\frac{|M| + q(x)}{x} < 1/8, \quad \left| \frac{dq}{dx} \right| < 1/4.$$

Dann gibt es stets eine für $|z| > r^{(1)}$ überall stetig differenzierbare quasikonforme Abbildung $z \rightarrow \zeta$, die dies leistet, bei der ferner $D_{z|\zeta}$ für $|z| > r^{(1)}$ beschränkt ist und das Integral

$$h(r) = \iint_{|z| \geq r} (D_{z|\zeta} - 1) \left[d \log z \right] \text{ für } r > r^* \geq r^{(1)}, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

bei hinreichend großem r^* konvergiert, so daß also gilt:

$\zeta = \alpha |z| (1 + \varepsilon(z))$ mit $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, wobei hier wegen $q \rightarrow 0$ direkt auf $\alpha = 1$ geschlossen werden kann.

Wir erbringen den Beweis, indem wir eine solche quasikonforme Abbildung angeben; die Punkte werden dabei längs Halbstrahlen durch $z = 0$ verschoben. Die Transformation werde in der $z = \tilde{z}$ -Ebene vorgenommen ($\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} \rightarrow \tilde{\zeta} = \log \zeta = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$) und ist dort gegeben durch:

$$(7) \quad \tilde{\eta} = \tilde{y}; \quad \tilde{\xi} = \tilde{x} + \left(\log \frac{e^{\tilde{x}} + q(e^{\tilde{x}}) + M}{e^{\tilde{x}}} \right) \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} - \tilde{y}}{\frac{\pi}{2}} \right\}, \quad (0 \leq \tilde{y} \leq \frac{\pi}{2}).$$

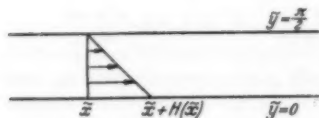


Abb. 2. Zur quasikonformen Abbildung $\tilde{z} \rightarrow \tilde{\zeta}$.

Abb. 2 deute die Verhältnisse an. Mit der Bezeichnung

$$H(\tilde{x}) = \log(e^{\tilde{x}} + q(e^{\tilde{x}}) + M) - \tilde{x}$$

erhält man für den Dilatationsquotienten die für $|z| \geq r^{(1)}$ gültige Abschätzung:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} D_{z|\zeta} &\leq D_{z|\tilde{z}} D_{\tilde{z}|\tilde{\zeta}} D_{\tilde{\zeta}|\zeta} = D_{z|\tilde{\zeta}} < 1 + \frac{4H}{\pi} + \frac{\frac{4}{\pi} H^2 - (\pi - 2\tilde{y}) \frac{dH}{d\tilde{x}}}{\pi + (\pi - 2\tilde{y}) \frac{dH}{d\tilde{x}}} \\ &< 1 + \frac{4H}{\pi} + \frac{4H^2}{\pi^2} - \frac{8}{\pi} \frac{dH}{d\tilde{x}}, \end{aligned} \right.$$

wobei zunächst $M \geq 0$ angenommen ist, was $\frac{dH}{d\tilde{x}} < 0$ zur Folge hat. Nach Voraussetzung gilt für diese z

$$\left| \frac{dH}{d\tilde{x}} \right| = \left| \frac{\frac{dq(r)}{dr} - \frac{q(r) + M}{r}}{1 + \frac{q(r) + M}{r}} \right| < 1/2, \quad \text{während } H < \frac{q(r) + M}{r},$$

($|z| = r = e^{\tilde{x}}$). Infolgedessen ist für $r^* \geq r^{(1)}$

$$(9) \quad \begin{cases} h(r^*) < \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(H + H^2 - 2 \frac{dH}{d\tilde{z}} \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ < 4 \frac{q(r^*) + M}{r^*} + 2 \int_{r^*}^{\infty} \frac{(q(r) + M)^2}{r^3} dr + 2 \int_{r^*}^{\infty} \frac{q(r) + M}{r^2} dr. \end{cases}$$

Schreibt man darin $|M|$ statt M , so ist diese Abschätzung auch für $M < 0$ gültig. Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn $q(x)$ negativ und dem Betrage nach beschränkt ist und ferner $\frac{dq(x)}{dx} \geq 0$, und wieder $q \rightarrow 0$, $\frac{dq}{dx} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Man betrachte etwa die inverse Abbildung $\zeta \rightarrow z$. Es gilt ja $D_{\zeta} z = D_z \zeta$. Und da der Satz auch gilt, wenn man zwei Transformationen der angegebenen Art nacheinander ausführt, so können die Voraussetzungen über $q(x)$ weiter gemildert werden. Wir wollen uns aber dabei nicht länger aufhalten. In allen diesen Fällen gilt:

$$(10) \quad h(r) < \frac{\text{const}}{r}, \quad (r \geq r^{(1)}).$$

Eine gewisse Umgebung des Nullpunktes wird dabei im allgemeinen von der Betrachtung ausgeschlossen. Wir können annehmen, daß außerhalb

$$\frac{|M| + |q(r)|}{r} < 1/8, \quad \left| \frac{dq(r)}{dr} \right| < 1/4$$

erfüllt ist und der Dilationsquotient somit beschränkt bleibt.

Hilfssatz 1 besagt auch: Unter den angegebenen Bedingungen für $q(e^{\tilde{x}})$ kann der Streifen $0 \leq \Im \tilde{z} \leq \pi/2$ stets so quasikonform auf sich selbst abgebildet werden, daß $\Im \tilde{z} = \pi/2$ punktweise festbleibt und längs $\Im \tilde{z} = 0$ die Punkte \tilde{x} übergehen in $\tilde{\xi} = \tilde{x} + H(\tilde{x})$, so daß

$$\iint_{\tilde{x} > \tilde{x}^*, 0 \leq \tilde{y} \leq \frac{\pi}{2}} (D_{\tilde{z}} \zeta - 1) |d\tilde{z}|^2 < \infty \text{ und } \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} (\tilde{x} - \tilde{\xi}) = \log \alpha = 0.$$

Natürlich lassen sich noch andere quasikonforme Abbildungen angeben mit den verlangten Eigenschaften.

Zum anderen führen wir ein Ergebnis von WITTICH¹⁴⁾ an, in vereinfachter Form, wie es im folgenden zur Anwendung kommt.

Hilfssatz 2: Es sei S_z ein Streifengebiet der z -Ebene, das für $x \geq x_0$ durch $0 \leq y \leq \pi/2 \cdot (1 - h(x))$ mit stetig differenzierbarem $h(x)$ gegeben ist. Es sei dabei weiter $0 \leq h(x) \leq 1$, $h'(x) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0$ und $\int_{x_0}^{\infty} h(x) dx < \infty$. Bildet man den Teil $x \geq x_0$ von S_z durch

$$(11) \quad \xi = x; \eta = \frac{y}{1 - h(x)}$$

quasikonform auf $\Re \zeta \geq x_0$, $0 \leq \eta \leq \pi/2$ ab, so gilt, wenn für alle $x \geq x_1 \geq x_0$ $h(x) \leq 1/2$, $|h'(x)| \leq 1/2$, für diese x

$$(12) \quad D_{\zeta} \zeta < 1 + 3|h(x)| + 3|h'(x)|,$$

¹⁴⁾ l. c. ⁸⁾ S. 285/86.

und die Konvergenz von $\int_{x_1}^{\infty} h(x) dx$ zieht daher diejenige von

$$\int_{x_1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (D_z|\zeta - 1) \boxed{d\zeta}$$

nach sich.

Auch dieser Satz gilt unverändert, wenn statt der obigen Voraussetzungen die folgenden stehen: $0 \geq h(x) \geq -1$, $h'(x) \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0$, $|\int_{x_0}^{\infty} h(x) dx| < \infty$.

(12) gilt dann unverändert für hinreichend große x . Ferner kann $h(x)$ aus zwei derartigen Funktionen zusammengesetzt sein.

6. Nach diesen Vorbereitungen kann die allgemeine Aufgabe in Angriff genommen werden. Die Fläche \mathfrak{B} sei gegeben durch den Komplex γ in der z -Ebene, die Grundpunkte a_j und die Zerschneidungskurve \mathfrak{C} , und an dieser seien die besprochenen elementaren Abänderungen bereits vorgenommen. Die Zahl p der Enden werde zunächst ≥ 2 vorausgesetzt. Eine Periode des Endes E_μ enthalte $2g^{(\mu)}$ Knoten, also je $g^{(\mu)}$ Innenknoten (●) und Außenknoten (×) und $j_{\mu k}$ algebraische Elementargebiete, deren $2m_{\mu k}^{(e)}$ Seiten von Gliederzügen $k, k+1$ gebildet werden (die also algebraischen Windungspunkten der Ordnung $m_{\mu k}^{(e)} - 1$ über a_k entsprechen). Dabei läuft k von 1 bis q , μ von 1 bis p und in einer Periode von E_μ α von 1 bis $j_{\mu k}$. Weiter bezeichne

$$(13) \quad g^{(\mu)}(a_k) = \sum_{\alpha=1}^{j_{\mu k}} m_{\mu k}^{(\alpha)} \quad \text{und} \quad g_1^{(\mu)}(a_k) = \sum_{\alpha=1}^{j_{\mu k}} (m_{\mu k}^{(\alpha)} - 1).$$

Nach Abtrennung des Kernes durch eine einfache geschlossene Kurve K führe man in den logarithmischen Elementargebieten $a^{(\mu)}$ die Schnitte c_μ in der oben festgelegten Weise; $c_{\mu-1}$ und c_μ trennen, zusammen mit dem ihre Anfangspunkte auf der Seite von E_μ verbindenden Teil von K , in der z -Ebene das Ende E_μ ab. Durch diese Zerschneidung ist die Fläche bis auf einen endlich-vielblättrigen Teil \mathfrak{L} in p Teilflächen zerlegt. Diese stimmen mit Teilen der \mathfrak{F}_μ überein und können jeweils durch die Umkehrung der Erzeugenden $w_\mu = R_\mu(e^{z_\mu})$ von \mathfrak{F}_μ in schlichte Gebiete G_μ der Hilfsebenen z_μ abgebildet werden. Gemäß früherer Überlegungen nähert sich dort das Bild $(c_{\mu-1})$ bzw. (c_μ) von $c_{\mu-1}$ und c_μ für große $|z_\mu|$ ($\Re z_\mu \leq 0$) asymptotisch je einer Geraden $\mathfrak{S} z_\mu = \text{const}$, nämlich $\mathfrak{S} z_\mu = D_\mu$ bzw. $\mathfrak{S} z_\mu = D'_\mu$, wo mit den Bezeichnungen von 2.

$$D_\mu = \frac{1}{\omega_\mu} (\vartheta + \arg d_\mu), \quad D'_\mu = \frac{1}{\omega'_\mu} (\vartheta' + \arg d'_\mu).$$

Im allgemeinen wird D_μ von D'_μ verschieden sein. Für die Abweichungen von diesen Geraden auf $(c_{\mu-1})$ bzw. (c_μ) gilt nach (4):

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi(x_\mu) = \mathfrak{S} z_\mu - D_\mu = \frac{1}{\omega_\mu} \log(1 + \eta_\mu(z_\mu)) \\ \text{bzw. } \varphi'(x_\mu) = \mathfrak{S} z_\mu - D'_\mu = \frac{1}{\omega'_\mu} \log(1 + \eta'_\mu(z_\mu)) \end{cases}$$

wobei $|\eta_\mu| < c e^{-\delta_\mu \Re z_\mu}$ bzw. $\eta'_\mu < c' e^{-\delta'_\mu \Re z_\mu}$, $\delta_\mu \geq 1$, $\delta'_\mu \geq 1$; $\varphi(x_\mu) \rightarrow 0$, $\frac{d\varphi(x_\mu)}{dx_\mu} \rightarrow 0$ für $x_\mu \rightarrow \infty$, und ebenso $\varphi'(x_\mu) \rightarrow 0$, $\frac{d\varphi'(x_\mu)}{dx_\mu} \rightarrow 0$ für $x_\mu \rightarrow -\infty$ ¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Dies und die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf ungerades μ ; sie modifizieren sich in naheliegender Weise, wenn μ gerade ist.

Das Vorzeichen von φ, φ' kann nicht allgemein festgelegt werden; es hängt von der Gestalt der Funktionen $R_\mu(e^{z_\mu})$ ab. Jedenfalls sind φ und $\frac{d\varphi}{dx_\mu}$ für alle $x_\mu > x_\mu^{(0)}$ von einerlei Vorzeichen, und Entsprechendes gilt für φ' und $\frac{d\varphi'}{dx_\mu}$. Die Verhältnisse mögen etwa so liegen, wie in Abb. 3 angedeutet, wo μ

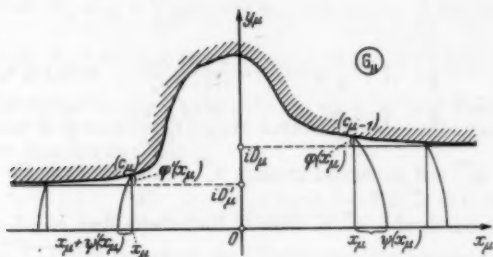


Abb. 3. Zur quasikonformen Abbildung $z_\mu \rightarrow z_\mu^*$.

ungerade angenommen ist. — Wir können dann G_μ durch eine erste quasikonforme Abbildung $z_\mu \rightarrow z_\mu^*$ in eine obere Halbebene überführen, ausschließlich einer Nullpunkts-Halbmgebung, wobei $\Re z_\mu = 0$ punktweise festbleibt. Dazu betrachten wir $\Re z_\mu > 0$ und $\Re z_\mu < 0$ getrennt, gehen zur $\log z_\mu = t_\mu$ -Ebene über ($t_\mu = u_\mu + i v_\mu$) und können dort von Hilfssatz 2 Gebrauch machen. Es handelt sich ja dann um die Abbildung von

$$g(u_\mu) \leq v_\mu \leq \frac{\pi}{2}, u_\mu > u_\mu^{(1)} \text{ auf } 0 \leq v_\mu^* \leq \frac{\pi}{2}, u_\mu^* > u_\mu^{(1)},$$

bzw. von

$$\frac{\pi}{2} \leq v_\mu \leq \pi + g'(u_\mu), u_\mu > u_\mu^{(2)} \text{ auf } \frac{\pi}{2} \leq v_\mu^* \leq \pi, u_\mu^* > u_\mu^{(2)};$$

dabei gilt für $|x_\mu| > x_\mu^{(3)}$ $|g(u_\mu)| < \frac{k_\mu}{|x_\mu|}$ und $|g'(u_\mu)| < \frac{k'_\mu}{|x_\mu|}$ mit gewissen positiven Konstanten k_μ, k'_μ , so daß $\int_{u_\mu^{(0)}}^\infty g(u_\mu) du_\mu$ und ebenso $\int_{u_\mu^{(0)}}^\infty g'(u_\mu) du_\mu$ mit entsprechend gewähltem $u_\mu^{(0)}$ sicher konvergiert. Da auch $\frac{d\varphi(x_\mu)}{dx_\mu} \rightarrow 0$ geht, so strebt $\frac{dg(u_\mu)}{du_\mu} \rightarrow 0$, und es gilt

$$\left| \frac{dg}{du_\mu} \right| < 2 \left| \frac{d\varphi}{dx_\mu} \right| + \frac{\text{const}}{|z_\mu|};$$

für große u_μ sind $g(u_\mu)$ und $\frac{dg}{du_\mu}$ stets von einerlei, und zwar entgegengesetztem Vorzeichen. Es sind dann alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt. Richten wir die Abbildung analog zur dortigen ein, setzen also:

$$(15) \quad v_\mu^* = u_\mu; \quad \begin{cases} v_\mu^* = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\frac{\pi}{2} - v_\mu}{g(u_\mu) - \frac{\pi}{2}} \right), & 0 \leq v_\mu^* \leq \frac{\pi}{2} \\ v_\mu^* = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{v_\mu - \frac{\pi}{2}}{g'(u_\mu) - \frac{\pi}{2}} \right), & \frac{\pi}{2} \leq v_\mu^* \leq \pi, \end{cases}$$

so folgt:

$$(16) \quad D_{t_\mu} t_\mu^* < \begin{cases} 1 + \frac{6}{\pi} |g(u_\mu)| + \frac{6}{\pi} \left| \frac{dg(u_\mu)}{du_\mu} \right|, & g(u_\mu) \leq v_\mu \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 + \frac{6}{\pi} |g'(u_\mu)| + \frac{6}{\pi} \left| \frac{dg'(u_\mu)}{du_\mu} \right|, & \frac{\pi}{2} \leq v_\mu \leq \pi + g'(u_\mu) \end{cases}$$

für alle $u_\mu > u_\mu^{(0)}$ mit genügend großem $u_\mu^{(0)}$. (Analoges gilt für gerades μ in einem Streifen $\pi \leq v_\mu^* \leq 2\pi$.)

Gehen wir durch $z_\mu^* = e^{i v_\mu^*}$ zu einer z_μ^* -Halbebene über, so gilt also sicher für

$$r_\mu^* \geq r_\mu^{*(0)}: \quad \iint_{|z_\mu^*| \geq r_\mu^*, 0 \leq \arg z_\mu^* \leq \pi} (D_{z_\mu} |z_\mu^*| - 1) \boxed{d \log z_\mu^*} < \infty^{16}.$$

Bei der quasikonformen Abbildung $z_\mu \rightarrow t_\mu \rightarrow t_\mu^* \rightarrow z_\mu^*$ wandern die Punkte wegen (15) auf Kreisen $|z_\mu| = \text{const}$ (vgl. Abb. 3), die also als Ganzes in sich übergehen. D. h. es gilt $|z_\mu^*| = |z_\mu|$ und ferner

$$(17) \quad \arg z_\mu^* = \arg z_\mu (1 + \varepsilon(z_\mu)),$$

wo $\varepsilon(z_\mu)$ mit $z_\mu \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Für das Spätere bemerken wir noch: Die Anzahl Fundamentalgebiete von w_μ , in die der Kreis $|z_\mu| = r$ in G_μ hereinreicht, ist nur um eine beschränkte Größe verschieden von $\frac{1}{2} n^{(\mu)}(r) = \frac{1}{2} \text{Max } n^{(\mu)}(r, a)$, wo die Anzahlfunktionen sich auf $w_\mu(z_\mu)$ beziehen.

Bei der Abbildung $z_\mu \rightarrow z_\mu^*$ werden die Realteile x_μ der auf $(c_{\mu-1})$ bzw. (c_μ) gelegenen Punkte um $\psi(x_\mu)$ bzw. $\psi'(x_\mu)$ verändert, und zwar ihrem Betrage nach vergrößert (vgl. Abb. 3). Dabei gilt nach dem Hörsatz (wieder unter der Annahme, daß μ ungerade ist):

$\psi(x_\mu)$ ($|z_\mu| = x_\mu$) $= (D_\mu + \varphi(x_\mu))^2$ bzw. $|\psi'(x_\mu)| (|z_\mu| + |x_\mu|) = (D'_\mu + \varphi'(x_\mu))^2$, und da für große $|z_\mu|$ auf $(c_{\mu-1})$ bzw. (c_μ) $x_\mu > \frac{1}{2} |z_\mu|$, so ist $\psi(x_\mu) < \frac{\text{const}}{|z_\mu|}$, $\psi'(x_\mu) < \frac{\text{const}}{|z_\mu|}$ oder auch $\psi(x_\mu) < \frac{\text{const}}{|x_\mu|}$, $|\psi'(x_\mu)| < \frac{\text{const}}{|x_\mu|}$; ferner erkennt man ohne weiteres: $\frac{d\psi(x_\mu)}{dx_\mu} \rightarrow 0$, $\frac{d\psi'(x)}{dx_\mu} \rightarrow 0$, und zwar sind diese Ableitungen wie ψ_μ und ψ'_μ selbst für große $|x_\mu|$ von einerlei Vorzeichen.

Nunmehr gilt auf $\Im z_\mu^* = 0$ zufolge (4) und den Eigenschaften der Transformation (15) (bei ungeradem μ):

$$\begin{aligned} -x_\mu^* &= \frac{1}{\omega_\mu} \log |d_\mu| \varrho + \frac{1}{\omega_\mu} \log |1 + \eta_\mu(z_\mu)| - \psi(x_\mu) & (x_\mu^* > 0); \\ x_\mu^* &= \frac{1}{\omega_\mu} \log |d'_\mu| \varrho + \frac{1}{\omega_\mu} \log |1 + \eta'_\mu(z_\mu)| + \psi'(x_\mu) & (x_\mu^* < 0). \end{aligned}$$

¹⁶⁾ Dieses Integral ist sicher $< \frac{\text{const}}{r_\mu^*}$.

Durch eine zweite quasikonforme Abbildung $z_\mu^* \rightarrow \tilde{z}_\mu$ soll erreicht werden, daß für $|\tilde{z}_\mu| > \tilde{r}_\mu^{(0)}$ gilt:

$$(18) \quad -\tilde{x}_\mu = \frac{1}{\omega_\mu} \log \varrho, \text{ wenn } \tilde{x}_\mu > 0, \text{ und } \tilde{x}_\mu = \frac{1}{\omega'_\mu} \log \varrho, \text{ wenn } \tilde{x}_\mu < 0;$$

d. h. z_μ^* soll so in \tilde{z}_μ übergeführt werden, daß

$$\text{auf } x_\mu^* > 0: \tilde{z}_\mu = z_\mu^* + \frac{1}{\omega_\mu} \log |1 + \eta_\mu| + \psi(x_\mu) + \frac{1}{\omega_\mu} \log |d_\mu|, \text{ und}$$

$$\text{auf } x_\mu^* < 0: \tilde{z}_\mu = z_\mu^* - \frac{1}{\omega'_\mu} \log |1 + \eta'_\mu| - \psi'(x_\mu) - \frac{1}{\omega'_\mu} \log |d'_\mu|.$$

Wegen der Eigenschaften der Funktionen $\eta_\mu, \eta'_\mu, \psi, \psi'$ und ihrer Ableitungen verbürgt der in 5. bewiesene Hilfssatz I die Existenz einer quasikonformen Abbildung, die dies bewirkt, mit

$$\iint_{|\tilde{z}_\mu| \geq \tilde{r}_\mu} (D\tilde{z}_\mu|_{z_\mu^*} - 1) \boxed{d \log \tilde{z}_\mu} < \frac{\text{const}}{\tilde{r}_\mu}$$

für alle $\tilde{r}_\mu > \tilde{r}_\mu^{(0)}$. Dabei wandern die Punkte auf Strahlen $\arg z_\mu^* = \text{const}$ in der oberen Halbebene, so daß neben

$$(19) \quad |\tilde{z}_\mu| = |z_\mu^*| (1 + \varepsilon(z_\mu^*)) \quad \text{gilt} \quad \arg \tilde{z}_\mu = \arg z_\mu^*,$$

wo $\varepsilon \rightarrow 0$ mit $|z_\mu^*| \rightarrow \infty$. Damit ist also insgesamt G_μ bis auf ein endliches Ausnahmegebiet übergeführt in die Halbebene $\Im \tilde{z}_\mu \geq 0$, und auf $\Im \tilde{z}_\mu = 0$ gelten die Gln. (18). Wegen (17) und (19) hat man außerdem

$$(20) \quad |\tilde{z}_\mu| = |z_\mu| (1 + \varepsilon_1(z_\mu)), \quad \arg \tilde{z}_\mu = \arg z_\mu (1 + \varepsilon_2(z_\mu)),$$

wo die Funktionen ε_j mit $|z_\mu| \rightarrow \infty$ oder $|\tilde{z}_\mu| \rightarrow \infty$ gegen Null gehen.

Diesen Prozeß denken wir uns in allen G_μ durchgeführt und können jetzt die Verheftung der Halbebenen, die jeweils längs der positiven oder negativen reellen Achse erfolgt, in Angriff nehmen. Auf $(\Re - \Im)$ stoßen die konformen Bilder von G_μ und $G_{\mu+1}$ längs c_μ zusammen. In der Umgebung von $a^{(\mu)}$ können wir darauf ϱ als Parameter ansehen. Dann sind (μ wieder ungerade angenommen) nach (18) zu identifizieren: die Punkte $\omega'_\mu \tilde{z}_\mu$ und $\omega_{\mu+1} \tilde{z}_{\mu+1}$ jeweils auf der negativ reellen Achse; d. h. derselbe Punkt der Fläche $(\Re - \Im)$ geht für kleine ϱ einmal über in $\omega'_\mu \tilde{z}_\mu$, zum anderen in $\omega_{\mu+1} \tilde{z}_{\mu+1}$. Setzt man nun nacheinander

$$(21) \quad \begin{cases} \hat{z}_1 = \tilde{z}_1, \hat{z}_2 = \frac{\omega_2}{\omega'_1} \tilde{z}_2, \hat{z}_3 = \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\omega_2}{\omega'_1} \tilde{z}_3, \dots, \\ \hat{z} = \frac{\omega_\mu}{\omega'_{\mu-1}} \frac{\omega_{\mu-1}}{\omega'_{\mu-2}} \dots \frac{\omega_2}{\omega'_1} \tilde{z}_\mu, \dots, \hat{z}_p = \frac{\omega_p}{\omega_{p-1}} \frac{\omega_{p-1}}{\omega'_{p-2}} \dots \frac{\omega_2}{\omega'_1} \tilde{z}_p, \end{cases}$$

so lassen sich die p Halbebenen $(-1)^{s+1} \Im \hat{z}_\mu > 0$ abwechselnd über die negative oder positive reelle Achse miteinander verheften. Insgesamt entsteht eine aus p Halbebenen aufgebaute RIEMANNSCHE FLÄCHE — wir denken sie uns über der $s = \sigma + i\tau$ -Ebene ausgebreitet. Sie ist ideal zusammenhängend: es sind noch auf dem letzten freien Ufer zu identifizieren die Punkte

$$s = t \quad \text{und} \quad s = A t e^{p\pi i},$$

wo

$$(22) \quad A = \frac{\omega_p \omega_{p-1} \dots \omega_2 \omega_1}{\omega'_p \omega'_{p-1} \dots \omega'_2 \omega'_1}$$

und t einen reellen Parameter bedeutet. Dazu machen wir einen Ansatz $s = Z^{a+ib} = e^{(a+ib)(\log R + i\Phi)}$, ($Z = R e^{i\Phi}$), oder $\log s = (a \log R - b \Phi) + i(b \log R + a \Phi)$. Es soll $s = \sigma Z = R e^{i\Phi}$ und $s = A \sigma e^{p\pi i} Z = R e^{i(\Phi + 2\pi)}$ gelten, d. h. $\log \sigma = a \log R - b \Phi + i(b \log R + a \Phi)$ und $\log A \sigma + p \pi i = a \log R - b(\Phi + 2\pi) + i(b \log R + a(\Phi + 2\pi))$. Daraus folgt $\log A + p \pi i = -2\pi b + i 2\pi a$, somit $a = p/2$, $b = -\frac{\log A}{2\pi}$ und

$$(23) \quad s = Z^{\frac{p}{2}} \left(1 - i \frac{2 \log A}{2\pi}\right)$$

Damit ist also $(\mathfrak{B} - \mathfrak{X})$ in die punktierte Z -Ebene übergeführt bis auf eine Umgebung von $Z = 0$; diese komme ganz innerhalb $|Z| < R_0$ zu liegen.

Weiter folgt nun leicht die Konvergenz von

$$h(R) = \iint_{|Z| \geq R} (D_Z |s| - 1) \boxed{d \log Z} \quad \text{für } R \geq R^{(1)},$$

wenn nur $R^{(1)}$ genügend groß genommen wird. Man beachte hierzu, daß

$$D_{Z|s} \leq D_{z_\mu} |z_\mu| \quad \text{und} \quad \boxed{d \log s} = \beta \left(\frac{p}{2}\right)^2 \boxed{d \log Z}, \quad \text{wo } \beta = 1 + \left(\frac{2 \log A}{p 2\pi}\right)^2,$$

und daher

$$(24) \quad h(R) \leq \frac{4}{\beta p^2} \sum_{\mu=1}^p \iint (D_{z_\mu} |z_\mu| - 1) \boxed{d \log z_\mu}$$

ist; die Integrale unter der Summe sind über die Bilder von $|Z| \geq R$ in den Halbebenen $(-1)^{\mu+1} \Im z_\mu \geq 0$ zu erstrecken. Diese liegen aber ganz außerhalb gewisser Halbkreise (vgl. die folgende Betrachtung unter 7.), so daß wegen (16) und (19) diese Integrale für hinreichend großes $R^{(1)}$ sämtlich endlich sind, und damit auch $h(R)$; es bleibt sogar sicher

$$(24a) \quad h(R) < \frac{\text{const}}{R^{\beta p/2}}.$$

Dies erlaubt wieder die Folgerung:

$$(24b) \quad |z| = \alpha |Z| (1 + \varepsilon(Z)) \quad \text{mit} \quad \lim_{Z \rightarrow \infty} \varepsilon(Z) = 0$$

und endlichem positivem α .

7. Einem Kreis $|Z| = R > R_0$ entspricht über s das Stück zwischen $R^{\beta p/2}$ und $A \cdot R^{\beta p/2} e^{p\pi i}$ der logarithmischen Spiralen, die $s = 0$ als asymptotischen Punkt besitzt; es wird dabei $s = 0$ im positiven Sinne umlaufen. Für die Schnittpunkte mit den Geraden

$$\arg s = (2\mu - 1) \frac{\pi}{2}, (\mu = 1, \dots, p) \quad \text{gilt} \quad |s| = A^{(2\mu-1)/2p} \cdot R^{\beta p/2}.$$

Beachtet man, daß beim Übergang $\tilde{z}_\mu \leftrightarrow z_\mu$ $\Re z_\mu = 0$ punktweise festbleibt, so findet man, daß diesen Punkten in den z_μ -Ebenen die folgenden entsprechen:

$$(25) \quad \begin{cases} z_1 = B e_1 R^{\beta p/2} i, z_2 = -B e_2 R^{\beta p/2} i, \dots, z_\mu = (-1)^{\mu+1} B e_\mu R^{\beta p/2} i, \dots, \\ z_p = (-1)^{p+1} B e_p R^{\beta p/2} i \end{cases}$$

mit den folgenden neben $A = \prod_{\mu=1}^p \frac{\omega_\mu}{\omega_\mu'}$ eingeführten Definitionen:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_\mu = \frac{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{\mu-1}}{\omega'_1 \omega'_2 \cdots \omega'_{\mu-1}}, \mu = 2, 3, \dots, p; A_1 = 1, A_{p+1} = A; \\ e_\mu = \frac{A^{\mu/p}}{A_\mu \omega_\mu}; B = \omega_1 A^{1/2 p}. \end{array} \right.$$

Die Punkte (25) bestimmen bis auf eine beschränkte Größe die Anzahl Fundamentalgebiete, in die das quasikonforme Bild von $R_0 \leq |Z| \leq R$ in der z_μ -Ebene hereinreicht.

Aus dem Streckenkomplex γ_μ lassen sich zunächst die Anzahlfunktionen für die w_μ ablesen in der Form:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} n^{(\mu)}(r) = \frac{g^{(\mu)}(r)}{\pi} (1 + \varepsilon^{(\mu)}(r)); \\ n^{(\mu)}(r, a) = n^{(\mu)}(r, a) + 0(1), a \neq a_j; \\ n^{(\mu)}(r, a_k) = \frac{g^{(\mu)}(a_k)}{\pi} (1 + \varepsilon_k^{(\mu)}(r)); \\ n_1^{(\mu)}(r, a_k) = \frac{g_1^{(\mu)}(a_k)}{\pi} (1 + \varepsilon_{k1}^{(\mu)}(r)), \end{array} \right.$$

wo alle Funktionen $\varepsilon(r)$ mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null gehen.

Daneben werden in der Z -Ebene für $|Z| > R_0$ die Größen $v(R, a)$, $v_1(R, a)$ eingeführt, die die Anzahl der in den Kreisring $R_0 \leq |Z| \leq R$ fallenden Bilder von Punkten der Fläche $(\mathfrak{B} - \mathfrak{Z})$ über $w = a$ bedeuten; dabei ist wie üblich jede g -fache Stelle g -mal bzw. $(g-1)$ -mal zu zählen, und es sei wieder $v(R) = \max v(R, a)$. Dann folgt aus (25) und (27), indem man die Beiträge der p Gebiete zusammenfaßt, auf die sich das Bild von $R_0 \leq |Z| \leq R$ in den p Ebenen z_μ verteilt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(R) = \frac{B}{2\pi} \left(\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} e_\mu \right) R^{\beta p/2} + 0(1); \\ v(R, a) = v(R, a) + 0(1), a \neq a_j; \\ v(R, a_k) = \frac{B}{2\pi} \left(\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)}(a_k) e_\mu \right) R^{\beta p/2} + 0(1); \\ v_1(R, a_k) = \frac{B}{2\pi} \left(\sum_{\mu=1}^p g_1^{(\mu)}(a_k) e_\mu \right) R^{\beta p/2} + 0(1). \end{array} \right.$$

Der Verzerrungssatz (24) erlaubt schließlich, in die z -Ebene überzugehen, was auf die Beziehungen

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} n(r) = C r^\lambda (1 + \varepsilon(r)) \left(\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} e_\mu \right); \\ n(r, a) = n(r, a) + 0(1), a \neq a_j; \\ n(r, a_k) = C r^\lambda (1 + \varepsilon(r)) \left(\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)}(a_k) e_\mu \right); \\ n_1(r, a_k) = C r^\lambda (1 + \varepsilon(r)) \left(\sum_{\mu=1}^p g_1^{(\mu)}(a_k) e_\mu \right) \end{array} \right.$$

führt, wobei

$$(30) \quad C = \frac{B}{2\pi} \alpha^{-\beta p/2} (0 < C < \infty)$$

ist und $\varepsilon(r)$ jeweils irgendeine Funktion bezeichnet, die $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$ erfüllt.

Schließlich gewinnt man so das Ergebnis:

$$(31a) \quad \lambda = \beta \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} \left(\frac{\log A}{2\pi} \right)^2$$

$$(31b) \quad \delta(a_k) = 1 - \frac{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)}(a_k) e_\mu}{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} e_\mu}; \quad \vartheta(a_k) = \frac{\sum_{\mu=1}^p g_1^{(\mu)}(a_k) e_\mu}{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} e_\mu}.$$

Die Erzeugende ist also stets vom Mitteltypus der betreffenden Ordnung $1/\lambda \cdot C \sum_1^p g^{(\mu)} e_\mu = S$ ist der numerische Wert des Typus; der in C eingehende numerische Wert der Konstanten α des Verzerrungssatzes ist allerdings nicht bekannt. — Die Gln. (29) und (31) enthalten das Ergebnis von WITTICH¹⁷⁾. Da die A_μ rational, die e_μ algebraische Zahlen sind, sind auch allgemein die Defekte und Verzweigungsindizes bei der betrachteten Flächenklasse algebraische Zahlen einer bestimmten Bauart: Für eine Fläche mit der zugehörigen Größe A gehören sie einem Körper an, der aus dem rationalen Zahlkörper durch Adjunktion von $\sqrt[p]{A}$ entsteht (vgl. etwa das Beispiel unter 10. c). Man kann daraus schließen, daß das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre außer für rationale Werte nur in besonderen Fällen für algebraische Zahlen als vorgegebene $\delta(a_k)$ und $\vartheta(a_k)$ durch Flächen der betrachteten Klasse bzw. ihre Erzeugenden gelöst werden kann. Für $A = 1$ sind Defekte und Indizes rational.

Im Falle $A \neq 1$, d. h. bei asymmetrischem Aufbau der Enden — sofern sich die Asymmetrie nicht im Ganzen aufhebt, wie es im letzten der zum Schluß angeführten Beispiele der Fall ist — erhöht sich nun die Wachstumsordnung der Erzeugenden gegenüber der unteren Schranke $p/2$. Das betreffende Mitglied der Flächenklasse wird so durch den Wert von A charakterisiert.

8. Von den Gln. (31) gelangt man leicht zur genauen Defektrelation (6). Man denke sich aus dem Ende E_μ eine Periode herausgetrennt, topologisch auf eine untere Halbkugel abgebildet und durch Spiegelung an der Äquatorebene zu einem geschlossenen Komplex ergänzt¹⁸⁾. Man erhält so eine Polygoneinteilung der Kugeloberfläche, für die sich der EULERSche Polyedersatz

$$E + F - K = 2$$

anwenden läßt. Hier ist die Zahl der Ecken $E = 4 g^{(\mu)}$, die der Flächen

$F = 2 \sum_{k=1}^q j_{\mu k} + 2$ und die der Kanten schließlich

$$\begin{aligned} K &= 2 \sum_{k=1}^q \sum_{s=1}^{j_{\mu k}} m_{\mu k}^{(s)} + 2 \sum_{k=1}^q (g^{(\mu)} - g^{(\mu)}(a_k)) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^q j_{\mu k} + 2 \sum_{k=1}^q g_1^{(\mu)}(a_k) + 2 \sum_{k=1}^q (g^{(\mu)} - g^{(\mu)}(a_k)). \end{aligned}$$

Die letzte Summe rührt von den Ufern des Endes E_μ her und hat nur ein oder zwei von Null verschiedene Glieder. Somit:

$$(32) \quad \sum_{k=1}^q g_1^{(\mu)}(a_k) + \sum_{k=1}^q (g^{(\mu)} - g^{(\mu)}(a_k)) = 2 g^{(\mu)}.$$

¹⁷⁾ l. c. ⁴⁾, Gln. (3) bis (8); die Definition der Größen A_μ , A , e_μ ist hier berichtigt.

¹⁸⁾ Vgl. R. NEVANLINNA, G. ELFWING, l. c. ⁶⁾.

Multipliziert man jetzt mit e_μ , summiert über μ und summiert andererseits alle 2 q Gln. (31 b) auf, so erhält man (6) bzw. die Aussage des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre für die Klasse der Flächen mit endlich vielen periodischen Enden.

9. Es bleibt noch kurz etwas zu sagen über den Fall, daß die Zahl der Enden $p = 1$ ist. Für diesen sind, wie gleich dargelegt wird, die obigen Ergebnisse unverändert gültig. Seien $\omega, \omega', A = \frac{\omega}{\omega'}, g, g(a_k), g_1(a_k)$ die entsprechenden auf das eine Ende bezüglichen Größen. Der logarithmische Windungspunkt liege über a_1 . Die Defektrelation reduziert sich dann auf

$$\delta(a_1) + \sum_{k=1}^q \theta(a_k) = 2.$$

Der Kern wird wieder durch eine Kurve K abgetrennt, die Zerschneidungskurve \mathfrak{C} in der w -Ebene in der Umgebung von a_1 durch ein Geradenstück ersetzt und die Schnittkurve c nun längs eines Bildes von \mathfrak{C} in der z -Ebene geführt, das vom Kern ausgeht (vgl. Abb. 4). K kann als Kreis um $z = 0$

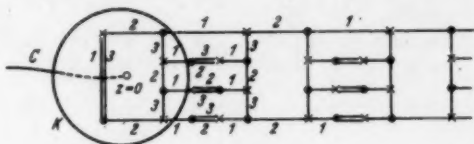


Abb. 4. Beispiel einer Fläche \mathfrak{W} mit $p = 1, \lambda > \frac{1}{2}$

angenommen werden. Man denke sich c bis $z = 0$ fortgesetzt und wende auf die so zerschnittene Ebene die Quadratwurzel an. Es entsteht ein von den beiden Bildern c^* von c und dem halben Kreis K^* begrenztes schlichtes, sich nach ∞ erstreckendes Gebiet, in dem derselbe periodische Streckenkomplex zu denken ist. (Man beachte, daß er nur topologisches Bild einer RIEMANNschen Fläche ist.) Dieses Gebiet kann nun auf dem Wege über \mathfrak{B} und \mathfrak{F} mittels einer Funktion $w_1 = R(e^z)$ und anschließender quasikonformer Abbildungen auf eine obere \tilde{z} -Halbebene abgebildet werden, und zwar so, daß für $|\tilde{x}| > \tilde{x}^{(0)}$

$$\text{auf } \tilde{x} > 0 \quad \tilde{z} = \frac{1}{\omega} \log \varrho \quad \text{und auf } \tilde{x} < 0 \quad \tilde{z} = \frac{1}{\omega'} \log \varrho,$$

wo $\varrho = |w - a_1|$ auf c in dem betreffenden Blatt von $(\mathfrak{B} - \mathfrak{I})$ ist. Für die linke bzw. rechte z_1 -Halbebene läßt sich ja wieder eine asymptotische Beziehung nach Art von (2) ansetzen:

$$\frac{1}{w_1 - a_1} = d_1 e^{-\omega z_1} (1 + \eta(z_1)), \text{ bzw. } \frac{1}{w_1 - a_1} = d'_1 e^{+\omega' z_1} (1 + \eta'(z_1)).$$

Für $|\Re \tilde{z}| > x'_0, x'_0$ hinreichend groß, sind dann zu identifizieren die Punkte

$\tilde{z} = t$ und $\tilde{z} = A t e^{\pi i}$. Dies wird von $\tilde{z} = Z^{\frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} \log A}$ geleistet. Wieder liegt jetzt eine quasikonforme Abbildung $z \rightarrow Z$ vor, die den geforderten Bedingungen genügt. Man findet, analog zum allgemeinen Falle,

$$\lambda = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{\log A}{2\pi} \right)^2, \quad \delta(a_1) = 1 - \frac{g(a_1)}{g}, \quad \theta(a_k) = \frac{g_1(a_k)}{g}.$$

Defekte und Indizes sind also stets rational, was auch daraus folgt, daß sie mit denen einer Funktion $R(c^s)$ übereinstimmen, jener nämlich, zu der man durch Verlängern des einen periodischen Endes auch nach der anderen Seite hin gelangt.

Man hätte hier bei $p = 1$ — läßt man den Kern außer Betracht — auch ausgehen können von einem Komplex mit zwei periodischen Enden, von denen das zweite entsteht durch Spiegelung des ersten. Eine der Halbebenen, in die die Ebene durch die Spiegelachse zerfällt, bildet man durch das Quadrat auf die volle z -Ebene ab, erhält dort einen Komplex mit dem gegebenen periodischen Ende, der dann noch mit einem geeigneten Kern versehen werden kann, und gefängt auch so zu den Beziehungen (33).

10. Beispiele.

a) Für die zu Abb. 1 gehörige Fläche folgt sofort aus dem Streckenkomplex: $\lambda = \frac{3}{2}$, $\delta(a_2) = 1$, $\delta(a_1) = 0$, $\vartheta(a_2) = 0$; ferner findet man: $\delta(a_3) = \frac{1}{2}$, $\vartheta(a_1) = \vartheta(a_3) = \frac{1}{4}$.

b) Im Falle der Abb. 4 hat man $p = 1$, $q = 3$, $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{(\log 2)^2}{2\pi^2} = 0,5243 \dots$;

$$\delta(a_1) = \frac{3}{4}, \vartheta(a_1) = \vartheta(a_2) = \frac{3}{4}, \vartheta(a_3) = \frac{5}{4}.$$

c) Für den Streckenkomplex in Abb. 5 sei die Berechnung näher ausgeführt. Hier ist $q = 4$, $p = 5$, zwei der Enden sind logarithmisch.

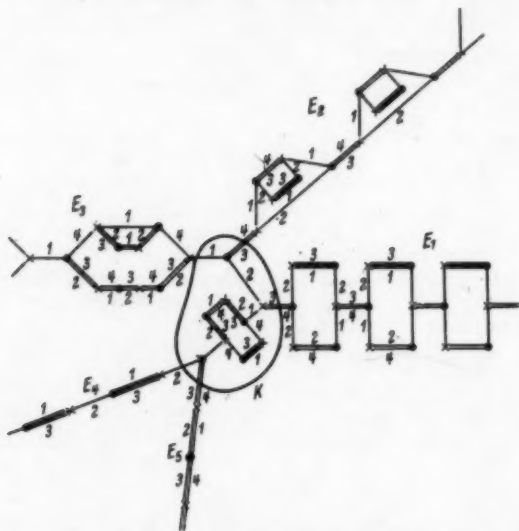


Abb. 5. Streckenkomplex zu einer Fläche \mathfrak{S} mit $\lambda > \frac{p}{2}$ ($p = 5$).

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega'_1 = 1, \omega_2 = 1, \omega'_2 = 2, \omega_3 = 2, \omega'_3 = 3, \omega_4 = \omega'_4 = \omega_5 = \omega'_5 = 1; \\ A_1 = A_2 = 1, A_3 = \frac{1}{2}, A_4 = A_5 = \frac{1}{4}, A = \frac{1}{4}; g^{(1)} = 3, g^{(2)} = 3, g^{(3)} = 5, g^{(4)} = 1, \\ g^{(5)} = 1; e_1 = \frac{1}{3^{1/4}}, e_2 = \frac{1}{3^{1/4}}, e_3 = \frac{1}{3^{1/4}}, e_4 = \frac{3}{3^{1/4}}, e_5 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(a_1) &= 3, g^{(1)}(a_2) = 1, g^{(1)}(a_3) = 3, g^{(1)}(a_4) = 1; \\
g^{(2)}(a_1) &= 3, g^{(2)}(a_2) = 2, g^{(2)}(a_3) = 3, g^{(2)}(a_4) = 1; \\
g^{(3)}(a_1) &= 2, g^{(3)}(a_2) = 5, g^{(3)}(a_3) = 5, g^{(3)}(a_4) = 3; \\
g^{(4)}(a_1) &= 0, g^{(4)}(a_2) = 0, g^{(4)}(a_3) = 1, g^{(4)}(a_4) = 1; \\
g^{(5)}(a_1) &= 1, g^{(5)}(a_2) = 0, g^{(5)}(a_3) = 1, g^{(5)}(a_4) = 0; \\
g^{(1)}(a_1) &= 2, g^{(1)}(a_2) = g^{(1)}(a_3) = g^{(1)}(a_4) = 0; \\
g^{(2)}(a_1) &= 2, g^{(2)}(a_2) = 1, g^{(2)}(a_3) = g^{(2)}(a_4) = 0; \\
g^{(3)}(a_1) &= 1, g^{(3)}(a_2) = 4, g^{(3)}(a_3) = g^{(3)}(a_4) = 0; \\
g^{(4)}_i(a_k) &= g^{(5)}_i(a_k) = 0, k = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\lambda = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} \left(\frac{\log 3}{2\pi} \right)^2 = 2,5122 \dots$

$$\delta(a_1) = \frac{1}{N} (3 \sqrt[5]{9} + 3 \sqrt[5]{3}), \delta(a_2) = \frac{1}{N} (2 \sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + 3 \sqrt[5]{3} + 3), \delta(a_3) = 0,$$

$$\delta(a_4) = \frac{1}{N} (2 \sqrt[5]{81} + 2 \sqrt[5]{27} + 2 \sqrt[5]{9} + 3)$$

$$\text{mit } N = 3 \sqrt[5]{81} + 3 \sqrt[5]{27} + 5 \sqrt[5]{9} + 3 \sqrt[5]{3} + 3 = 3 \sum_{\mu=1}^5 g^{(\mu)} e_{\mu};$$

$$\vartheta(a_1) = \frac{1}{N} (2 \sqrt[5]{81} + 2 \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9}), \vartheta(a_2) = \frac{\sqrt[5]{27}}{N}, \vartheta(a_3) = \frac{4 \sqrt[5]{9}}{N}, \vartheta(a_4) = 0.$$

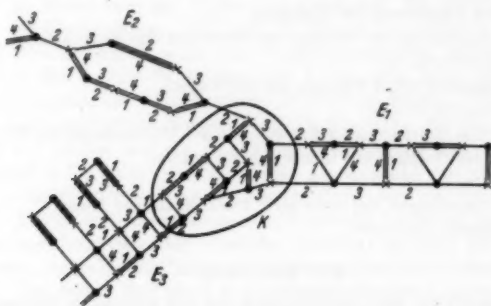


Abb. 6. Streckenkomplex zu einer Fläche \mathbb{W} mit $\lambda = \frac{p}{2}$ ($p = 3$).

d) Schließlich gehören zu dem Komplex in Abb. 6 die Werte:

$$\lambda = \frac{p}{2} = \frac{3}{2}; \delta(a_1) = \delta(a_2) = \frac{1}{11}, \delta(a_3) = \delta(a_4) = 0; \vartheta(a_1) = \frac{1}{11}, \vartheta(a_2) = \frac{1}{11},$$

$$\vartheta(a_3) = \frac{4}{11}, \vartheta(a_4) = \frac{1}{11}.$$

In allen Fällen bestätigt man die Defektrelation (6).

(Eingegangen am 30. August 1950.)

Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?

Von

K. SCHÜTTE in Marburg/Lahn und B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Inhaltsübersicht.

- § 1. Einleitung.
- § 2. Fünf und sechs Punkte.
- § 3. Der Existenzsatz.
- § 4. Der Graph.
- § 5. Abbau eines Graphen.
- § 6. Polygone irreduzibler Graphen.
- § 7. Eine Lagerung von 7 Punkten auf der Kugel.
- § 8. Die Minimalkugel für $N = 7$.
- § 9. Konkave Funktionen bei Rhomben.
- § 10. Eine Ungleichung für Graphen aus Dreiecken und Vierecken.
- § 11. Der Fall $N = 8$.
- § 12. Eine Lagerung von 9 Punkten auf der Kugel.
- § 13. Hilfsätze für $N = 9$.
- § 14. Irreduzible Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$.
- § 15. Irreduzible Graphen mit weniger als 9 Punkten.
- § 16. Die Minimalkugel für $N = 9$.
- § 17. Einige Lagerungen von mehr als 9 Punkten auf der Kugel.
- § 18. Tabellarische Übersicht.

§ 1. Einleitung.

L. FEJES TÓTH¹⁾ hat eine Abschätzung für den kürzesten Abstand δ zweier Punkte eines auf der Kugelfläche liegenden Punktsystems angegeben. Sie lautet für N Punkte auf einer Kugel mit Radius r :

$$(A) \quad \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \leq 4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{N}{N-2} \frac{\pi}{6}.$$

Auf anderem Wege haben HABICHT und v. D. WAERDEN²⁾ dieselbe Ungleichung abgeleitet. Sie bedeutet geometrisch: Ist der Mindestabstand δ gegeben, und beschreibt man mit δ als Sehne der drei Seiten ein gleichseitiges Dreieck auf der Kugel, so muß der Winkel α dieses Dreiecks mindestens $\frac{N}{N-2} \cdot 60^\circ$ betragen. Oder, was damit gleichbedeutend ist: der Flächeninhalt Δ dieses Dreiecks darf nicht größer sein als der $(2N-4)$ -te Teil der Kugelfläche.

Das Gleichheitszeichen in (A) gilt nur für $N = 3, 4, 6$ und 12, da man nur in diesen Fällen die Kugelfläche in $(2N-4)$ gleichseitige sphärische Dreiecke

¹⁾ L. FEJES TÓTH, Jber. dtach. Math.-Ver. 53, 66 (1934).

²⁾ Die Arbeit von HABICHT und v. D. WAERDEN erscheint im selben Band dieser Annalen.

einteilen kann. In allen anderen Fällen muß, bei gegebenem Mindestabstand δ , der Radius r noch größer sein als nach (A). Es fragt sich, wie groß.

Diese Frage soll hier für $N = 5, 7, 8$ und 9 beantwortet werden. Dabei soll δ zu 1 normiert werden. Für $N = 10, 11, 13, 14, 15, 16, 24$ und 32 werden wir mögliche Werte von r angeben, die vermutlich die kleinstmöglichen sind.

Diese Arbeit ist folgendermaßen entstanden. Im Mai 1950 hat v. D. WAERDEN in einem Vortrag in Göttingen die Ergebnisse von HABICHT und v. D. WAERDEN auseinandergesetzt und außerdem bewiesen, daß auf einer Kugel, auf der 5 Punkte im gegebenen Mindestabstand Platz haben, auch 6 solche Punkte Platz finden, nämlich in den Eckpunkten eines Oktaeders. Dieses Ergebnis erwähnt auch FEJES TÓTH, auf dessen Arbeit wir später aufmerksam gemacht wurden.

Durch diesen Vortrag angeregt, hat SCHÜTTE die Minimalkugel für $N = 7$ bestimmt. Dazu waren außer den Rechnungen, die man in § 8 finden wird, recht komplizierte Fallunterscheidungen nötig. VAN DER WAERDEN hat dann die Sätze von § 5 gefunden, die es gestatten, fast ohne Fallunterscheidungen auszukommen.

Schon HABICHT hatte den Graphen herangezogen, der entsteht, indem man auf der Kugel diejenigen Punktepaaire verbindet, die genau den Abstand 1 haben. Für den Fall, daß dieser Graph nur aus Dreiecken und Vierecken besteht, fand v. D. WAERDEN mit Hilfe von konkaven Funktionen (§ 9) eine Verschärfung der Ungleichung A (§ 10). In dieser verschärften Ungleichung kann nur für $N = 8$ und $N = 24$ das Gleichheitszeichen gelten, und zwar nur dann, wenn die 8 oder 24 Punkte die Eckpunkte eines von Dreiecken und Vierecken begrenzten halbbregulären Polyeders bilden. Nun gelang es SCHÜTTE, für genügend kleine Kugelradien die Fünfecke, Sechsecke usw. auszuschließen (§ 6). Damit war für $N = 8$ das halbbreguläre Polyeder als Minimalfigur erkannt (§ 11). Für $N = 24$ können wir dasselbe nur vermuten.

Für $N = 9$ hat SCHÜTTE zunächst durch Probieren die Minimalfigur gefunden (§ 12). Auf Grund eines Satzes über Fünfecke konnte er auch beweisen, daß entweder nur Dreiecke und Vierecke vorkommen oder ein Punkt sich von den anderen „wegschieben“ läßt, so daß seine Abstände zu den anderen > 1 werden (§ 13). Im ersten Fall fand er 2 mögliche Graphen (§ 14), im zweiten Fall nur einen (§ 15). So blieben 3 Graphen übrig, darunter die vermutete Minimalfigur. Bei den zwei anderen war noch ein Winkel verfügbar. Durch Variieren dieses Winkels gelang es uns unter Verwendung einiger Sätze über konvexe Funktionen, den Radius zu verkleinern (§ 16). So blieb schließlich nur die in § 12 gefundene, in Fig. 24 dargestellte Möglichkeit übrig.

Für $N = 10, 13, 14, 15, 16$ hat SCHÜTTE, für $N = 11, 24$ und 32 v. D. WAERDEN die vermutlichen Minimalfiguren gefunden. Es ist uns aber nicht gelungen, zu beweisen, daß die Radien wirklich minimal sind.

Der Verlauf von d^2 als Funktion von N ist in Fig. 62 dargestellt, wobei $d = 2r$ den Kugeldurchmesser bedeutet.

§ 2. Fünf und sechs Punkte.

Es mögen 5 Punkte in Abständen ≥ 1 auf einer Kugel liegen. Verbindet man drei von ihnen durch kürzeste Bogen, so erhält man ein sphärisches Dreieck ABC , in dem der Cosinussatz gilt:

$$\cos c = \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Gesetzt nun, der Durchmesser d wäre kleiner als $\sqrt{2}$. Da der Abstand AB mindestens 1 beträgt, so ist AB größer als die Sehne eines Bogens von 90° , also ist $a > 90^\circ$, und das gleiche gilt von b und c . Die drei Cosinusse linker Hand sind also negativ, also ist die linke Seite negativ, also auch die rechte. Mithin muß ein Faktor rechts negativ sein, und da $\sin a$ und $\sin b$ es nicht sein können, so folgt $\cos \gamma < 0$, also

$$\gamma > 90^\circ.$$

Dasselbe gilt von allen Winkeln der sphärischen Dreiecke, die man aus je drei von den 5 Punkten bilden kann.

Verbindet man nun einen von den 5 Punkten, etwa C , mit allen 4 anderen, so erhält man bei C vier stumpfe Winkel, also mehr als 360° , was nicht geht.

Also muß der Kegdurchmesser d mindestens $\sqrt{2}$ betragen. Ist das aber der Fall, so haben gleich 6 Punkte auf der Kugel Platz, nämlich die 6 Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

§ 3. Der Existenzsatz.

Satz 1: Es gibt für jedes N eine kleinste Kugel, auf der N Punkte in Abständen ≥ 1 Platz haben.

Beweis: Es sei R der Radius einer Kugel, auf der N Punkte sicher Platz haben. Jede Figur von N Punkten auf einer Kugel vom Radius $r \leq R$ ist dann bestimmt durch $2N + 1$ Koordinaten, nämlich durch r und je zwei Polarkoordinaten θ_k, φ_k für jeden der N Punkte. Diese $2N + 1$ Koordinaten sind alle beschränkt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \theta_k \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi_k \leq 2\pi \end{aligned}$$

und außerdem durch Ungleichungen wie

$$(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2 \geq 1$$

verknüpft, wo

$$x_k = r \sin \theta_k \cos \varphi_k$$

usw. die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte sind. Da in allen diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen zugelassen ist, definieren sie eine abgeschlossene Menge im $(2N + 1)$ -dimensionalen Raum der Koordinaten r, θ_k, φ_k .

Auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge hat eine stetige Funktion der Koordinaten immer ein Minimum. Also hat der Radius r ein Minimum, q. e. d.

Außer dem absoluten, d. h. kleinsten Minimum kann es noch relative Minima geben, d. h. solche Figuren, bei denen der Radius sich durch kleine Änderungen der Lage der Punkte nicht verkleinern läßt. Wir wollen solche Figuren *relative Minimalfiguren* nennen, die Kugeln *relative Minimalkugeln*. Unter der *Minimalkugel* schlechthin verstehen wir aber die kleinste Kugel, auf der N Punkte ohne gegenseitige Störung Platz haben.

§ 4. Der Graph.

Sind auf einer Kugel mit Radius r irgendwie N Punkte mit Mindestabstand 1 gegeben, so können wir immer die Punktepaare, deren Abstände genau 1 sind, durch kleinste Großkreisbögen verbinden. Es entsteht ein

Graph. Dieser braucht nicht zusammenzuhängen. Die Anzahl der Verbindungsstrecken, die in einem Punkt zusammenstoßen, bezeichnen wir als den *Grad* des betreffenden Punktes.

Satz 2: Die Strecken des Graphen überschneiden sich nicht.

Beweis: Gesetzt, zwei Strecken AB und CD hätten einen Punkt S gemeinsam. Dann wäre

$$2 \leq AC + BD < (AS + SC) + (BS + SD) = AB + CD = 2,$$

was nicht geht.

Wir betrachten geschlossene Streckenzüge ohne Überschneidungen, d. h. Teilmengen von Punkten und Strecken eines Graphen, bei denen in jedem Punkt der Teilmenge genau zwei Strecken der Teilmenge zusammenstoßen. Nach Satz 2 wird die Kugel durch einen derartigen geschlossenen Streckenzug des Graphen in zwei Gebiete zerlegt. Enthält eines dieser Gebiete keinen Punkt des Graphen, so sprechen wir von einem *Polygon des Graphen* (Dreieck, Viereck usw.), und wir bezeichnen das Gebiet, in dem kein Punkt liegt, als das *Innere des Polygons*, das andere Gebiet, wenn es mindestens einen Punkt enthält, als das *Äußere des Polygons*. (Liegen alle Punkte des Graphen auf einem einzigen Polygon, so besitzt dieses zwei innere Gebiete.)



Fig. 1.

§ 5. Abbau eines Graphen.

Im folgenden sei immer $N > 6$. Dann ist $d > \sqrt{2}$, da auf einer Kugel mit Durchmesser $\sqrt{2}$ nur 6 Punkte ohne Störung Platz haben. Der Kreis mit Radius 1 um einen Punkt der Kugel ist dann immer kleiner als ein Großkreis.

Satz 3. Wenn alle Strecken des Graphen, die von einem Punkt P ausgehen, einem Winkel von 180° angehören, so kann man durch eine kleine Verschiebung den Punkt P ganz isolieren, d. h. man kann erreichen, daß er von allen anderen Punkten einen Abstand > 1 erhält. Insbesondere kann man also jeden Punkt $2. Grades$ durch eine kleine Verschiebung isolieren.

Beweis: Um alle Nachbarpunkte A, B, \dots beschreiben wir Kreise vom Radius 1. Nun verschieben wir P in einer Richtung senkrecht zur Grenze des Winkels von 180° , dem alle von P ausgehenden Strecken PA, PB, \dots angehören, und zwar aus dem Winkelraum heraus auf einem Großkreis PQ . Bei dieser Verschiebung kommt P offensichtlich aus allen Kreisen um A, B, \dots heraus. Der Winkel APQ ist nämlich $\geq 90^\circ$. Ist er 90° , so bewegt sich P tangential zum Kreis auf einem Großkreis, also aus dem kleineren Kreis heraus. Ist der Winkel $> 90^\circ$, so bewegt sich P noch stärker von A weg.

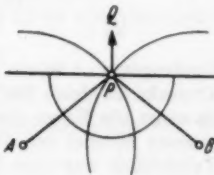


Fig. 2.

Wir nennen dieses Verfahren das *Wegschieben* eines Punktes P . Einen *zusammenhängenden* Graphen (mit mehr als einem Punkt), in dem sich kein Punkt wegschieben läßt, in dem also nur Winkel $< 180^\circ$ auftreten, bezeichnen wir als *irreduzibel*. Aus Satz 3 folgt nun

Satz 4. Jeder Graph läßt sich durch fortgesetztes Wegschieben der Punkte so umwandeln, daß er in lauter irreduziblen Graphen und isolierte Punkte zerfällt.

Ferner gilt der

Satz 5. Wenn sich der Graph durch fortgesetztes Wegschieben der Punkte in lauter isolierte Punkte zerlegen läßt, so ist die Kugel nicht die Minimalkugel, ja nicht einmal eine relative Minimalkugel.

Beweis: Nachdem alle Punkte von den anderen weggeschoben sind, sind alle Abstände > 1 geworden. Dann kann aber der Radius r etwas verkleinert werden (unter Beibehaltung der Richtungen der Punkte vom Mittelpunkt aus), so daß alle Abstände immer noch > 1 bleiben. Also war die Kugel keine relative Minimalkugel.

Auf einer relativen Minimalkugel muß somit bei der nach Satz 4 möglichen Zerlegung mindestens ein irreduzibler Graph auftreten.

§ 6. Polygone irreduzibler Graphen.



Fig. 3.

Den Großkreisbogen (in Winkelmaß) zwischen zwei Punkten vom Abstand 1 bezeichnen wir mit a . Zwischen a und dem Kugelradius r besteht die Beziehung

$$(1) \quad \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2r}.$$

Satz 6. Für die Kugel eines irreduziblen Graphen, der ein Polygon mit n Ecken enthält, gilt $n \cdot a < 360^\circ$.

Beweis: Da das Innere eines Polygons keine Punkte enthält, werden die inneren Winkel des Polygons nicht durch irgendwelche Strecken des Graphen unterteilt. Damit der Graph irreduzibel ist, müssen alle inneren Winkel $< 180^\circ$ sein. Besitzt das Polygon mehr als drei Ecken, so verschieben wir es

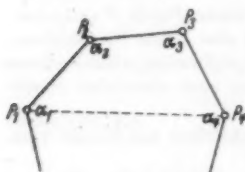


Fig. 4.

in folgender Weise. P_1, \dots, P_4 seien vier aufeinander folgende Ecken mit den inneren Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, die alle $< 180^\circ$ sind. Dann bewegen wir die Punkte P_2, P_3 unter Erhaltung der Abstände P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_4 so weit, bis ein innerer Winkel gleich 180° geworden ist. Dadurch gehen zwei Seiten des Polygons in eine einzige (längere) Seite über, die fortan in sich starr gehalten wird. Setzt man nun dieses Verfahren fort, so wird schließlich das Polygon unter Erhaltung seines

Umfanges $n \cdot a$ in ein Dreieck verschoben. Der größtmögliche Umfang eines Dreiecks ist gleich 360° . Dieser Maximalwert kann nicht angenommen werden, da sonst alle Ecken des Dreiecks auf einem Großkreis liegen müßten, also alle inneren Winkel des Polygons nach den Verschiebungen gleich 180° wären. Tatsächlich war aber bei jeder Verschiebung mindestens ein innerer Winkel verkleinert, so daß auch nach allen Verschiebungen mindestens ein innerer Winkel $< 180^\circ$ bleiben muß. Folglich ist der Umfang des Polygons

$$n \cdot a < 360^\circ,$$

was zu beweisen war.

Satz 7. Im Falle $N > 6$ umschließt ein geschlossener Streckenzug aus drei oder vier Strecken eines Graphen immer ein Gebiet, in dem kein Punkt ohne Störung durch die Ecken des Streckenzuges Platz hat.

Beweis: Wir betrachten das kleinere der beiden Gebiete, in welche die Kugel durch den geschlossenen Streckenzug zerlegt wird. Handelt es sich um einen dreieckigen Streckenzug, so wird das kleinere Gebiet durch den

um eine Ecke gezogenen Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt. In dem Gebiet hat also kein Punkt ohne Störung Platz. Bei einem viereckigen Streckenzug ziehen wir Einheitskreise um zwei gegenüberliegende Eckpunkte. Im Falle $N > 6$ sind die Einheitskreise kleiner als Großkreise. Daher überdecken sie das kleinere Gebiet in der Weise, daß nur die beiden übrigen Eckpunkte gemeinsame Randpunkte beider Kreise sind. Folglich hat auch in diesem Gebiet kein Punkt ohne Störung Platz.



Fig. 5.



Fig. 6.

Satz 8. Ist für eine Zahl $N > 6$ der Radius der Minimalkugel $\leq \frac{1}{2 \sin 36^\circ}$, so gibt es als Minimalfigur einen irreduziblen Graphen von N Punkten. Dieser Graph enthält keine anderen Polygone als Dreiecke und Vierecke.

Beweis: Nach Satz 4 läßt sich eine Minimalfigur aus irreduziblen Graphen und isolierten Punkten zusammensetzen. Dabei muß nach Satz 5 mindestens ein irreduzibler Graph auftreten. Aus

$$r \leq \frac{1}{2 \sin 36^\circ}$$

folgt nach (1)

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin 36^\circ, \text{ also } \alpha \geq 72^\circ.$$

Nach Satz 6 gilt für Polygone eines irreduziblen Graphen

$$n \cdot 72^\circ \leq n \cdot \alpha < 360^\circ, \text{ also } n \leq 4.$$

D. h. ein irreduzibler Graph enthält keine anderen Polygone als Dreiecke und Vierecke. Diese umschließen nach Satz 7 Gebiete, in denen keine Punkte ohne Störung Platz haben. Die Minimalfigur kann also neben den Punkten eines irreduziblen Graphen keine anderen Punkte enthalten.

Satz 9. Ein irreduzibler Graph auf einer Minimalkugel für $6 < N \leq 12$ enthält keine anderen Polygone als Dreiecke, Vierecke und Fünfecke.

Beweis: Der Radius r einer Minimalkugel für $N \leq 12$ ist höchstens gleich dem Radius

$$r_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

der Kugel, die einem Ikosaeder der Kantenlänge 1 umschrieben ist. Aus $r \leq r_{12} < 1$ folgt nach (1)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2r} > \frac{1}{2}, \text{ also } \alpha > 60^\circ.$$

Nach Satz 6 gilt für Polygone eines irreduziblen Graphen

$$n \cdot 60^\circ < n \cdot \alpha < 360^\circ, \text{ also } n \leq 5.$$

§ 7. Eine Lagerung von 7 Punkten auf der Kugel.

Als Maß für die Größe einer Kugel nehmen wir im folgenden statt des Radius r den Winkel α des gleichseitigen sphärischen Dreiecks, dessen Eckpunkte den Abstand 1 haben. Je größer α , um so kleiner r .



Fig. 7.

Zwischen α und $\alpha/2$ besteht die Beziehung

$$(2) \quad \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Auf einer Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ erhält man eine Verteilung von 7 Punkten in folgender Weise: Man gehe aus von einem gleichseitigen sphärischen Dreieck ABC mit Kantenlänge 1. Der Mittelpunkt des Dreiecks sei der Südpol der Kugel. Auf die drei Seiten setze man drei weitere gleichseitige Dreiecke auf. Die Spitzen

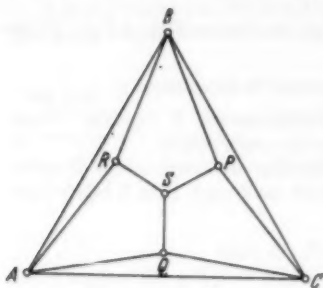


Fig. 8.

P, Q, R dieser Dreiecke liegen gleich weit vom Nordpol entfernt. Geht man etwa von der Tetraederfigur aus und läßt den Kugelradius stetig anwachsen, so wächst die Entfernung von P, Q und R zum Nordpol S stetig ins Unendliche. Es gibt also einen Augenblick, wo diese Entfernungen genau 1 geworden sind. Man hat dann den in Fig. 8 gezeichneten Graphen. In der Figur sind der Einfachheit halber nicht die Kreisbogen, sondern die geradlinigen Kanten in stereographischer Projektion vom Südpol aus gezeichnet.

Aus der Symmetrie der Figur ist klar, daß die Winkel zwischen den drei Kreisbogen in S genau 120° sind. Da $AR SQ$ ein sphärischer Rhombus ist, ist der Winkel RAQ ebenfalls 120° . Die übrigen drei Winkel bei A sind gleich α , also hat man

$$120^\circ + 3\alpha = 360^\circ, \\ \alpha = 80^\circ.$$

Auf einer Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ haben also 7 Punkte Platz, und für die Minimal-kugel mit 7 Punkten gilt

$$\alpha \geq 80^\circ.$$

Wir wollen nun beweisen, daß die Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ die Minimal-kugel für $N = 7$ ist.

§ 8. Die Minimal-kugel für $N = 7$.

Für $\alpha \geq 80^\circ$ ist auf Grund der Formel (2) $\alpha > 77^\circ$, also nach (1)

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{2 \sin 36^\circ}.$$

Damit ist die Voraussetzung des Satzes 8 erfüllt. Eine Minimalfigur wird also von einem irreduziblen Graphen mit 7 Punkten und mit Dreiecken und Vierecken als einzigen Polygonen gebildet.

Alle in einem Graphen auftretenden Winkel müssen $\geq \alpha$ sein, damit sich die Punkte nicht stören. Wegen $\alpha > 72^\circ$ können somit höchstens 4 Strecken in einem Punkt zusammenstoßen. D. h. der Maximalgrad der Punkte ist 4. Punkte 2. Grades treten in einem irreduziblen Graphen nicht auf, da sich solche Punkte wegchieben lassen. Es kommen also für einen irreduziblen Minimalgraphen mit 7 Punkten nur Punkte 3. und 4. Grades in Betracht.

Bei ungeradem N können nicht alle Punkte 3. Grad haben, da die Anzahl der Kanten dann $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot N$ ist. Im Falle $N = 7$ besitzt also der irreduzible Minimalgraph mindestens einen Punkt P 4. Grades. P sei mit den Punkten A, B, C, D in dieser Reihenfolge verbunden. Der Graph enthält zwei weitere Punkte Q, R . Da jeder Punkt mindestens 3. Grad besitzt, sind Q und R je mit mindestens 2 Punkten A, B, C, D verbunden. Sie können aber nur mit benachbarten Punkten A, B bzw. B, C bzw. C, D bzw. D, A verbunden sein. Wäre nämlich etwa Q mit A und C verbunden, so würde $APCQ$ einen viereckigen Streckenzug bilden, der die Kugel in 2 Gebiete zerlegt. Beide Gebiete erhielten mindestens einen Punkt, nämlich B bzw. D , was nach Satz 7 unmöglich ist.

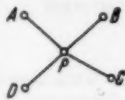


Fig. 9.

Es sei Q mit A und B verbunden. Außerdem kann Q nur noch mit R verbunden sein. Diese Verbindung muß bestehen, da Q mindestens 3. Grad hat. Für R bleiben jetzt nur noch die Verbindungsmöglichkeiten mit zwei benachbarten Punkten B, C bzw. C, D bzw. D, A .

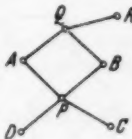


Fig. 10.

Wäre etwa R mit B und C verbunden, so müßte D mit A und C verbunden sein. Dann würde $AQRCD$ ein Fünfeck bilden, in dem keine Diagonalverbindungen bestehen (Fig. 11). Der Graph enthielte also ein fünfeckiges Polygon, entgegen Satz 8. Aus demselben Grunde kann R nicht mit A und D verbunden sein. Es bleibt also als einzige Möglichkeit, daß R mit C und D verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke auftreten, müssen außerdem BC und AD verbunden sein (Fig. 12). Der Graph besitzt noch einen Freiheitsgrad, da die Winkel der bei P zusammenstoßenden Rhomben noch nicht festgelegt sind. Einer dieser beiden Winkel kann im Grenzfall gleich α werden, wobei eine Verbindung zwischen A und B bzw. C und D hinzuzufügen ist. Die halben Winkel der Rhomben bei P seien ξ und η . Wir haben diese so zu bestimmen, daß die Kugel minimal wird. Die Punkte P, Q, R liegen auf einem Großkreis. Dieser wird minimal, wenn die Summe der sphärischen Abstände PQ und PR minimal wird. Es sei $PQ = 2p$ und $PR = 2q$. Dann ist also ξ so zu bestimmen, daß sich für $c = p + q$ ein Minimum ergibt. Es ist

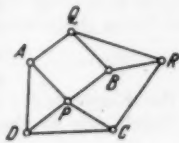


Fig. 11.

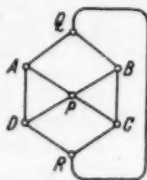


Fig. 12.

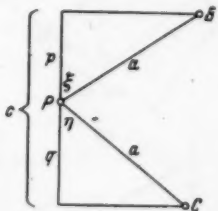


Fig. 13.

$$\cos \xi = \frac{\operatorname{tg} p}{\operatorname{tg} a}$$

$$\cos \eta = -\cos(\xi + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c = \operatorname{tg}(p + q) &= \frac{[\cos \xi - \cos(\xi + \alpha)] \cdot \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos \xi \cdot \cos(\xi + \alpha)} \\ &= \frac{[\cos \xi - \cos(\xi + \alpha)] \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha + (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \cos \xi \cdot \cos(\xi + \alpha)} \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\zeta = \xi + \frac{\alpha}{2},$$

so wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \frac{\left[\cos \left(\zeta - \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(\zeta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha + (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \cos \left(\zeta - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\zeta + \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{4 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha} \cdot \sin \zeta}{1 - \cos \alpha - 2(1 - 2 \cos \alpha) \cdot \sin^2 \zeta}. \end{aligned}$$

Es ist ζ so zu bestimmen, daß

$$f(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{1 - \cos \alpha - 2(1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta}$$

ein Minimum wird. Die Differentiation ergibt

$$f'(\zeta) = \frac{\cos \zeta \cdot [1 - \cos \alpha + 2(1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta]}{[1 - \cos \alpha - 2(1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta]^2}$$

$$\cos \zeta \cdot f'(\zeta) \geq 0.$$

Es ist $f'(\zeta) = 0$ nur bei $\zeta = 90^\circ$ (Maximum). Das Minimum liegt also am Rande des zulässigen Intervalls, wobei einer der beiden Rhomben bei P den Winkel α besitzt, also der Rhombus durch die Verbindung AB bzw. CD in zwei Dreiecke zerfällt. Es handelt sich dann um einen Graphen, der mit dem in Fig. 8 angegebenen Graphen identisch ist und die Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ festlegt. Die Minimalkugel für 7 Punkte ist also durch den Winkel $\alpha = 80^\circ$ bestimmt.

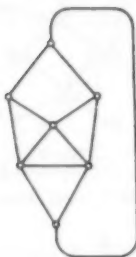


Fig. 14.

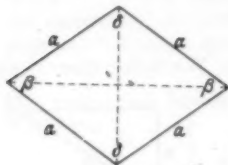


Fig. 15.

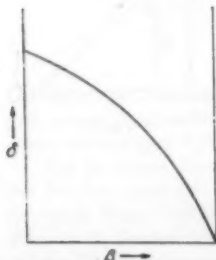


Fig. 16.

§ 9. Konkave Funktionen bei Rhomben.

In einem sphärischen Viereck mit 4 gleichen Seiten a seien β und δ zwei aufeinanderfolgende Winkel. Die gegenüberliegenden Winkel sind dann auch β und δ , und bei gegebenem a ist δ eine Funktion von β :

$$\delta = \varphi(\beta).$$

Satz 10. Die Funktion $\varphi(\beta)$ ist konkav, d. h. ihre Ableitung nimmt ständig ab.

Beweis: In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit Winkeln $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$ und Hypotenuse a gilt

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cdot \cos a = 1,$$

also, wenn

$$\frac{1}{\cos a} = b$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = b \cot \frac{\beta}{2}$$

$$\delta = 2 \arctan \left(b \cot \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\frac{d\delta}{d\beta} = - \frac{b}{\sin^2 \frac{\beta}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = - \frac{b}{1 + (b^2 - 1) \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Die Ableitung nimmt also ständig ab.

Aus diesem Satz folgt, daß auch die Summe $\beta + \delta$ und somit auch der Flächeninhalt des Vierecks eine konkave Funktion von β ist. Wir nennen diese Funktion $V(\beta)$.

Eine konkave Funktion hat ihr Minimum immer am Rande des zulässigen Intervalles. Wenn wir verlangen, daß keine Diagonale des Vierecks kleiner als a ausfällt, so ist das zulässige β -Intervall durch

$$\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$$

definiert, wobei α der Winkel des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist; denn für $\beta = \alpha$ und für $\beta = 2\alpha$ zerfällt das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke. Also folgt:

Der Flächeninhalt $V(\beta)$ des Vierecks ist am kleinsten dann, wenn das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt.

Ist Δ der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, so ist also stets

$$V(\beta) \geq 2\Delta$$

mit dem Gleichheitszeichen nur dann, wenn die Winkel des Vierecks α und 2α sind. Dieses Ergebnis haben HABICHT und v. D. WAERDEN auch schon erhalten. Man kann die Ungleichung auch so schreiben:

$$\beta + \delta \geq 3\alpha.$$

Betrachten wir nun zwei Vierecke, die in einem Punkt P zusammenkommen, wobei die Summe der Winkel bei P konstant gehalten wird:

$$\beta + \gamma = s = \text{const.},$$

so sind die anderen Winkel δ und ε konkave Funktionen von β und von $\gamma = s - \beta$, also beide konkave Funktionen von β . Dann ist ihre Summe $\delta + \varepsilon$ aber auch eine konkave Funktion von β , und das gleiche gilt für die Summe der Flächeninhalte der Vierecke, die ja eine wachsende lineare Funktion der Winkelsumme

$$2\beta + 2\delta + 2\gamma + 2\varepsilon = 2s + 2(\delta + \varepsilon)$$

ist. Daraus folgt:

Die Winkelsumme $\delta + \varepsilon$ und damit auch die Summe der Flächeninhalte $V(\beta) + V(\gamma)$ wird bei festgehaltener Summe $\beta + \gamma = s$ dann am kleinsten, wenn einer der Winkel β oder γ den extrem zulässigen Wert α oder 2α annimmt, d. h. wenn eines der Vierecke in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt.

Dasselbe gilt, wenn drei oder mehr Vierecke in P zusammenkommen und

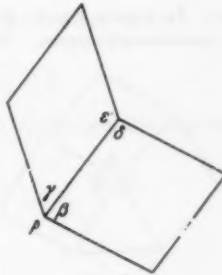


Fig. 17.

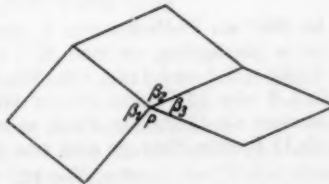


Fig. 18.

die Summe der Winkel bei P festgehalten wird. Hat man z. B. drei Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ mit

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = s,$$

und hält man zunächst β_1 fest, so wird die Summe der Flächeninhalte

$$V(\beta_1) + V(\beta_2) + V(\beta_3)$$

nur dann minimal, wenn β_2 oder β_3 , sagen wir etwa β_2 , einen extremen Wert annimmt. Hält man dann β_2 fest, so folgt, daß beim Minimum auch β_1 oder β_3 extrem sein muß. Also:

Beim Minimum zerfallen alle Vierecke bis auf eines in je zwei Dreiecke.

Ist beim Minimum β_0 der eine Winkel, der nicht gleich α oder 2α ist, und ist h die Anzahl der Vierecke, so erhält man schließlich die Ungleichung

$$V(\beta_1) + V(\beta_2) + \dots + V(\beta_h) \geq (h-1) \cdot 2\Delta + V(\beta_0).$$

Setzt man

$$V(\beta_0) = 2\Delta + f(\beta_0),$$

wo $f(\beta_0)$ positiv oder Null ist, so kann man diese Ungleichung auch so schreiben:

$$V(\beta_1) + \dots + V(\beta_h) \geq 2h\Delta + f(\beta_0).$$

Dabei ist $f(\beta_0)$ positiv oder Null, und zwar Null nur dann, wenn auch β_0 gleich α oder 2α wird, also wenn die gegebene Winkelsumme s ein Vielfaches von α ist. In allen anderen Fällen erhält man β_0 , indem man von s ein solches Vielfaches von α subtrahiert, daß der Rest zwischen α und 2α liegt. Dieser Rest ist dann β_0 .

§ 10. Eine Ungleichung für Graphen aus Dreiecken und Vierecken.

In einem Punkt P eines Graphen mögen lauter Dreiecke und Vierecke zusammenkommen. Die Dreiecke haben alle den Flächeninhalt Δ , die Vierecke die Flächeninhalte $V(\beta_1), V(\beta_2), \dots$. Die Anzahl der Dreiecke sei h_3 , die der Vierecke h_4 . Setzen wir



Fig. 19.

$$(3) \quad h_3 + 2h_4 = k,$$

so folgt aus § 7 für die Summe $S(P)$ der Flächeninhalte sämtlicher Dreiecke und Vierecke, die in P zusammenkommen, die Ungleichung

$$(4) \quad S(P) \geq (k-2)\Delta + V(\beta_0) = k\Delta + f(\beta_0).$$

Dabei wird β_0 so definiert: Man subtrahiert von 360° ein solches Vielfaches von α , daß ein Rest β_0 zwischen α und 2α übrig bleibt:

$$360^\circ - m\alpha = \beta_0, \quad \alpha \leq \beta_0 \leq 2\alpha.$$

Ist 360° ein Vielfaches von α , also $\alpha = 180^\circ$ oder 120° oder 90° oder 72° , so ist es gleichgültig, ob man $\beta_0 = \alpha$ oder $\beta_0 = 2\alpha$ wählt; es ist dann nämlich $V(\beta_0) = 2\Delta$ und $f(\beta_0) = 0$. Wir wissen schon, daß in diesen Fällen genau 3, 4, 6 oder 12 Punkte auf der Kugel Platz haben. Haben mehr als 6, aber weniger als 12 Punkte Platz, so muß man $m = 2$ nehmen; haben aber mehr als 12 Punkte Platz, so muß man $m = 3$ nehmen;

$$\begin{aligned} 6 < N < 12, \quad m = 2, \quad 360^\circ - 2\alpha = \beta_0 \\ N > 12, \quad m = 3, \quad 360^\circ - 3\alpha = \beta_0. \end{aligned}$$

Wenn α von 90° zu 72° oder von 72° bis 60° abnimmt, so nimmt β_0 jeweils von α bis 2α zu. Das Zusatzglied $f(\beta_0)$ in (4) nimmt dabei jedesmal zunächst zu und dann ab. In den Extremfällen $\beta_0 = \alpha$ und $\beta_0 = 2\alpha$ ist es Null, dazwischen positiv.

Addiert man die Ungleichungen (4) für sämtliche Punkte des Graphen, so erhält man

$$(5) \quad \Sigma S(P) \geq (\Sigma k) \Delta + N f(\beta_0).$$

Zu der Summe $\Sigma S(P)$ gibt jedes Dreieck einen Beitrag 3Δ , da es drei Ecken hat und an jeder Ecke einen Beitrag Δ gibt. Jedes Viereck mit Flächeninhalt $V(\beta)$ gibt aber einen Beitrag $4V(\beta)$. Ist also S_3 die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke und S_4 die der Vierecke, so wird die linke Seite von (5)

$$3S_3 + 4S_4.$$

Zu der Summe auf der rechten Seite

$$\Sigma k = \Sigma (h_3 + 2h_4)$$

gibt jedes Dreieck einen Beitrag 3, jedes Viereck aber einen Beitrag 8 wegen des Faktors 2 vor h_4 . Ist also g_3 die Anzahl der Dreiecke und g_4 die Anzahl der Vierecke, so ist

$$\Sigma k = 3g_3 + 8g_4.$$

Somit erhält man die Ungleichung

$$(6) \quad 3S_3 + 4S_4 \geq (3g_3 + 8g_4) \Delta + N f.$$

Addiert man auf beiden Seiten

$$S_3 = g_3 \Delta,$$

so erhält man nach Division durch 4 für den gesamten Flächeninhalt der Kugel die Abschätzung

$$(7) \quad F = S_3 + S_4 \geq (g_3 + 2g_4) \Delta + \frac{1}{4} N f.$$

Nun ist nach der EULERSchen Polyederformel, wenn K die Anzahl der Kanten und G die der Flächen ist,

$$\begin{aligned} N - 2 &= K - G = \frac{1}{2} (3g_3 + 4g_4) - (g_3 + g_4) \\ &= \frac{1}{2} (g_3 + 2g_4). \end{aligned}$$

Also kann man (7) auch so schreiben:

$$(8) \quad F \geq 2(N - 2) \Delta + \frac{1}{4} N f(\beta_0).$$

Das ist eine Verschärfung der Ungleichung von FEJES TÓTH

$$F \geq 2(N - 2) \Delta.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (8) nur dann, wenn es in (4) für jeden Punkt P gilt, also wenn in jedem Punkt P entweder nur Dreiecke oder nur Vierecke und ein einziges nicht zerfallendes Viereck zusammenkommen. Der erste Fall (nur Dreiecke) kann nur für $N = 3, 4, 6$ oder 12 eintreten und wurde schon früher erledigt. Gibt es aber auch Vierecke, so sind die Winkel dieser Vierecke alle gleich β_0 , also sind die Vierecke regulär. In jedem Punkt kommen

dann m Dreiecke mit Winkel α und ein Viereck mit Winkel β_0 zusammen, und es ist

$$(9) \quad m\alpha + \beta_0 = 360^\circ \quad (m \leq 4).$$

Ist N die Anzahl der Punkte, so ist $\frac{N}{4}$ die Anzahl der Vierecke und $\frac{mN}{3}$ die Anzahl der Dreiecke. Von jedem Punkt gehen $m+1$ Kanten aus, also ist die Kantenzahl $K = \frac{m+1}{2} N$. Die EULERSche Polyederformel ergibt nun

$$\frac{N}{4} + \frac{mN}{3} - \frac{m+1}{2} N + N = 2$$

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{m}{6}\right) N = 2$$

$$N = \frac{48}{18 - 4m}.$$

Für $m = 1$ oder 2 gibt das keinen ganzen Wert von N , für $m = 3$ oder 4 ergibt sich aber $N = 8$ oder 24 . Größer als 4 kann m nicht werden.

Also gilt das Gleichheitszeichen in (8) außer für $N = 3, 4, 6$ oder 12 nur noch für $N = 8$ oder 24 .

Die Figuren, die man für $N = 8$ oder 24 erhält, sind halbrekuläre Körper, begrenzt von 8 Dreiecken und 2 Vierecken oder von 32 Dreiecken und 6 Vierecken. Beide Figuren sind vermutlich minimal, aber nur für $N = 8$ ist es uns bisher gelungen, das zu beweisen.

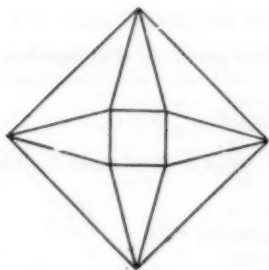


Fig. 20.

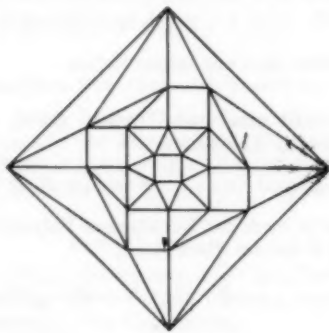


Fig. 21.

§ 11. Der Fall $N = 8$.

Die Kugel, die durch den in Fig. 20 dargestellten halbrekulären Körper mit 8 Ecken bestimmt wird, ist gekennzeichnet durch die Gleichung

$$(10) \quad 3\alpha + \beta = 360^\circ,$$

wo β der Winkel eines regelmäßigen Vierecks mit der Seite a ist. Zwischen a und β besteht die Beziehung

$$\cos \alpha = \cot^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}$$

oder

$$(11) \quad \cos \beta = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}.$$

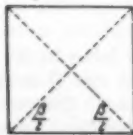


Fig. 22.

Aus (2) folgt

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{\cos a + 1}$$

und mit (10)

$$\cos \beta = \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \frac{\cos^3 a - 6 \cos^2 a - 3 \cos a}{(\cos a + 1)^2}.$$

Mit (11) ergibt sich

$$(\cos a - 1)(\cos a + 1)^2 = \cos^3 a - 6 \cos^2 a - 3 \cos a$$

$$7 \cos^3 a + 2 \cos a - 1 = 0$$

$$\cos a = \frac{\sqrt[3]{8} - 1}{7}$$

$$a > 74^\circ.$$

Für diese Kugel ist nach (1)

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} < \frac{1}{2 \sin 36^\circ}.$$

Da die Minimalkugel höchstens diesen Radius haben kann, ist die Voraussetzung des Satzes 8 erfüllt. Es gibt also auf der Minimalkugel einen irreduziblen Graphen mit 8 Punkten, in dem nur Dreiecke und Vierecke auftreten. Nach § 8 (8) gilt also die Ungleichung

$$(12) \quad F \geq 12 \Delta + 2 f(\beta_0).$$

Hier ist F der Flächeninhalt der Kugel, Δ der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit Winkel α und $f(\beta_0)$ der Überschuß des Flächeninhaltes des Rhombus mit Winkel β_0 über 2Δ .

Wir denken uns alle Flächeninhalte auf der Einheitskugel gemessen. (12) wird dann nach Division durch 2

$$(13) \quad 2\pi \geq 6(3\alpha - \pi) + f_1(\beta_0).$$

Hier ist $f_1(\beta_0)$ der Überschuß der Winkelsumme des Rhombus mit Winkel β_0 über 6α :

$$(14) \quad f_1(\beta_0) = 2\beta_0 + 2\delta_0 - 6\alpha$$

Dabei ist

$$(15) \quad \beta_0 = 2\pi - 3\alpha$$

und δ_0 der andere Winkel des Rhombus. β_0 und δ_0 sind beide Funktionen von α allein, die aus dem Rhombus leicht zu berechnen sind:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Setzt man (14) in (13) ein, so erhält man nach Division durch 2

$$(17) \quad 6\alpha + \beta_0 + \delta_0 \leq 4\pi.$$

Die linke Seite ist, wie man sich leicht überzeugt, eine ständig wachsende Funktion von α . Also gibt es genau einen Wert α_0 , für den in (17) das Gleichheitszeichen gilt, und α kann niemals größer sein als dieses α_0 :

$$(18) \quad \alpha \leq \alpha_0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (18) nur dann, wenn es in (12), (13) und (17) überall gilt. Das ist aber nur dann der Fall, wie wir in § 8 gesehen haben.

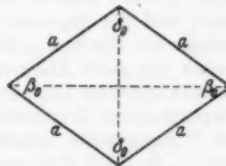


Fig. 23.

wenn in jedem Punkt genau ein Viereck und 3 Dreiecke zusammenkommen, also für die Figur des halbregulären Körpers, begrenzt von 2 Vierecken und 8 Dreiecken (Fig. 20). In diesem Falle ist also $\alpha = \alpha_0$ und

$$\delta_0 = \beta_0 = 2\pi - 3\alpha_0.$$

In allen anderen Fällen gilt

$$\alpha < \alpha_0,$$

d. h. die Kugel der Fig. 20 ist die Minimalkugel für $N = 8$.

§ 12. Eine Lagerung von 9 Punkten auf der Kugel.

Wir gehen aus von einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge 1. Diesem wird eine Kugel umbeschrieben, so daß die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Äquator liegen. Auf den Seiten dieses Dreiecks wird nach oben

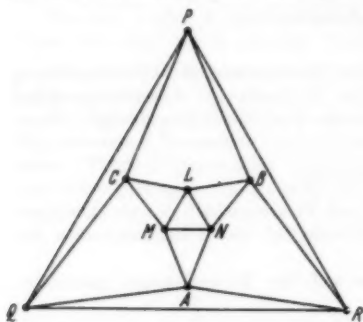


Fig. 24.

und nach unten je ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 errichtet, so daß die gegenüberliegenden Ecken P, Q, R bzw. L, M, N je auf einem Breitenkreis liegen. Die gegenseitigen Abstände zwischen den Punkten P, Q, R und den Punkten L, M, N sind dann < 1 . Nun nehmen wir eine stetige Vergrößerung der Kugel unter Erhaltung ihres Mittelpunktes vor. Die Punkte A, B, C sollen dabei ihre Richtungen zum Mittelpunkt beibehalten, also auf dem Äquator verbleiben. Ihre gegenseitigen Abstände werden nun > 1 .

Die übrigen Punkte sollen so bewegt

werden, daß ihre Abstände von den Äquatorpunkten, so weit sie vorher gleich 1 waren, gleich 1 bleiben. Die Breitenkreise rücken dabei näher an den Äquator heran, und die gegenseitigen Abstände der Punkte auf einem Breitenkreis wachsen an. Die stetige Vergrößerung der Kugel soll nun so weit durchgeführt werden, bis diese Abstände genau gleich 1 geworden sind. Wir erhalten so eine störungsfreie Lagerung von 9 Punkten auf einer Kugel (Fig. 24). In dem entsprechenden Graphen haben alle Punkte 4. Grad. Es treten 8 Dreiecke und 3 kongruente sphärische Rhomben auf. Die Winkel der Rhomben seien γ_0, δ_0 . In 3 Punkten (A, B, C) stoßen je 2 Dreiecke mit den Winkeln α_0 und 2 Rhomben mit den Winkeln γ_0 zusammen. In den übrigen 6 Punkten stoßen je 3 Dreiecke und 1 Rhombus mit dem Winkel δ_0 zusammen. Es ist also

$$2\alpha_0 + 2\gamma_0 = 360^\circ$$

$$3\alpha_0 + \delta_0 = 360^\circ.$$

Hieraus läßt sich unter Benutzung der Gleichungen (1), (2), (16) (mit γ_0 statt β_0) die Größe der betreffenden Kugel berechnen. Man erhält:

$$\cos \alpha_0 = \frac{1}{4}; \quad \cos a_0 = \frac{1}{3}; \quad r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Für den Winkel β_0 des regelmäßigen Vierecks mit der Seite a_0 ergibt sich nach (11)

$$\beta_0 = 120^\circ.$$

Da auf dieser Kugel 9 Punkte ohne Störung Platz haben, gilt für die entsprechenden Größen r , a , α , β der Minimalkugel

$$(19) \quad r \leq \frac{1}{2} \sqrt{3}; \quad \cos a \leq \frac{1}{2}; \quad \cos \alpha \leq \frac{1}{2}; \quad \beta \geq 120^\circ.$$

Es soll im folgenden bewiesen werden, daß die angegebene Figur eine Minimalkugel, für $N = 9$ darstellt, daß also bei allen Ungleichungen (19) das Gleichheitszeichen gilt.

§ 13. Hilfssätze für $N = 9$.

Satz 11. Sind auf der Minimalkugel für $N = 9$ in einem Fünfeck mit der Seitenlänge a alle inneren Winkel $\geq \alpha$ und $\leq 180^\circ$, so sind alle Diagonalen $> a^3$.

Beweis: Da die inneren Winkel $\geq \alpha$ sind, ist jede Diagonale $\geq a$. Wäre die Diagonale BE des Fünfecks $ABCDE$ gleich a , so würde das Fünfeck in ein gleichseitiges Dreieck ABE und in ein Viereck $BCDE$ zerfallen. Einer der beiden Viereckswinkel δ , ε bei B oder E ist mindestens gleich dem Winkel β des regelmäßigen Vierecks. Dann ist der gesamte innere Winkel an diesem Punkt $\geq \alpha + \beta$. Das verstößt aber gegen die Voraussetzung, da α jedenfalls $> 60^\circ$ und β auf der Minimalkugel nach (19) $\geq 120^\circ$, also $\alpha + \beta > 180^\circ$ ist.

Satz 12. Ein irreduzibler Graph von 9 Punkten auf der Minimalkugel enthält nur Dreiecke und Vierecke.

Beweis: Nach Satz 9 können außerdem nur Fünfecke auftreten. $ABCDE$ sei ein Fünfeck eines irreduziblen Graphen. Jeder innere Winkel muß $< 180^\circ$ sein. Wir halten CDE fest und bewegen A, B mit seinen Verbindungen so weit, daß ein möglichst kleiner Flächeninhalt entsteht. Dabei sollen alle inneren Winkel $\leq 180^\circ$ bleiben. Das Minimum liegt, wie HABICHT und v. D. WAERDEN in der früher zitierten Arbeit bewiesen haben, immer am Rand des zulässigen Bereichs. Nach Satz 11 ist es nicht möglich, daß eine Diagonale $\leq a$ wird. Daher tritt die Randlage nur dann ein, wenn einer der inneren Winkel, etwa der bei E , gleich 180° geworden ist. Nun halten wir die gestreckte Seite AED fest und verschieben die übrigen Punkte mit ihren Verbindungen so, daß der Flächeninhalt möglichst klein wird. Das Minimum tritt wiederum bei einer Randlage ein, bei der ein weiterer innerer Winkel gleich 180° ist. Es ergibt sich so ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a und den Schenkeln $2a$. γ sei der Basiswinkel, δ der halbe Scheitelwinkel. Die Winkelsumme φ des ursprünglichen Fünfecks ist durch die Verschiebungen höchstens kleiner geworden. Es gilt also

$$\varphi \geq 360^\circ + 2\gamma + 2\delta.$$

³⁾ Der Satz läßt sich übrigens auch bis $N = 12$ ausdehnen.

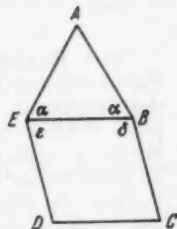


Fig. 25.

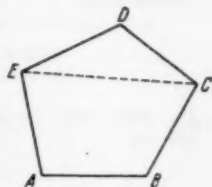


Fig. 26.

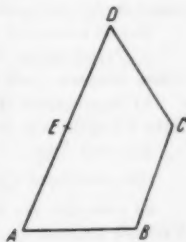


Fig. 27.



Fig. 28.

Dabei ist

$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1 - \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha \sqrt{2} (1 + \cos \alpha)}$$

Für die Minimalkugel ist $\cos \alpha \leq \frac{1}{4}$, also

$$\cos \gamma \leq 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \quad \gamma > 151^\circ$$

$$\sin \delta \geq \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \delta > 66^\circ$$

$$\varphi > 360^\circ + 2(151^\circ + 66^\circ) = 794^\circ.$$

Nach HABICHT und V. D. WAERDEN findet man eine untere Grenze des Flächeninhaltes außerhalb des Fünfecks, indem man die übrigen Polygone des Graphen in Dreiecke zerlegt, jedes n -Eck in $(n-2)$ Dreiecke, und für jedes Dreieck den Flächeninhalt Δ des gleichseitigen Dreiecks mit dem Winkel α rechnet. Bei der Dreieckzerlegung treten außerhalb des Fünfecks 11 Dreiecke auf mit der gesamten Winkelsumme 33α . Nach Abzug der vier Punkte, die außerhalb des Fünfecks liegen, verbleibt für die Außenwinkel des Fünfecks eine Winkelsumme von mindestens

$$33\alpha - 4 \cdot 360^\circ.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi + 33\alpha - 4 \cdot 360^\circ &\leq 5 \cdot 360^\circ \\ 33\alpha &\leq 9 \cdot 360^\circ - \varphi < 3240^\circ - 794^\circ = 2446^\circ < 33 \cdot 75^\circ \\ \alpha &< 75^\circ. \end{aligned}$$

Das steht aber im Widerspruch zu der bei der Minimalkugel geltenden Beziehung

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Es ist also nicht möglich, daß in einem irreduziblen Graphen von 9 Punkten auf der Minimalkugel ein Fünfeck auftritt, da dann die übrigen vier Punkte nicht mehr genügend Platz außerhalb des Fünfecks haben würden.

Somit kommen als irreduzible Graphen für $N=9$ nur in Betracht:

- Irreduzible Graphen, in denen nur Dreiecke und Vierecke auftreten. Diese müssen nach Satz 7 alle 9 Punkte enthalten.
- Irreduzible Graphen, in denen ein Fünfeck auftritt. Diese dürfen nach Satz 12 nicht alle 9 Punkte enthalten.

Hieraus folgt:

Minimalfigur für $N=9$ ist

- entweder ein irreduzibler Graph von 9 Punkten, in dem nur Dreiecke und Vierecke auftreten,
- oder ein irreduzibler Graph mit weniger als 9 Punkten, in dem ein Fünfeck auftritt, ergänzt durch einen oder mehrere Punkte, deren Entfernungen von den Punkten des Graphen > 1 sind.

Um die möglichen Graphen zu entwickeln, werden noch einige Hilfssätze benötigt.

Satz 13. Zu jedem Dreieck eines irreduziblen Graphen gehört mindestens ein Punkt von höherem als 3. Grade.

Beweis: Hat ein Punkt 2. Grad, so ist der Graph von vornherein reduzibel. Angenommen, alle Eckpunkte eines Dreiecks PQR haben 3. Grad. Es ist zu zeigen, daß der Graph auch dann durch eine kleine Verschiebung der Punkte in nicht zusammenhängende Teile zerlegt werden kann. Die an das Dreieck angrenzenden Strecken seien PA , QB und RC . Wenn die drei von einem Punkt ausgehenden Strecken einem Winkelraum von 180° angehören, so läßt sich der betreffende Punkt wegschieben, d. h. der Graph ist dann reduzibel. Dies möge nirgends der Fall sein. Dann gehen die Verlängerungen von AP und BQ ins Innere des Dreiecks, schneiden sich also in einem Punkt Z im Innern des Dreiecks PQR . Nun erteile man dem Dreieck PQR eine kleine Drehung um Z , und zwar nach rechts oder nach links, je nachdem ob der Strahl ZR rechts oder links von C vorbeigeht. Geht ZR genau durch C , so ist es gleichgültig, ob nach rechts oder nach links gedreht wird. Auf jeden Fall werden alle drei Entfernungen AP , BQ und CR durch die Drehung größer. Die sphärische Entfernung ZA ist nämlich $< 180^\circ$, also ist ZPA vor der Drehung die kürzeste Verbindung von Z mit A , ebenso ZQB von Z mit B , und ebenso ZRC von Z mit C , wenn Z, R, C in einer Geraden liegen. Liegt aber C nicht in der Verlängerung von ZR , so bewegt sich R bei der Drehung in einer Richtung, die nicht tangential zum Kreis durch R um C ist, also bewegt sich R von dem Kreis weg, also wächst CR auch in diesem Fall.



Fig. 29.

Satz 14. Haben zwei Dreiecke eines irreduziblen Graphen eine gemeinsame Seite, so besitzen deren Endpunkte höheren als 3. Grad.

Beweis: Zwei Dreiecke mögen die gemeinsame Seite PQ besitzen. Hätte einer der Punkte P, Q nur 3. Grad, so würden alle von diesem Punkt ausgehenden Strecken in einem Winkelraum von $2\alpha < 180^\circ$ liegen, und der Graph wäre reduzibel.

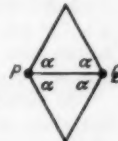


Fig. 30.

Satz 15. Stoßen in einem Punkt P 3. Grades ein Dreieck und zwei Vierecke zusammen, so haben die dem Punkt P gegenüberliegenden Viereckspunkte nicht größeren als 3. Grad.

Beweis: Die Viereckswinkel bei P seien γ und δ . Es gilt

$$\gamma < 2\alpha, \quad \delta < 2\alpha, \quad \alpha + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Daraus folgt

$$360^\circ - \gamma = \alpha + \delta < 3\alpha$$

$$360^\circ - \delta = \alpha + \gamma < 3\alpha.$$

Die Außenwinkel $360^\circ - \gamma$ und $360^\circ - \delta$ der gegenüberliegenden Viereckspunkte Q, R können also nicht durch zwei Strecken des Graphen unterteilt sein, da sie sonst $\geq 3\alpha$ sein müßten. D. h. Q, R haben nicht größeren als 3. Grad.

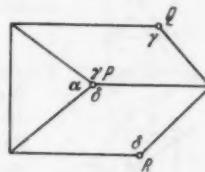


Fig. 31.

Satz 16. In einem irreduziblen Graphen sind zwei nicht benachbarte Fünfeckpunkte nicht mit demselben Punkt verbunden.

Beweis: Ein außerhalb des Fünfecks $ABCDE$ gelegener Punkt P möge mit zwei nicht benachbarten Fünfeckpunkten, etwa mit A und C verbunden sein. Dann bildet das Innere des Fünfecks zusammen mit dem vom Streckenzug $ABCP$ umschlossenen Gebiet eine Umgebung des Punktes B . Im Inneren des Fünfecks liegt definitionsgemäß kein Punkt. Aber auch das von dem Streckenzug $ABCP$ umschlossene Gebiet enthält nach Satz 7 keinen Punkt. Folglich hat B 2. Grad, und der Graph ist daher nicht irreduzibel.

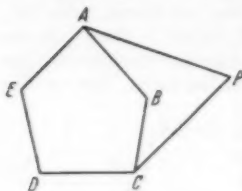


Fig. 32.

Es sei wiederum β der Winkel des regelmäßigen Vierecks mit Seite a . Dann haben wir

Satz 17. Auf der Minimalkugel für $N = 9$ ist $3\alpha + \beta < 360^\circ$.

Beweis: Nach der Abschätzungsformel von FEJES TÓTH gilt für die Minimalkugel

$$\alpha \leq \frac{N}{N-2} \cdot 60^\circ,$$

also im Falle $N = 9$

$$\alpha \leq 77 \frac{1}{7}^\circ.$$

Hiernach erhält man für β (nach der Formel $\cos \beta = 2 \cos \alpha - 1$)

$$\beta < 124^\circ,$$

also

$$3\alpha + \beta < 231 \frac{1}{7}^\circ + 124^\circ < 360^\circ.$$

§ 14. Irreduzible Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$.

Nach § 13 (Satz 12) treten nur Dreiecke und Vierecke auf. Da nach (19) $\alpha > 72^\circ$ ist, gibt es keine Punkte 5. Grades. Die irreduziblen Graphen enthalten also nur Punkte 3. und 4. Grades. In den folgenden Figuren stellt immer \circ einen Punkt 3. Grades und \bullet einen Punkt 4. Grades dar.

Je nachdem, wieviele Dreiecke in einem Punkt zusammenstoßen und unmittelbar aneinandergrenzen, unterscheiden wir drei Fälle:



Fig. 33.

I. Fall. In einem Punkt stoßen drei Dreiecke zusammen.

In A mögen die Dreiecke ABC , ACD und ADE zusammenstoßen. Nach Satz 17 ist

$$3\alpha + \beta < 360^\circ, \text{ also } \angle BAE > \beta.$$

Folglich grenzt an A noch ein Viereck $ABFE$, wobei die Winkel ABF und AEF kleiner als β sind. Demnach sind die Außenwinkel CBF und DEF größer als 2α . Die Punkte B und E haben also 4. Grad. Nach Satz 14 haben auch C und D 4. Grad. Es gehen also von B, C, D, E je eine weitere Verbindung aus, von F eine oder zwei weitere Verbindungen (Fig. 34).

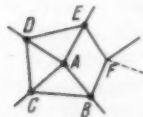


Fig. 34.

Von den Punkten B, C, D, E, F können höchstens zwei benachbarte Punkte mit einem weiteren Punkt verbunden sein.

Beweis: 1. Wären etwa B und D mit einem weiteren Punkt G verbunden, so müßte auch C mit G verbunden sein, da für die freie Verbindung von C

keine andere Möglichkeit bliebe. Dann würden in C vier Dreiecke zusammenstoßen, was nicht möglich ist wegen $4\alpha < 360^\circ$.

2. Wären C und F mit G verbunden, so müßte auch B mit G verbunden sein. Man hätte in A wie in B drei Dreiecke und 1 Viereck, was nicht möglich ist, da das Viereck $ABFE$ nicht regelmäßig sein kann.

3. Wären B und E mit G verbunden, so müßte auch F mit G verbunden sein. An F würden zwei Dreiecke angrenzen, und F hätte 3. Grad entgegen Satz 14.

Für die anderen Fälle gilt aus Symmetriegründen das Entsprechende.

Hat nun F 4. Grad, so können die drei weiteren Punkte G, H, I nur so angeschlossen sein, daß der eine Punkt mit E und F , der zweite mit F und B , der dritte mit C und D verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke entstehen, muß ferner I mit G und H verbunden sein. Durch Vergleich mit den Winkeln bei A geht hervor, daß $\angle GFH$ ein Dreieckswinkel ist. Folglich ist auch GH verbunden. Der so entstandene Graph ist mit dem in § 12 angegebenen (Fig. 24) identisch.

Es bleibt der Fall, daß F 3. Grad hat. Dann dürfen in F nur Vierecke zusammenstoßen (weil sonst die Winkelsumme von 360° nicht erreicht wird). F darf also weder mit B noch mit E einen gemeinsamen Verbindungspunkt haben. Dann sind die drei weiteren Punkte so verbunden, daß B, C und D, E je zu demselben Punkt gehören, während F mit dem 3. Punkt verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke entstehen, müssen G, H, I ein Dreieck bilden. Dann hat I 3. Grad und gehört zu einem Dreieck und zwei Vierecken. Das ist nicht möglich, da dann B und E nach Satz 15 auch 3. Grad haben müßten.

Es ergibt sich also im I. Fall nur der Graph des § 12 (Fig. 24).

II. Fall. Zwei Dreiecke haben eine gemeinsame Seite, und es stoßen nicht drei Dreiecke in einem Punkt zusammen.

An der Strecke AB mögen Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten C, D liegen. Nach Satz 14 haben A und B 4. Grad. Die vierten Verbindungspunkte seien E bzw. F . Nach der Voraussetzung des II. Falles müssen über DAE und CAE Vierecke liegen. Die vierten Eckpunkte seien G und H . (Offenbar sind F, G und H verschiedene Punkte.) E und F können nicht verbunden sein; denn sonst würde $EABF$ einen Streckenzug bilden, der nach Satz 7 ein Gebiet umschließt, in dem kein Punkt liegt. C und D liegen aber zu verschiedenen Seiten dieses Streckenzuges. F kann auch nicht mit C oder D verbunden sein (wegen der Voraussetzung des II. Falles). Folglich kann F außer mit dem letzten Punkt nur noch mit G oder H verbunden sein. Da F mindestens 3. Grad besitzt, muß aber eine Verbindung zwischen F und G oder H bestehen. Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, daß F mit G verbunden ist (Fig. 38).

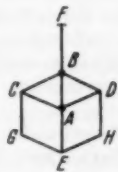


Fig. 37.

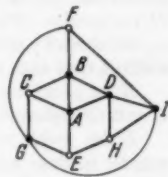


Fig. 38.

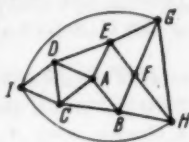


Fig. 35.



Fig. 36.

Dann hat O 3. Grad. In C stoßen 2 Vierecke und ein Dreieck zusammen. Folglich haben nach Satz 15 auch E und F 3. Grad. Wäre nun F mit H verbunden, so blieben für den letzten Punkt nur die Verbindungen mit G und H , d. h. der Punkt hätte 2. Grad, was gegen die Irreduzibilität des Graphen verstößt. Folglich sind F und H mit dem letzten Punkt I verbunden, und es ist auch D mit I verbunden (damit kein Fünfeck entsteht). Da D 4. Grad hat, darf wegen Satz 15 an E kein Dreieck angrenzen. Folglich sind G und H nicht verbunden. Damit kein Fünfeck entsteht, muß schließlich noch G mit I verbunden sein. Dann hat H 3. Grad, und an H grenzen 2 Vierecke und ein Dreieck, was gegen Satz 15 verstößt, da hiernach A 3. Grad haben müßte.

Im II. Fall ist also kein irreduzibler Graph möglich.

III. Fall. Es gibt ein Dreieck, aber keine gemeinsame Seite zweier Dreiecke.

ABC sei ein Dreieck. Dieses hat nach Satz 13 mindestens einen Punkt 4. Grades, etwa A . Dann liegen über AB und AC Vierecke $ABDE$ und $ACFG$ (Fig. 39).

IIIa) B und C haben 3. Grad.

Dann ist, da über BC ein Viereck liegt, D mit F verbunden (Fig. 40). Nach Satz 15 haben mit B und C auch D und F 3. Grad. Somit bleiben für die



Fig. 39.



Fig. 40.

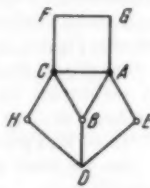


Fig. 41

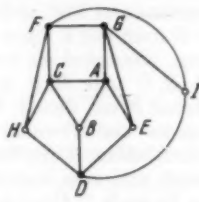


Fig. 42.

letzten beiden Punkte nur Verbindungsmöglichkeiten mit E und G , was für einen irreduziblen Graphen nicht ausreicht.

IIIb) B und C haben verschiedene Grade.

Es kann angenommen werden, daß B 3. Grad und C 4. Grad hat. C sei weiterhin mit H verbunden. Da über BC ein Viereck liegt, ist auch D mit H verbunden (Fig. 41). Nach Satz 15 haben mit B auch E und H 3. Grad.

E ist nicht mit H verbunden, da sonst D 3. Grad hätte und nach Satz 15 auch A und C 3. Grad haben müßten.

E ist nicht mit F verbunden, da sonst G 2. Grad hätte. Ebenso ist nicht H mit G verbunden.

D ist nicht mit F verbunden, da sonst $DHCF$ ein Gebiet umschließen würde, in dem nach Satz 7 kein Punkt liegt, so daß H nur mit F verbunden sein könnte. Dann würden aber an FH zwei Dreiecke grenzen, wobei H 3. Grad hat entgegen Satz 14. Ebenso ist D nicht mit G verbunden.

Es sind also außer Verbindungen mit dem letzten Punkt nur noch Verbindungen zwischen F und H bzw. G und E möglich.

Wären weder HF noch GE verbunden, so müßten E, F, G, H mit dem letzten Punkt I verbunden sein. Dann hätten F und G 3. Grad, und an diese Punkte würden je zwei Vierecke und ein Dreieck angrenzen, was gegen Satz 15

verstößt, da hiernach auch A und C 3. Grad haben müßten. Folglich ist FH oder GE verbunden.

Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, daß H mit F verbunden ist (Fig. 42). Hätte F 3. Grad, so würde CFH ein Dreieck mit zwei Eckpunkten 3. Grades bilden. Dann läge (mit anderen Bezeichnungen) der Fall IIIa vor, der bereits als unmöglich erkannt ist. Folglich muß F 4. Grad haben, also F mit I verbunden sein. Da über FH ein Viereck liegt, ist auch I mit D verbunden.

Wäre EG unverbunden, so müßte I mit E und G verbunden sein, und G wäre ein Punkt 3. Grades, an den zwei Vierecke und ein Dreieck stoßen. Das ist nicht möglich, da dann nach Satz 15 C 3. Grad haben müßte. Also ist EG verbunden.

Wäre IG unverbunden, so ergäbe sich derselbe Widerspruch. Also ist auch IG verbunden. Nun kann nicht mehr I und E verbunden sein, da sonst zwei Dreiecke eine gemeinsame Seite besäßen.

Es ergibt sich so ein Graph, der in anderer Form auch gemäß Fig. 43 dargestellt werden kann.

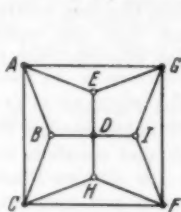


Fig. 43.

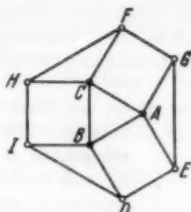


Fig. 44.

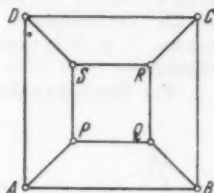


Fig. 45.

IIIc) B und C haben 4. Grad.

Dann liegt über jeder Seite von ABC ein Viereck. Diese seien $ABDE$, $ACFG$ und $BCHI$ (Fig. 44).

Wäre F mit E verbunden, so könnte G nur noch mit E verbunden sein, und G hätte 3. Grad mit angrenzendem Dreieck und zwei angrenzenden Vierecken. Das verstößt gegen Satz 15, da hiernach C 3. Grad haben müßte.

Wäre H mit E verbunden, so bliebe für F nur die Verbindung mit H , was wiederum (mit den Punkten F und A) gegen Satz 15 verstößt.

Aus Symmetriegründen ergibt sich weiterhin, daß nur die Verbindungen EG , DI und FH möglich sind. Dann tritt aber ein Sechseck $DEGFHI$ entgegen Satz 9 auf.

Im Falle III ist also nur der in Fig. 43 angegebene Graph möglich.

IV. Fall. Es treten nur Vierecke auf.

Dann ist die Anzahl K der Strecken gleich $2G$, wenn G die Anzahl der Vierecke ist. Aus der EULERSchen Polyederformel folgt

$$G + 9 = K + 2 = 2G + 2, \text{ also } G = 7, K = 14.$$

Das ist nur möglich, wenn 1 Punkt 4. Grad und 8 Punkte 3. Grad besitzen. Es muß dann mindestens ein Viereck $PQRS$ aus Punkten 3. Grades zusammengesetzt sein (Fig. 45). Die Punkte P, Q, R, S seien ferner der Reihe nach mit

A, B, C, D verbunden. Da nur Vierecke auftreten sollen, müssen A, B, C, D voneinander verschieden und so untereinander verbunden sein, daß $ABCD$ ebenfalls einen geschlossenen Streckenzug bildet. Nach Satz 7 hat nun kein weiterer Punkt ohne Störung Platz. Ein irreduzibler Graph mit 9 Punkten ist also in diesem Falle gar nicht möglich.

Die einzigen irreduziblen Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel sind also die in den Fig. 24 und 43 angegebenen.

§ 15. Irreduzible Graphen mit weniger als 9 Punkten.

Wir haben in § 13 schon gesehen, daß ein irreduzibler Graph mit weniger als 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$ ein Fünfeck enthalten muß.

$ABCDE$ sei ein Fünfeck des Graphen. Nach Satz 11 bestehen keine Diagonalverbindungen. Von den Fünfeckpunkten muß mindestens je eine Verbindung zu weiteren Punkten ausgehen (da jeder Punkt mindestens 3. Grad hat). Nach Satz 16 können nur benachbarte Fünfeckpunkte mit dem gleichen Punkt verbunden sein. Folglich muß es mindestens 3 weitere Punkte geben, mit denen die Fünfeckpunkte verbunden sind. Dann enthält der Graph aber bereits 8 Punkte, und es können nicht mehr Punkte in dem Graphen auftreten. Für die Verbindungen zwischen den Fünfeckpunkten und den weiteren Punkten P, Q, R kommen auf Grund des Satzes 16 nur folgende zwei Fälle in Betracht.

I. Ein Fünfeckpunkt (etwa A) ist mit zwei weiteren Punkten P, Q verbunden.

Die an A angrenzenden Fünfeckpunkte B und E sind ebenfalls mit P bzw. Q verbunden. Die übrigen Fünfeckpunkte C und D sind mit dem letzten Punkt R verbunden (Fig. 46).

II. Ein Punkt P ist nur mit einem Fünfeckpunkt (etwa A) verbunden, während die Punkte Q, R mit je zwei Fünfeckpunkten B, C bzw. D, E verbunden sind (Fig. 47).

Für diese beiden Fälle sind noch die Verbindungsmöglichkeiten zwischen P, Q und R zu untersuchen.

Fall I. Nach Satz 13 hat R 4. Grad, ist also noch mit P und Q verbunden. Gleichgültig, ob P mit Q verbunden ist oder nicht, wir können immer folgendermaßen schließen:

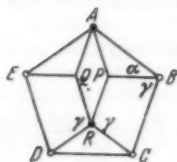


Fig. 46.



Fig. 47.

$$\begin{aligned} \text{Aus} & \quad \sphericalangle APR = \sphericalangle AQR \\ \text{folgt} & \quad \sphericalangle BPR = \sphericalangle EQR. \end{aligned}$$

Folglich ist auch

$$\sphericalangle PRQ = \sphericalangle QRD = \sphericalangle PBC = \gamma.$$

Die Winkelsumme bei R ist somit

$$360^\circ = \alpha + 2\gamma + \sphericalangle PRQ \geq 2\alpha + 2\gamma.$$

Daraus folgt

$$\alpha + \gamma \leq 180^\circ.$$

Es liegen also alle von B ausgehenden Strecken in einem Winkelraum $\leq 180^\circ$. Demnach ist der Graph nicht irreduzibel.

Fall II. Da P mindestens 3. Grad hat, ist P mit Q und R verbunden. Nach Satz 13 haben Q und R 4. Grad, sind also untereinander verbunden. Hiermit ergibt sich (Fig. 49) der einzig mögliche irreduzible Graph mit einem Fünfeck. Soll dieser Graph in einer Minimalkugel für $N = 9$ auftreten, so muß der 9. Punkt im Innern des Fünfecks liegen.

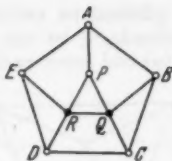


Fig. 49.

§ 16. Die Minimalkugel für $N = 9$.

Nach § 14 und § 15 kommen als Minimalkugeln für $N = 9$ nur folgende Graphen in Betracht:

- a) Der in § 12 angegebene Graph (Fig. 24).
- b) Der in § 14 unter III b gefundene Graph (Fig. 43).
- c) Der in § 15 unter II gefundene Graph (Fig. 49), ergänzt durch einen isolierten Punkt im Fünfeck.

Die beiden letzten Graphen besitzen noch je einen Freiheitsgrad. Die darin auftretenden Winkel lassen sich als Funktionen eines einzigen Winkels angeben. Um die Minimalkugel zu finden, untersuchen wir, ob diese Funktionen *konkav* (mit fallender Ableitung) oder *konvex* (mit wachsender Ableitung) sind. Dazu benötigen wir den

Satz 18. Eine fallende konkave Funktion $\varphi(\psi(\gamma))$ einer konvexen Funktion $\psi(\gamma)$ ist eine konkave Funktion von γ .

Beweis: Ist $\psi(\gamma)$ eine konvexe Funktion, so gilt

$$\frac{d^2 \psi}{d \gamma^2} > 0.$$

φ ist eine fallende konkave Funktion von ψ bei

$$\frac{d \varphi}{d \psi} < 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{d \psi^2} < 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2} = \frac{d^2 \varphi}{d \psi^2} \cdot \left(\frac{d \psi}{d \gamma} \right)^2 + \frac{d \varphi}{d \psi} \cdot \frac{d^2 \psi}{d \gamma^2} < 0.$$

D. h. $\varphi(\psi(\gamma))$ ist eine konkave Funktion von γ .

In dem Graphen b) sei jetzt Z derjenige Punkt 4. Grades, der mit vier Punkten 3. Grades A, B, C, D in dieser Reihenfolge verbunden ist (Fig. 50). Die übrigen Punkte 4. Grades P, Q, R, S mögen so liegen, daß die vier Dreiecke APS , BPQ , CQR und DRS sind. Der Rhombus $PQRS$ habe bei P und R den Winkel δ , bei Q und S den Winkel δ' . Die anderen an P und R angrenzenden Rhomben haben an diesen Punkten den gleichen Winkel γ . Ebenso haben die anderen an Q und S angrenzenden Rhomben hier den gleichen Winkel ε . Die anderen Winkel der Rhomben mit γ bzw. ε seien γ' bzw. ε' .

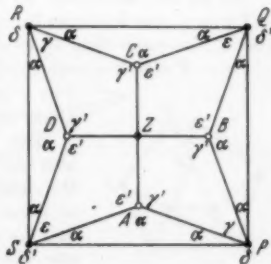


Fig. 50.

Nach Satz 10 ist γ' eine konkave Funktion von γ , ebenso δ' eine konkave Funktion von δ . Da $\delta = 360^\circ - 2\alpha - \gamma$ ist, ist δ' auch eine konkave Funktion von γ . Dann ist $\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \delta'$ eine konvexe Funktion von γ .

Ferner ist nach Satz 10 ε' eine konkave Funktion von ε , und zwar eine fallende. ε' ist also eine fallende konkave Funktion einer konvexen Funktion $\varepsilon(\gamma)$ und somit nach Satz 18 selbst eine konkave Funktion von γ .

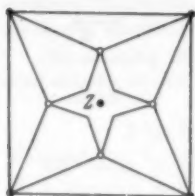


Fig. 51.

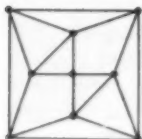


Fig. 52.

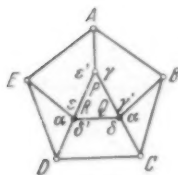


Fig. 53.

Es ist nun nach Satz 10 γ' eine konkave Funktion von γ , also $\delta = 360^\circ - 2\alpha - \gamma'$ eine konvexe Funktion von γ . δ' ist eine fallende konkave Funktion von δ , also nach Satz 18 eine konkave Funktion von γ . Dann ist $\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \delta'$ eine konvexe Funktion von γ . ε' ist eine fallende konkave Funktion von ε , also nach Satz 18 eine konkave Funktion von γ . Dann ist auch $\gamma + \varepsilon'$ eine konkave Funktion von γ .

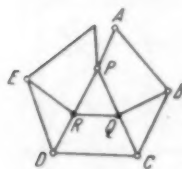


Fig. 54.

Die bei P auftretende Winkelsumme $\gamma + \varepsilon'$ nimmt also ihr Minimum nur am Rande des für γ zulässigen Bereiches ein. Hat γ nicht einen zulässigen Extremwert, so kann man durch eine kleine Verschiebung erreichen, daß die Winkelsumme $\gamma + \varepsilon'$ bei P verkleinert wird, daß also die bei P zusammenstoßenden Rhomben hier auseinanderfallen (Fig. 54). Beläßt man nun den Punkt A bei einem dieser Rhomben, etwa bei APQB, so fällt die Verbindung AE fort. Der Punkt A erhält also 2. Grad, und der Graph ist reduzibel. Daraus folgt:

Soll der Graph c) irreduzibel sein, so muß der Winkel γ einen Extremwert

Mit γ' und ε' ist auch $\gamma' + \varepsilon'$ eine konkave Funktion von γ . Ihr Minimum liegt am Rande des für γ zulässigen Bereiches. Hat nun γ nicht eine Randlage, so läßt sich also durch eine kleine Veränderung des Winkels γ erreichen, daß die Winkelsumme $\gamma' + \varepsilon'$, die bei A, B, C, D auftritt, vermindert wird. Dadurch spalten sich die von den Punkten 3. Grades nach Z führenden Verbindungen auf und die Ecken der vorher bei Z zusammenstoßenden Rhomben rücken auseinander. Der Punkt Z kann nun zwischen diesen Ecken so untergebracht werden, daß er von allen übrigen Punkten des Graphen isoliert ist. Daraus folgt: Der Graph ist nur irreduzibel, wenn γ einen zulässigen Extremwert annimmt. Ein solcher liegt nur dann vor, wenn zwischen zwei bisherigen Punkten 3. Grades (etwa A und B) eine zusätzliche Verbindung zu ziehen ist. Dann ist $\gamma' = 2\alpha$, und es ist auch C mit D zu verbinden. Man erhält einen Graphen (Fig. 52), der mit dem Graphen a) identisch ist.

Bei dem Graphen c) seien P, Q, R die nicht zu dem Fünfeck gehörenden Punkte, und zwar sei P der Punkt 3. Grades (Fig. 53). Die Winkel der an das Dreieck PQR angrenzenden Rhomben seien in dieser Reihenfolge $\gamma, \gamma', \delta, \delta', \varepsilon, \varepsilon'$, wobei γ, γ' zu demselben Rhombus gehören, ebenso δ, δ' und $\varepsilon, \varepsilon'$. Dabei mögen γ und ε' die Winkel bei P sein.

Wir halten das Dreieck PQR fest und verändern γ , und zwar so, daß die an PQR angrenzenden Dreiecke und Vierecke als solche bestehen bleiben und sich außer im Punkt P wie vorher aneinanderschließen, während sich evtl. die von P ausgehende Rhombuseite PA aufspaltet.

annehmen. Das ist nur dann der Fall, wenn eine zusätzliche Verbindung zwischen zwei bisherigen Punkten 3. Grades besteht, und hierfür kommt nur eine Verbindung zwischen P und B oder E in Betracht. Aus Symmetriegründen kann man sich darauf beschränken, daß P mit B verbunden ist. Es entsteht ein Teilgraph des Graphen a). Dieser legt die Kugel bereits fest, ergibt also dieselbe Kugel wie der Graph a). Ein 9. Punkt S , der mit A, C, D und E verbunden ist, kann hier noch zugefügt werden (Fig. 55).

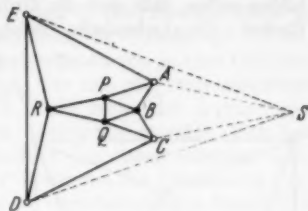


Fig. 55.

Hiermit ist gezeigt, daß die Minimalfigur für $N = 9$ durch den Graphen a) dargestellt wird. Der Radius der Minimal-
kugel ist also gemäß § 12

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

§ 17. Einige Lagerungen von mehr als 9 Punkten auf der Kugel.

In den Fällen $N > 9$ ist außer für $N = 12$ kein genauer Wert des Minimal-
kugelradius bekannt. Es lassen sich aber hier einige Graphen angeben, die
wahrscheinlich die entsprechenden Minimalfiguren darstellen. Jedenfalls
liefern sie für die Radien der Minimalkugeln Abschätzungen nach oben.

Bei der Auswahl der Graphen hat man darauf zu achten, daß die einzelnen
Punkte möglichst hohen Grad erhalten, so daß die Punkte möglichst nahe
aneinanderrücken und die Kugel möglichst klein gehalten wird.

$$N = 10$$

Punkte 5. Grades dürfen nicht auftreten, da sonst ein Ikosaeder der Kugel
einbeschrieben werden kann und die Kugel sicher nicht minimal ist. Ein
Graph, in dem alle Punkte 4. Grad besitzen, ist bei $N = 10$ nicht möglich,
wohl aber ein Graph mit 2 Punkten 3. Grades und 8 Punkten 4. Grades.

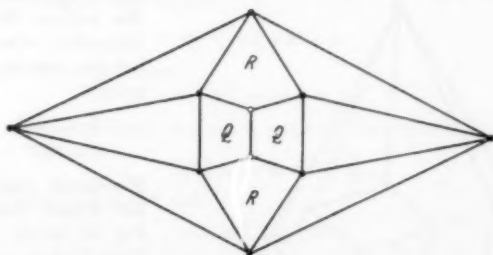


Fig. 56.

Hier treten 6 Dreiecke mit den Winkeln α und 5 Vierecke auf, und zwar
2 regelmäßige Vierecke Q mit den Winkeln β , 2 kongruente Rhomben R mit
den Winkeln $360^\circ - 2\beta$, $360^\circ - 2\alpha - \beta$ und ein Rhombus mit den Winkeln
 $360^\circ - 3\alpha$, $2\beta - 2\alpha$. Der letztgenannte Rhombus bildet in Fig. 56 die
äußere Umrandung. Aus den Forderungen, daß einerseits $360^\circ - 2\beta$ und

$360^\circ - 2\alpha - \beta$, andererseits $360^\circ - 3\alpha$ und $2\beta - 2\alpha$ Winkel eines Vierecks bilden sollen, läßt sich die Größe der Kugel berechnen. Man erhält für den Radius r die algebraische Gleichung

$$16r^6 - 44r^4 + 34r^2 - 7 = 0.$$

$$N = 11 \text{ und } N = 12$$

Für $N = 12$ ist die dem Ikosaeder der Kantenlänge 1 umbeschriebene Kugel die Minimalkugel. Diese stellt wahrscheinlich auch die Minimalkugel für $N = 11$ dar.

$$N = 13$$

Mit $N = 13$ wird anscheinend zuerst der Radius 1 überschritten. Eine verhältnismäßig günstige Lagerung von 13 Punkten erhält man, wenn man einen Punkt in den Nordpol legt und die übrigen zu je Vieren zonal anordnet, und zwar symmetrisch und mit möglichst geringen Abständen. Die numerische Auswertung für den Radius des durch Fig. 57 dargestellten Graphen ergibt

$$r = 1,045 \dots$$

$$N = 14$$

Eine günstige Lagerung von 14 Punkten wird durch einen Graphen angegeben, in dem alle Punkte 4. Grad besitzen. Es treten hier 8 Dreiecke und zwei Gruppen von je 4 Rhomben auf. Bei der einen

Gruppe von Rhomben tritt der Winkel 90° auf. Ist γ der andere Winkel dieser Rhomben, so sind die Winkel der zweiten Rhombengruppe

$$\delta = 180^\circ - \alpha \text{ und}$$

$$\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \gamma.$$

Hierdurch wird die Größe der Kugel festgelegt. In Fig. 58 ist ein 7. Punkt im Unendlichen anzunehmen.

$$N = 15$$

Man erhält eine günstige Lagerung, wenn man in 5 Zonen je 3 Punkte so anordnet, daß die Punkte einer Zone auf dem gleichen

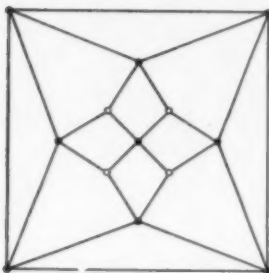


Fig. 57.

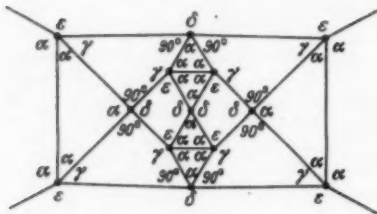


Fig. 58.

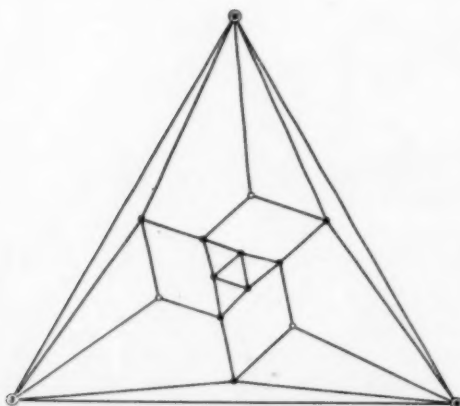


Fig. 59.

Breitenkreis liegen und daß ihre Längengrade jeweils um 120° differieren. Dabei sollen die Punkte der 1. (nördlichsten) und 5. (südlichsten) Zone je ein gleichseitiges Dreieck mit dem Minimalabstand als Seitenlänge bilden. Die 2. und 4. Zone ist so zu wählen, daß hier jeder Punkt von je zwei Punkten der 1. bzw. 5. Zone den Minimalabstand besitzt. Um nun mit einer möglichst kleinen Kugel auszukommen, wird für die 3. Zone nicht der Äquator genommen, sondern eine etwas unsymmetrische Anordnung gewählt. Man hat die nördlichen Punkte (1. und 2. Zone) gegenüber den entsprechenden südlichen Punkten (4. und 5. Zone) in geeigneter Weise um die Polachse zu verdrehen, so daß man die Punkte der 3. Zone so dazwischenlegen kann, daß jeder Punkt der 3. Zone von je einem Punkt der 2., 4. und 5. Zone gerade den Mindestabstand erhält. Der entsprechende Graph ist in Fig. 59 angegeben. Die Punkte der 5. Zone besitzen 5. Grad, die Punkte der 3. Zone 3. Grad, alle übrigen 4. Grad. Durch den Graphen ist die Größe der Kugel eindeutig festgelegt.

$$N = 16$$

Als günstig erweist sich eine zonale Anordnung von je 4 Punkten, bei der alle Punkte 4. Grad besitzen. Hierbei treten 8 Dreiecke und 10 Rhomben auf. Die Kugel wird durch den Graphen der Fig. 60 eindeutig festgelegt.

$$N = 24$$

Eine besonders günstige Anordnung ist die der Fig. 21. Die Figur stellt einen von Archimedes gefundenen halbbregulären Körper dar, begrenzt von 32 Dreiecken und 6 Vierecken. In jeder Ecke stoßen 4 Dreiecke mit dem Winkel α und ein Viereck mit dem Winkel β zusammen; man hat also

$$(20) \quad \beta = 360^\circ - 4\alpha.$$

Aus Fig. 22 entnimmt man ferner

$$(21) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = 1.$$

Aus (20) und (21) erhält man

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha \cdot \cos \alpha = 1.$$

Setzt man darin den Wert von $\cos \alpha$ nach (2) ein, so erhält man schließlich

$$(22) \quad \operatorname{tg}^2 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\alpha = 65^\circ 11' 16'' \dots$$

$$\cos \alpha = 0,41965 \dots$$

Für das Quadrat des Kugeldurchmessers erhält man den auffallend kleinen Wert

$$d^2 = 7,223 \dots$$

$$N = 32$$

Setzt man 12 Punkte in die Ecken eines Ikosaeders und 20 Punkte in die Mitten der Dreiecke, so erhält man eine recht günstige Lagerung von 32

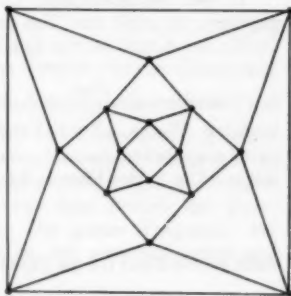


Fig. 60.

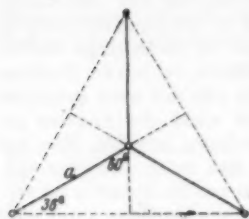


Fig. 61.

Punkten. Die 12 Punkte haben den Grad 5, die 20 Punkte den Grad 3. Der Teil des Graphen, der in einem Dreieck liegt, ist in Fig. 61 dargestellt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit Winkeln 36° und 60° und Hypotenuse a entnimmt man

$$\cos a = \cot 60^\circ \cot 36^\circ$$

$$= 0,7947 \dots$$

$$d^2 = \frac{2}{1 - \cos a} = 9,740 \dots$$

§ 18. Tabellarische Übersicht.

In der nachstehenden Übersicht sind die Größen der Minimalkugeln angegeben, die sich aus den untersuchten Graphen ergeben. Als Maß für die Größe der Kugel ist das Quadrat

$$d^2 = 4 r^2$$

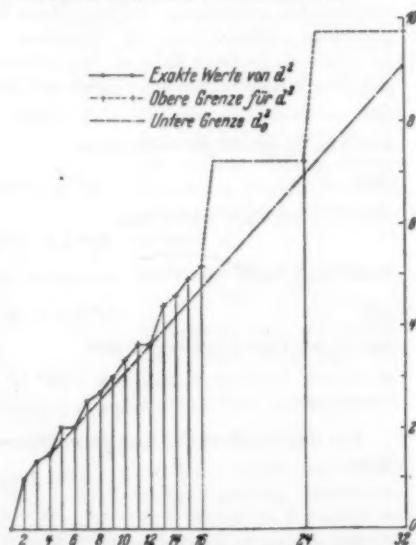
des Durchmessers genommen. Die eingeklammerten Zahlen sind die nur vermuteten Werte. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte $d_0^2 (\leq d^2)$ danebengestellt, die sich aus der Abschätzungsformel von FEJES TÓTH ergeben. Die in der letzten Spalte stehende prozentuale Abweichung

$$p = \frac{d^2 - d_0^2}{d_0^2} \cdot 100\%$$

stellt ein Maß dar für die Dichte der günstigsten Lagerung von N Punkten.

N	d^2	d_0^2	p
2	1	—	—
3	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	0%
4	1,5	1,5	0%
5	2	1,742 ..	15%
6	2	2	0%
7	2,532 ..	2,264 ..	12%
8	2,707 ..	2,532 ..	7%
9	3	2,802 ..	7%
10	(3,358 ..)	3,073 ..	(9%)
11	(3,618 ..)	3,346 ..	(8%)
12	3,618 ..	3,618 ..	0%
13	(4,373 ..)	3,891 ..	(12%)
14	(4,587 ..)	4,165 ..	(11%)
15	(4,900 ..)	4,439 ..	(11%)
16	(5,159 ..)	4,713 ..	(10%)
24	(7,222 ..)	6,911 ..	(5%)
32	(9,740 ..)	9,113 ..	(7%)

Fig. 62.



(Eingegangen am 23. Oktober 1950.)

Über die Darstellung der Modulformen n -ten Grades durch Poincarésche Reihen.

Von

HANS MAASS in Heidelberg.

Man verdankt H. PETERSSON die Erkenntnis, daß die POINCARÉschen Reihen

$$(1) \quad g_{-k}(z, t) = \sum_L e^{2\pi i t L(z)} (cz + d)^{-k} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

die lineare Schar der (ganzen) Modulformen ersten Grades von der Dimension $-k$ ($k > 2, k = 0(2)$) erzeugen¹⁾. Dabei durchläuft $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein vollständiges System von Modulsstitutionen ersten Grades mit nicht assoziierten zweiten Zeilen (c, d) . Zwei Zeilen (c, d) und (c^*, d^*) heißen assoziiert, wenn $cd^* - dc^* = 0$ ist. Dieser Darstellungssatz ist weitgehender Verallgemeinerungen fähig. In sinngemäßer Fassung gilt er für alle nach dem Prinzip der Quersummation gebildeten POINCARÉschen Reihen²⁾. Die ganze Tragweite der PETERSSONschen Ansätze zeigt sich jedoch erst in der Anwendbarkeit auf Funktionen in mehreren Veränderlichen^{3) 4)}.

Bei dieser Sachlage war es naheliegend, die PETERSSONschen Methoden auf die SIEGELschen Modulformen anzuwenden. Wenn auch grundsätzlich feststand, wie man hier zu einem Darstellungssatz kommen mußte, so waren im einzelnen doch noch erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. Nach wiederholten Bemühungen gelang es schließlich, die PETERSSONschen Ergebnisse über POINCARÉsche Reihen zur Modulgruppe ersten Grades in angemessener Form auf die Modulgruppe n -ten Grades zu übertragen. Diese Theorie soll im folgenden dargestellt werden. Zum besseren Verständnis wird eine kurze Übersicht vorausgeschickt.

Bekanntlich⁵⁾ gestattet jede Modulform n -ten Grades von der Dimension $-k$ eine Fourierreentwicklung der Art

$$(2) \quad g_{-k}(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)},$$

wobei über alle halbganzen nicht-negativen symmetrischen Matrizen $T = T^{(n)}$ summiert wird. $Z = Z^{(n)} = (z_{\mu\nu})$ bezeichnet eine komplexe symmetrische

¹⁾ PETERSSON, H.: Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. Jber. dtsch. Math. Ver. 49, 49 (1939).

²⁾ PETERSSON, H.: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitsätze für die POINCARÉschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 14, 22 (1941).

³⁾ MAASS, H.: Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Math. Ann. 117, 538 (1940).

⁴⁾ MAASS, H.: Theorie der POINCARÉschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der HILBERTschen Modulgruppe. Math. Ann. 118, 518 (1942).

⁵⁾ SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulformen n -ten Grades. Math. Ann. 116, 617 (1939).

Matrix mit positivem Imaginärteil. Wendet man das Verfahren der Quersummation auf diesen Entwicklungstypus an, so erhält man die POINCARÉschen Reihen

$$(3) \quad g_{-k}(Z, T) = \sum_{\sigma} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k} \quad (T \geq 0).$$

Die Summation ist hier über ein vollständiges System von Modulusubstitutionen n -ten Grades

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

zu erstrecken, die verschiedene Reihenglieder ergeben. Die Konvergenz der POINCARÉschen Reihen (3) wird nach bewährtem Verfahren⁶⁾ unter Verwendung von Begriffsbildungen der symplektischen Geometrie⁷⁾ bewiesen. Es sei $X + iY$ die Zerlegung von Z in Real- und Imaginärteil. Es wird dann festgestellt, daß die Reihen (3) in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich des Z -Gebietes $Y > 0$ absolut und gleichmäßig konvergieren, sobald

$$(4) \quad k > \operatorname{Min}(2n, n+1 + \operatorname{Rang} T)$$

ist. Ob diese Bedingung verbessert werden kann, müßte noch besonders untersucht werden. Als Spezialfall erhält man noch die von H. BRAUN⁸⁾ angegebene Konvergenzbedingung für die Eisensteinreihen ($T = 0$).

Auf Grund der angegebenen Konvergenzverhältnisse ergibt sich einerseits die Regularität der POINCARÉschen Reihen als Funktionen der z_{μ} ($\mu \leq \nu$) in dem Gebiet $Y > 0$, andererseits die für Modulformen charakteristische Transformationsformel

$$(5) \quad g_{-k}(\sigma(Z), T) = |CZ + D|^k g_{-k}(Z, T).$$

Dabei bezeichnet (C, D) wieder die zweite Matrizenzeile der Substitution σ . Um zu beweisen, daß $g_{-k}(Z, T)$ eine Modulform darstellt, braucht nur noch die Beschränktheit der POINCARÉschen Reihe in dem von SIEGEL⁹⁾ angegebenen Fundamentalbereich der Modulgruppe – wir bezeichnen ihn mit \mathfrak{F}_n – gezeigt zu werden. Gleichwertig damit ist, daß $g_{-k}(Z, T)$ in eine FOURIERreihe der Art (2) entwickelt werden kann. Im Falle $n = 1$ lag hier eine besondere Schwierigkeit vor, da sich mit Hilfe eines PETERSSONschen Hilfssatzes¹⁰⁾ in \mathfrak{F}_1 sofort eine von z unabhängige konvergente Majorante für $g_{-k}(z, t)$ angeben ließ. Dieser Hilfssatz läßt sich zwar in der erforderlichen Weise verallgemeinern und liefert für die Eisensteinreihen die gleichmäßige Konvergenz in \mathfrak{F}_n ; doch kann im Falle $T \neq 0$ auf diesem oder ähnlichem Wege keine von Z unabhängige konvergente Majorante für $g_{-k}(Z, T)$ in \mathfrak{F}_n gewonnen werden. Der allgemeine Fall wird nun so erledigt, daß mit Hilfe des Metrisierungsintegrals

$$(6) \quad (h(Z), g(Z)) = \int \cdots \int_{\mathfrak{F}_n} h(Z) \overline{g(Z)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y),$$

⁶⁾ PETERSSON, H.: Über den Bereich absoluter Konvergenz der POINCARÉschen Reihen. Acta math. 80, 23 (1948).

Diese Untersuchungen waren Gegenstand eines Vortrags, den Herr PETERSSON bereits 1941 in Heidelberg hielt, konnten also in ⁴⁾ schon berücksichtigt werden.

⁷⁾ SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. 65, 1 (1943). — MAASS, H.: Über eine Metrik im SIEGELschen Halbraum. Math. Ann. 118, 312 (1942).

⁸⁾ BRAUN, H.: Konvergenz verallgemeinerter EISENSTEINscher Reihen. Math. Z. 44, 387 (1939).

⁹⁾ Siehe ⁴⁾, S. 32, Hilfssatz 4.

wobei $d(X) = \prod_{\mu \leq \nu} d x_{\mu\nu}$, $d(Y) = \prod_{\mu \leq \nu} d y_{\mu\nu}$, ist, unmittelbar gezeigt wird, daß in der FOURIER-Reihe von $g_{-k}(Z, T)$ nur solche Koeffizienten von Null verschieden sein können, die zu nicht-negativen Exponentenmatrizen gehören.

Die auszuführenden Integralumformungen ergeben zugleich folgenden Tatbestand: Verschwinden in der FOURIER-Entwicklung (2) der Modulform $g_{-k}(Z)$ alle Koeffizienten $a(T)$ mit $|T| = 0$ – Formen mit dieser Eigenschaft sollen *Spitzenformen* genannt werden –, so existiert das Integral (6) für $h(Z) = g_{-k}(Z)$, $g(Z) = g_{-k}(Z, T)$. Wir bezeichnen es als das *Skalarprodukt* der beiden Modulformen. Die Berechnung ergibt

$$(7) \quad (g_{-k}(Z), g_{-k}(Z, T)) = \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon(T)} a(T) |T|^{\frac{n+1}{2}-k} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}-nk} \prod_{\nu=1}^n \Gamma\left(k - \frac{n+\nu}{2}\right) & \text{für } |T| > 0, \\ 0 & \text{für } |T| = 0. \end{cases}$$

Hierin ist $a(T)$ der FOURIER-Koeffizient der Spitzenform $g_{-k}(Z)$ zur Exponentenmatrix T und $\varepsilon(T)$ im Falle $|T| > 0$ die Anzahl der unimodularen $U = U^{(n)}$ mit $T[U] = T$. Die Relation (7) ist als die *Grundformel* der metrischen Formentheorie anzusprechen. Im Falle $n = 1$ hat man in der Grundformel ein ausreichendes Hilfsmittel zum Beweis des Darstellungssatzes; im einzelnen ist hier festzustellen, daß eine gegebene Modulform mit Hilfe von $g_{-k}(z, 0)$ auf eine Spitzenform reduziert werden kann und daß eine Spitzenform, die auf allen POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(z, t)$ mit $t > 0$ senkrecht steht, identisch verschwindet. Schließlich muß noch beachtet werden, daß diese Reihen für $t > 0$ selbst Spitzenformen darstellen. Im allgemeinen Fall ($n > 1$) sind nun zwei Aufgaben zu lösen. Man hat unter den POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ diejenigen ausfindig zu machen, die mit Sicherheit Spitzenformen darstellen, und ferner zu zeigen, daß eine gegebene Modulform mit Hilfe der übrigen Reihen auf eine Spitzenform reduziert werden kann. Sodann läßt sich der Darstellungssatz mit Hilfe der Grundformel wie im Falle $n = 1$ beweisen.

Spitzenformen können allgemein wie folgt charakterisiert werden: Setzt man $Z = \begin{pmatrix} Z^* & n \\ n' & i\lambda \end{pmatrix}$, $Z^* = Z^{*(n-1)}$, $\lambda > 0$, n = Nullspalte und bestimmt man für eine vorgegebene Modulform n -ten Grades $g_{-k}(Z)$ den Grenzwert

$$(8) \quad g_{-k}(Z^*) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g_{-k}(Z),$$

so erhält man, wie SIEGEL⁵⁾ gezeigt hat, eine Modulform $(n-1)$ -ten Grades. Wir setzen

$$(9) \quad g_{-k}(Z^*) = \Phi(g_{-k}(Z)).$$

Auf Grund der SIEGELschen Untersuchungen ist sofort festzustellen, daß die Spitzenformen $g_{-k}(Z)$ durch $\Phi(g_{-k}(Z)) = 0$ gekennzeichnet sind. Es liegt nunmehr nahe, alle POINCARÉschen Reihen der funktionalen Operation Φ zu unterwerfen. Eine besondere Überlegung ist erforderlich, um einen gliedweisen Grenzübergang in sämtlichen Reihen zu rechtfertigen. Man erkennt schließlich, daß für $|T| \neq 0$

$$\Phi(g_{-k}(Z, T)) = 0$$

ist, während die Formen $\Phi(g_{-k}(Z, T))$ mit $|T| = 0$ in ihrer Gesamtheit mit

dem vollen System der POINCARÉschen Reihen $(n-1)$ -ten Grades übereinstimmen. Durch vollständige Induktion nach n gelangt man nun sofort zum Ziel. Es darf angenommen werden, daß der Darstellungssatz für Formen $(n-1)$ -ten Grades richtig ist. Sodann läßt sich eine beliebige Form n -ten Grades mit Hilfe der Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit $|T| = 0$ auf eine Spitzenform reduzieren. Die Darstellbarkeit der Spitzenformen durch die Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit $|T| \neq 0$ ist nun wie im Falle $n = 1$ einzusehen.

Auf die *metrische Kennzeichnung* der POINCARÉschen Reihen sei hier noch hingewiesen. Es gelten analoge Aussagen wie im Falle $n = 1$; sie können aus der Grundformel gewonnen werden.

Im folgenden bezeichnet:

M_n die Modulgruppe n -ten Grades,

\mathfrak{H}_n den Bereich der komplexen symmetrischen Matrizen $Z = Z^{(n)}$ mit positivem Imaginärteil Y ,

\mathfrak{F}_n den SIEGELschen Fundamentalbereich von M_n in \mathfrak{H}_n ,

\mathfrak{K}_n den Bereich der nach MINKOWSKI reduzierten positiven symmetrischen Matrizen $Y = Y^{(n)}$,

\mathfrak{B}_n den Bereich der modulo 1 reduzierten reellen symmetrischen Matrizen $X = X^{(n)}$.

Setzt man $Z = X + iY$, $X = (x_{\mu\nu})$, $Y = (y_{\mu\nu})$, so bedeutet

$X \in \mathfrak{B}_n$: $X = X'$ (transponierte Matrix), $-1/2 \leq x_{\mu\nu} \leq 1/2$ für alle μ, ν ;

$Y \in \mathfrak{K}_n$: $Y > 0$, $Y[g_\mu] \geq y_{\mu\mu}$, für $\mu = 1, 2, \dots, n$ und alle Spalten g_μ aus ganzen Zahlen g_1, g_2, \dots, g_n , von denen $g_\mu, g_{\mu+1}, \dots, g_n$ teilerfremd zu wählen sind, $y_{\nu\nu+1} \geq 0$ für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$;

$Z \in \mathfrak{F}_n$: $Z = Z'$, $Y > 0$, $\text{abs}(CZ + D) \geq 1$ für alle zweiten Matrixzeilen (C, D) von Modulsstitutionen n -ten Grades, $Y \in \mathfrak{K}_n$, $X \in \mathfrak{B}_n$.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

Wir verallgemeinern zunächst den PETERSSONschen Hilfssatz⁹⁾. Wenn auch im folgenden kein Gebrauch davon gemacht wird, so bleibt doch ein gewisses Interesse an diesem Satz im Hinblick auf die EISENSTEINschen Reihen bestehen.

Hilfssatz 1: Es sei $Z = X + iY \in \mathfrak{F}_n$, $\text{Sp}(XX') \leq m_1$, $\text{Sp}(Y^{-1}) \leq m_2$.

Dann ist

$$(10) \quad \text{abs}(CZ + D) \geq \varepsilon \text{ abs}(Ci + D)$$

für alle zweiten Matrixzeilen (C, D) reeller symplektischer Matrizen mit einer nur von n, m_1, m_2 abhängigen positiven Konstanten ε .

Beweis: 1) Es sei $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Die Elemente der reellen Matrizen

$$R^{(n, m)} = (r_{\mu\nu}), \quad S^{(n, m)} = (s_{\mu\nu}) \quad (n \geq m)$$

mögen den Gleichungen $s_{\mu\nu} = \lambda_\mu r_{\mu\nu}$ genügen. Bezeichnen wir mit r_1, r_2, \dots, r_m die Spaltenvektoren von $R^{(n, m)}$ und mit s_1, s_2, \dots, s_m die von $S^{(n, m)}$, so gilt

$$(11) \quad (\lambda_{n-m+1} \lambda_{n-m+2} \dots \lambda_n)^{-2} |\hat{s}'_\mu \hat{s}'_\nu| \leq |r'_\mu r'_\nu| \leq (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^{-2} |\hat{s}'_\mu \hat{s}'_\nu|$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \dots, m).$$

Bekanntlich ist nämlich

$$\begin{aligned} |r'_\mu r_\nu| &= \sum_{1 \leq e_1 < \dots < e_m \leq n} \left| \frac{r_{e_1,1} \dots r_{e_1,m}}{r_{e_m,1} \dots r_{e_m,m}} \right|^2 \\ &= \sum_{1 \leq e_1 < \dots < e_m \leq n} (\lambda_{e_1} \lambda_{e_2} \dots \lambda_{e_m})^{-2} \left| \frac{s_{e_1,1} \dots s_{e_1,m}}{s_{e_m,1} \dots s_{e_m,m}} \right|^2, \\ |\delta'_\mu \delta_\nu| &= \sum_{1 \leq e_1 < \dots < e_m \leq n} \left| \frac{s_{e_1,1} \dots s_{e_1,m}}{s_{e_m,1} \dots s_{e_m,m}} \right|^2, \end{aligned}$$

woraus (11) sofort folgt.

2) Es sei $Y = Y^{(n)} > 0$, $T = T^{(n)} = T'$ reell. Wir transformieren Y mit Hilfe einer orthogonalen Matrix W auf Diagonalgestalt:

$$Y[W] = D^2, \quad D = (\delta_{\mu\nu} \lambda_\nu), \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

und setzen $T[W] = S = (s_{\mu\nu})$, $Q = S[D^{-1}] = (q_{\mu\nu})$.

Dann ist

$$\begin{aligned} |Y| &= |D|^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^2, \quad s_{\mu\nu} = \lambda_\mu \lambda_\nu q_{\mu\nu}, \\ \text{abs}(T + i Y)^2 &= \text{abs}(S + i D^2)^2 = \text{abs}(Q + i E)^2 |Y|^2 \\ &= |Q' Q + E| |Y|^2. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Spaltenvektoren von Q und S mit q_1, q_2, \dots, q_n bzw.

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ und setzen noch $q_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} r_\nu$, so ergibt sich mit Hilfe von (11)

$$\begin{aligned} |Q' Q + E| &= 1 + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_\nu} |q'_{\mu_j} q_{\mu_k}| \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_\nu} (\lambda_{\mu_1} \dots \lambda_{\mu_\nu})^{-2} |r'_{\mu_j} r_{\mu_k}| \\ &\geq 1 + \sum_{\nu=1}^n (\lambda_{n-\nu+1} \dots \lambda_n)^{-2} \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_\nu} |\delta'_{\mu_j} \delta_{\mu_k}|, \end{aligned}$$

mithin

$$\text{abs}(T + i Y)^2 \geq |Y|^2 + \sum_{\nu=1}^n (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})^4 \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_\nu} |\delta'_{\mu_j} \delta_{\mu_k}|.$$

Wenn $\text{Sp}(Y^{-1}) \leq m_2$ ist, so gibt es für alle charakteristischen Wurzeln λ_j von Y eine positive nur von m_2 abhängige untere Schranke. Für ein geeignetes positives $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n, m_2)$ ist also

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-\nu})^4 \geq \varepsilon_1^2 \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, n$$

und daher

$$\begin{aligned} \text{abs}(T + i Y)^2 &\geq \varepsilon_1^2 \left(1 + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_\nu} |\delta'_{\mu_j} \delta_{\mu_k}| \right) = \varepsilon_1^2 |S' S + E| \\ &= \varepsilon_1^2 |T' T + E|, \end{aligned}$$

woraus

(12)

$$\text{abs}(T + i Y) \geq \varepsilon_1 \text{abs}(T + i E)$$

erhellt.

3) Sei $\text{Sp}(X, X') \leq m_1$ und $S = S^{(n)} = S'$ reell. Dann liegt X in einem festen Würfel und nach^{a)} gibt es eine positive Konstante $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n, m_1)$, so daß

$$(13) \quad \text{abs}(X + S + iE) \geq \varepsilon_2 \text{abs}(S + iE)$$

wird.

4) Hilfssatz 1 ist nun sofort beweisbar mit der Einschränkung $|C| \neq 0$. Dann wird

$$\text{abs}(X + iY + S) \geq \varepsilon \text{abs}(iE + S) \quad \text{mit } S = C^{-1}D$$

behauptet. Da S symmetrisch ist, so folgt dies aus (12) und (13) mit $T = X + S$ und $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

Ist (C, D) die zweite Matrizenzeile einer beliebigen symplektischen Matrix, so kann $|DS + C|$ nicht identisch in S verschwinden, wenn S eine symmetrische Matrix bezeichnet, da auch $(D, -C)$ die zweite Matrizenzeile einer symplektischen Matrix und folglich $|DZ - C| \neq 0$ ist für $Z \in \mathfrak{H}_n$. Wir bestimmen nun eine Folge reeller symmetrischer Matrizen S_k mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 0 \quad \text{und} \quad |DS_k + C| \neq 0.$$

Wie schon gezeigt wurde, ist

$$\text{abs}((DS_k + C)Z + D) \geq \varepsilon \text{abs}((DS_k + C)i + D),$$

wenn Z die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ erhält man nun die allgemeine Behauptung.

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind für gewisse m_1 und m_2 sicher dann erfüllt, wenn Z in \mathfrak{H}_n variiert.

In den folgenden Hilfsbetrachtungen verwenden wir den Abstandsbegriff der symplektischen Geometrie. D. h. wir legen die metrische Fundamentalf orm

$$(14) \quad ds^2 = \text{Sp}(Y^{-1}dY)^2 + \text{Sp}(Y^{-1}dX)^2$$

zugrunde. Den in dieser Metrik gemessenen Abstand zweier Punkte $Z, Z^* \in \mathfrak{H}_n$ bezeichnen wir mit $s(Z, Z^*)$.

Hilfssatz 2: Es sei $Z, Z^* \in \mathfrak{H}_n$. Die Matrizen Z_1, Z_1^* mögen aus Z bzw. Z^* durch Streichen der letzten $n - r$ Zeilen und Spalten entstehen, so daß Z_1 und Z_1^* also \mathfrak{H}_r angehören. Dann ist

$$(15) \quad s(Z, Z^*) \geq s(Z_1, Z_1^*).$$

Beweis: Da die geodätischen Linien in der symplektischen Geometrie eindeutig bestimmt sind, braucht nur

$$(16) \quad \text{Sp}(Y^{-1}dY)^2 + \text{Sp}(Y^{-1}dX)^2 \geq \text{Sp}(Y_1^{-1}dY_1)^2 + \text{Sp}(Y_1^{-1}dX_1)^2$$

gezeigt zu werden. Dabei ist

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Z_1 = Z_1^{(r)} = X_1 + iY_1.$$

Wir wählen im Y -Raum folgende Parameterdarstellung

$$(17) \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_1 V \\ V^* Y_1 & Y_1 + Y_1[V] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & V \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

Zeilen- und Spaltenzahlen sämtlicher Matrizen sind durch diejenigen von Y und Y_1 eindeutig festgelegt. Offenbar ist $Y > 0$ mit $Y_1 > 0, Y_2 > 0$ gleichwertig. Man bestätigt leicht

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} Y_1^{-1} + Y_2^{-1}(V') & -V' Y_2^{-1} \\ -Y_2^{-1} V' & Y_2^{-1} \end{pmatrix}$$

und findet nach einer längeren, aber elementaren Rechnung

$$(18) \quad \text{Sp} (Y^{-1} d Y)^2 = \text{Sp} \{ (Y_1^{-1} d Y_1)^2 + (Y_2^{-1} d Y_2)^2 + 2 Y_2^{-1} d V' Y_1 d V \}.$$

Wählt man speziell $d Y = d X$ und setzt

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X'_1 & X'_2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = X_1^{(r)},$$

so ergeben sich für $d Y_1, d Y_2, d V$ die Gleichungen

$$d X_1 = d Y_1,$$

$$d X_2 = d Y_1 V + Y_1 d V,$$

$$d X_2 = d Y_2 + d V' Y_1 V + V' Y_1 d V + d Y_1 [V],$$

die durch

$$d Y_1 = d X_1,$$

$$d V = Y_2^{-1} d X_2 - Y_1^{-1} d X_1 V,$$

$$d Y_2 = d X_2 + d X_1 [V] - d X'_2 V - V' d X_2$$

gelöst werden. (18) geht somit in

$$(19) \quad \begin{aligned} \text{Sp} (Y^{-1} d X)^2 &= \text{Sp} \{ (Y_1^{-1} d X_1)^2 + \\ &+ (Y_2^{-1} d X_2 + Y_2^{-1} d X_1 [V] - Y_2^{-1} d X'_2 V - Y_2^{-1} V' d X_2)^2 \\ &+ 2 Y_2^{-1} (d X'_2 Y_1^{-1} - V' d X_1 Y_1^{-1}) (d X_2 - d X_1 V) \} \end{aligned}$$

über. Auf Grund der Darstellungen (18) und (19) ist

$$\text{Sp} (Y^{-1} d Y)^2 \geq \text{Sp} (Y_1^{-1} d Y_1)^2 \quad \text{und} \quad \text{Sp} (Y^{-1} d X)^2 \geq \text{Sp} (Y_1^{-1} d X_1)^2$$

festzustellen. (16) folgt nun durch Addition dieser Ungleichungen.

Hilfssatz 3: Es sei $Z, Z^* \in \mathfrak{H}_n$, $s(Z, Z^*) \leq \varrho$. Die Matrizen $Z_1 = X_1 + i Y_1$ und $Z_1^* = X_1^* + i Y_1^*$ mögen aus Z bzw. Z^* durch Streichen der letzten $n-r$ Zeilen und Spalten entstehen. Dann ist

$$(20) \quad \frac{1}{m_1} \leq \frac{\text{Sp}(Y_1^*)}{\text{Sp}(Y_1)} \leq m_1, \quad \frac{1}{m_2} \leq \frac{|Y_1^*|}{|Y_1|} \leq m_2$$

mit gewissen positiven nur von ϱ und n abhängigen Konstanten m_1 und m_2 .

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn $r = n$ angenommen wird. Sei $Z = X + i Y, Z^* = X^* + i Y^*$. Mit Hilfe einer orthogonalen Matrix W transformieren wir Y^* auf Diagonalgestalt:

$$Y^* [W] = D^2, \quad D = (\lambda_\mu \delta_{\mu\nu}), \quad \lambda_\mu > 0$$

und setzen

$$\tilde{Z} = (Z - X^*) [W D^{-1}] = \tilde{X} + i \tilde{Y},$$

$$\tilde{Z}^* = (Z^* - X^*) [W D^{-1}] = i E.$$

Da $s(Z, Z^*)$ gegenüber symplektischen Substitutionen invariant ist, gilt

$$s(Z, Z^*) = s(\tilde{Z}, \tilde{Z}^*) = s(\tilde{Z}, i E) \leq \varrho.$$

\tilde{Z} liegt also in einer abgeschlossenen endlichen Punktmenge von \mathfrak{H}_n . Für ein geeignetes $m_2 = m_2(\varrho)$ gilt infolgedessen

$$\frac{1}{m_2} \leq |\tilde{Y}| \leq m_2.$$

Beachtet man

$$|\tilde{Y}| = |Y| |W D^{-1}|^2 = |Y| |D|^{-2} = |Y| |Y^*|^{-1},$$

so ergibt sich die eine der Behauptungen.

Offenbar ist auch $m_1 \geq \text{Sp}(\tilde{Y})$ für ein gewisses positives $m_1 = m_1(\varrho)$. Wird noch $Y[W] = H = (h_{\mu\nu})$ gesetzt, so ist $\text{Sp}(Y) = \text{Sp}(H)$, $\text{Sp}(Y^*) = \text{Sp}(D^2)$ und daher

$$m_1 \geq \text{Sp}(\tilde{Y}) = \sum_{\nu=1}^n \frac{h_{\nu\nu}}{\lambda_\nu^2} \geq \frac{\text{Sp}(H)}{\text{Sp}(D^2)} = \frac{\text{Sp}(Y)}{\text{Sp}(Y^*)}$$

zu schließen. Aus Gründen der Symmetrie darf auch $m_1 \geq \frac{\text{Sp}(Y^*)}{\text{Sp}(Y)}$ angenommen werden. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wir berechnen noch einige Integrale. Zur Abkürzung werde

$$d(Y) = \prod_{\mu \leq \nu} dy_{\mu\nu}$$

gesetzt.

Hilfssatz 4: Es sei $f(y)$ auf dem Halbstrahl $y \geq 0$ reell und stetig. Dann ist

$$(21) \int_{\substack{Y \in \mathfrak{K}_n \\ |Y| \leq t}} f(|Y|) |Y|^s d(Y) = \frac{n+1}{2} v_n \int_0^t f(y) y^{s+\frac{n-1}{2}} dy \quad \text{für } s + \frac{n+1}{2} > 0$$

mit einer gewissen positiven Konstanten v_n .

Beweis: Wir setzen

$$J(a, y) = \int_{\substack{Y \in \mathfrak{K}_n \\ a \leq |Y| \leq y}} f(|Y|) |Y|^s d(Y) \quad \text{für } 0 < a \leq y$$

und finden mit einem reellen ϑ im Intervall $0 \leq \vartheta \leq 1$

$$\frac{\partial J(a, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(y + \vartheta \Delta y) (y + \vartheta \Delta y)^s \frac{1}{\Delta y} \int_{\substack{Y \in \mathfrak{K}_n \\ y \leq |Y| \leq y + \Delta y}} d(Y).$$

Nach MINKOWSKI¹⁰⁾ ist

$$(22) \int_{\substack{Y \in \mathfrak{K}_n \\ |Y| \leq y}} d(Y) = v_n y^{\frac{n+1}{2}}$$

mit einer gewissen positiven Konstanten v_n . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(a, y)}{\partial y} &= v_n f(y) y^s \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left\{ (y + \Delta y)^{\frac{n+1}{2}} - y^{\frac{n+1}{2}} \right\} \\ &= \frac{n+1}{2} v_n f(y) y^{s+\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$J(a, t) = \frac{n+1}{2} v_n \int_a^t f(y) y^{s+\frac{n-1}{2}} dy.$$

Dieses Integral hat für $a \rightarrow 0$ einen Grenzwert, falls $s + \frac{n+1}{2} > 0$ ist. Der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ liefert also die in Hilfssatz 4 angegebene Integralformel.

¹⁰⁾ MINKOWSKI, H.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 80, 1911.

Wir heben zwei Spezialfälle hervor. $f(y) = 1$ ergibt

$$(23) \quad \int_{Y \in \mathfrak{H}_n} \dots \int_{|Y| \leq t} |Y|^s d(Y) = \frac{n+1}{2s+n+1} v_n t^{s+\frac{n+1}{2}} \quad \text{für } s + \frac{n+1}{2} > 0.$$

Ferner wird $f(y) = e^{-\alpha y^2}$ ($\alpha > 0, \alpha > 0$) gesetzt und der Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ vollzogen. Die Variablensubstitution $x = y^2$ führt auf das bekannte Gammaintegral und liefert

$$(24) \quad \int_{Y \in \mathfrak{H}_n} \dots \int e^{-\alpha |Y|^2} |Y|^s d(Y) = \frac{n+1}{2\alpha} v_n \Gamma\left(\frac{s}{\alpha} + \frac{n+1}{2\alpha}\right) \alpha^{-\frac{s}{\alpha} - \frac{n+1}{2\alpha}}$$

für $\alpha > 0, \alpha > 0, s + \frac{n+1}{2} > 0$.

§ 2. Poincarésche Reihen.

Es sei $T = T^{(n)}$ eine halbganze nicht-negative symmetrische Matrix. $A(T)$ bezeichne die Gruppe der Modulsstitutionen n -ten Grades, die von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} U & S & U'^{-1} \\ 0 & & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } T[U] = T$$

sind. Wir bestimmen ein beliebiges Repräsentantensystem $S(T)$ der Linksklassen von $A(T)$ in M_n und setzen für $k = 0(2)$

$$(25) \quad g_{-k}(Z, T) = \sum_{\sigma \in S(T)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k},$$

wobei (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ bezeichnen möge. Offenbar ändert sich das allgemeine Glied dieser Reihe nicht, wenn man σ mit einer Substitution aus $A(T)$ von links multipliziert; d. h. $g_{-k}(Z, T)$ hängt von der Auswahl des Repräsentantensystems $S(T)$ nicht ab. Multipliziert man die Substitutionen aus $S(T)$ von rechts mit einer Modulsstitution, so erhält man ein mit $S(T)$ gleichwertiges System. Nunmehr kann festgestellt werden, daß sich $g_{-k}(Z, T)$ formal (d. h. ohne Rücksicht auf Konvergenz) gegenüber den Modulsstitutionen wie eine Modulform der Dimension $-k$ verhält. Wir zeigen, daß sich $g_{-k}(Z, T)$ nicht ändert, wenn man T mit einer unimodularen Matrix transformiert:

$$(26) \quad g_{-k}(Z, T[V]) = g_{-k}(Z, T) \quad \text{für unimodulare } V.$$

Die Gruppe $A(T[V])$ besteht aus den Modulsstitutionen der Art

$$\begin{pmatrix} U_1 & S_1 & U_1'^{-1} \\ 0 & & U_1'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } (T[V])[U_1] = T[V].$$

Dies bedeutet, wenn $U = V U_1 V^{-1}$, $S = V S_1 V'$ und

$$e = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V'^{-1} \end{pmatrix}$$

gesetzt wird,

$$e \begin{pmatrix} U_1 & S_1 & U_1'^{-1} \\ 0 & & U_1'^{-1} \end{pmatrix} e^{-1} = \begin{pmatrix} U & S & U'^{-1} \\ 0 & & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } T[U] = T.$$

Mithin ist

$$e A(T[V]) e^{-1} = A(T),$$

also

$$e S(T[V]) = S(T),$$

woraus in der Tat (26) geschlossen werden kann. Hat T den Rang r , so kann durch geeignete Wahl einer unimodularen Matrix V

$$T[V] = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_1 = T_1^{(r)} > 0$$

erreicht werden. Um die Konvergenz der POINCARÉschen Reihe (25) zu beweisen, darf also gemäß (26) von vornherein

$$(27) \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = T_1^{(r)} > 0$$

angenommen werden. Das soll im folgenden geschehen. Setzen wir in entsprechender Zerlegung

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

so ist $T[U] = T$ mit $T_1[U_1] = T_1$, $U_2 = 0$ gleichwertig.

Unter A_r soll nun die Gruppe derjenigen Modulsstitutionen verstanden werden, die in der Form

$$(28) \quad \tau = \begin{pmatrix} U & S U'^{-1} \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}, E = E^{(r)}$$

dargestellt werden können. Offenbar ist A_r eine Untergruppe von $A(T)$. Es ist leicht festzustellen, daß der Index von A_r in $A(T)$ im Falle $r = 0$ gleich 1 ist und im Falle $r > 0$ mit der Anzahl der Automorphismen von T_1 , d. h. der Anzahl der unimodularen U_1 übereinstimmt, die T_1 in sich transformieren. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $\varepsilon(T_1)$ und setzen $\varepsilon(T_1) = 1$ im Falle $r = 0$. S_r sei ein vollständiges Vertretersystem der Linksrestklassen von A_r in M_n . Offenbar ist dann

$$(29) \quad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \in S_r} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}.$$

Ein spezielles Vertretersystem S_r erhält man in den Produkten $\varrho\sigma$, wobei unabhängig von einander σ ein Vertretersystem S_0 und ϱ ein vollständiges System von Vertretern der Linksrestklassen von A_r in A_0 durchlaufen. Durchläuft Q alle primitiven Matrizen vom Typus $Q^{(r,n)}$ und ergänzt man jede auf genau eine Weise zu einer unimodularen Matrix

$$\begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix} = U,$$

so durchläuft

$$\varrho = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U'^{-1} \end{pmatrix}$$

gerade ein Vertretersystem der gewünschten Art. Damit erhält man noch

$$(30) \quad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\substack{\sigma \in S_0 \\ Q \text{ primitiv}}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1[Q]\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}.$$

Um für A_r einen einfachen Fundamentalbereich zu bestimmen, bedienen wir uns der Parameterdarstellung (17). Die Substitution (28) führt Z in $U Z U' + S$, also X in $U X U' + S$ und Y in

$$\begin{aligned} Y[U'] &= \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & U'_2 \\ 0 & U'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & U'_2 + V U'_4 \\ 0 & U'_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2[U'_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & U'_2 + V U'_4 \\ 0 & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

über. Die Anwendung von τ auf Z bewirkt also die Ersetzungen

$$\begin{aligned} X &\rightarrow U X U' + S, & V &\rightarrow U'_3 + V U'_4, \\ Y_1 &\rightarrow Y_1, & Y_2 &\rightarrow U_4 Y_2 U'_4. \end{aligned}$$

Dabei ist S eine beliebige ganze symmetrische Matrix, U_3 eine beliebige ganze Matrix und U_4 eine beliebige unimodulare Matrix. Im Raum der Matrizen $V = (v_{\mu\nu})$ bezeichne $\mathfrak{B}_{r,n-r}$ den modulo 1 reduzierten Bereich

$$-1/2 \leq v_{\mu\nu} \leq 1/2 \quad (\mu = 1, 2, \dots, r; \quad \nu = 1, 2, \dots, n-r).$$

Offenbar stellt der durch

$$(31) \quad X \in \mathfrak{B}_n, \quad V \in \mathfrak{B}_{r,n-r}, \quad Y_2 \in \mathfrak{B}_{n-r}$$

erklärte Z -Bereich in \mathfrak{H}_n einen Fundamentalbereich von A , dar; wir bezeichnen ihn mit \mathfrak{E}_r .

Die zu (29) gehörige mit $|Y|^{\frac{k}{2}}$ multiplizierte Betragreihe lautet

$$(32) \quad h_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}},$$

wenn zur Abkürzung $\sigma(Z) = Z_\sigma = X_\sigma + i Y_\sigma$ gesetzt wird. Wir beweisen ihre Konvergenz.

Es sei $Z_0 \in \mathfrak{H}_n$ fest gewählt. Um Z_0 bestimmen wir eine symplektische Kugel \mathfrak{K}_0 vom Radius $1/2 \varrho$ und wählen ϱ so klein, daß \mathfrak{K}_0 und $\sigma(\mathfrak{K}_0)$ (σ beliebig aus \mathfrak{M}_n) nur dann Punkte gemeinsam haben, wenn $\sigma(Z_0) = Z_0$ ist. e_0 sei die Anzahl dieser σ . Z und Z^* seien willkürliche Punkte aus \mathfrak{K}_0 . Offenbar ist

$$s(Z, Z^*) \leq \varrho, \quad \text{also auch } s(\sigma(Z), \sigma(Z^*)) \leq \varrho.$$

Um für die Reihen $h_{-k}(Z^*, T)$ eine von Z^* unabhängige konvergente Majorante zu bekommen, bedürfen wir noch einiger Abschätzungen; dabei wird $s(Z, Z^*) \leq \varrho$ vorausgesetzt. Y_1 entstehe aus Y durch Streichen der letzten $n-r$ Zeilen und Spalten. Dann ist

$$\operatorname{Sp}(T Y) = \operatorname{Sp}(T_1 Y_1).$$

Wir bestimmen eine reelle Matrix $R = R^{(r)}$ so, daß $Y_1 = R R'$ wird. Bezeichnen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ die Spaltenvektoren von R und μ_1, μ_2 das Minimum bzw. Maximum der quadratischen Form $T_1[\xi]$ auf $\xi' \xi = 1$, so gilt

$$\operatorname{Sp}(T_1 Y_1) = \sum_{r=1}^r T_1[\tau_r],$$

$$\sum_{r=1}^r T_1[\tau_r] \leq \mu_2 \sum_{r=1}^r \tau_r' \tau_r = \mu_2 \operatorname{Sp} Y_1,$$

$$\sum_{r=1}^r T_1[\tau_r] \geq \mu_1 \sum_{r=1}^r \tau_r' \tau_r = \mu_1 \operatorname{Sp} Y_1,$$

also

$$\mu_1 \operatorname{Sp}(Y_1) \leq \operatorname{Sp}(T Y) \leq \mu_2 \operatorname{Sp}(Y_1),$$

analog

$$\mu_1 \operatorname{Sp}(Y_1^*) \leq \operatorname{Sp}(T Y^*) \leq \mu_2 \operatorname{Sp}(Y_1^*),$$

folglich nach Hilfssatz 3

$$\operatorname{Sp}(T Y^*) \geq m \operatorname{Sp}(T Y) \quad \text{mit } m = \frac{\mu_1}{\mu_2 m_1}.$$

In dieser Darstellung können Y und Y^* durch die Imaginärteile von $\sigma(Z) = X_\sigma + i Y_\sigma$ und $\sigma(Z^*) = X_\sigma^* + i Y_\sigma^*$ ersetzt werden; man erhält

$$\operatorname{Sp}(T Y_\sigma^*) \geq m \operatorname{Sp}(T Y_\sigma).$$

Schließlich liefert Hilfssatz 3 noch

$$|Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leq M |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}} \text{ mit } M = m_2^{\frac{k}{2}}.$$

Für das allgemeine Reihenglied von $h_{-k}(Z^*, T)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T Y_\sigma^*)} |Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leq M e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $Z \in \mathfrak{R}_0$; folglich kann die rechte Seite durch den über \mathfrak{R}_0 erstreckten Integralmittelwert ersetzt werden:

$$e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T Y_\sigma^*)} |Y_\sigma^*|^{\frac{k}{2}} \leq \frac{M}{J_\sigma} \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X_\sigma) d(Y_\sigma).$$

Dabei ist

$$J_\sigma = \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int |Y_\sigma|^{-n-1} d(X_\sigma) d(Y_\sigma) = \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int |Y|^{-n-1} d(X) d(Y)$$

der gegenüber Modulsstitutionen invariante symplektische Inhalt von \mathfrak{R}_0 und

$$d(X) = \prod_{\mu \leq \nu} dx_{\mu\nu}, \quad d(Y) = \prod_{\mu \leq \nu} dy_{\mu\nu}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} h_{-k}(Z^*, T) &\leq \frac{M}{J_\sigma \varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \in S_r} \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y_\sigma)} |Y_\sigma|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X_\sigma) d(Y_\sigma) \\ (33) \quad &= \frac{M}{J_\sigma \varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \in S_r} \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y). \end{aligned}$$

Jede Kugel $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ kann in endlich viele punktfremde meßbare Teilbereiche zerlegt werden:

$$\sigma(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{B}_\sigma^{(1)} + \mathfrak{B}_\sigma^{(2)} + \dots + \mathfrak{B}_\sigma^{(a_\sigma)},$$

so daß jeder Teilbereich $\mathfrak{B}_\sigma^{(v)}$ aus inäquivalenten Punkten bezüglich A , besteht; denn $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ hat mit nur endlich vielen der Fundamentalbereiche, die aus \mathfrak{E} , durch Anwendung von Substitutionen aus A , hervorgehen, Punkte gemeinsam. Zu $\mathfrak{B}_\sigma^{(v)}$ bestimmen wir in \mathfrak{E} , den bezüglich A , äquivalenten Bereich $\mathfrak{A}_\sigma^{(v)}$. Da der Integrand

$$e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y)$$

gegenüber den Substitutionen aus A , invariant ist, so folgt aus (33)

$$(34) \quad h_{-k}(Z^*, T) \leq \frac{M}{J_\sigma \varepsilon(T_1)} \sum_{\sigma \in S_r} \sum_{v=1}^{a_\sigma} \int_{\mathfrak{R}_0} \dots \int e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T Y)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y).$$

Wir zeigen, daß ein vorgegebener Punkt $Z \in \mathfrak{E}$, höchstens e_0^2 verschiedenen $\mathfrak{A}_\sigma^{(v)}$ angehören kann. Gleichwertig hiermit sind die beiden Forderungen:

1. In jeder Kugel $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ liegen höchstens e_0 verschiedene Punkte, die mit Z bezüglich A , äquivalent sind.

2. Es gibt höchstens e_0 verschiedene $\sigma \in S_r$, so daß $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ mindestens einen mit Z bezüglich A , äquivalenten Punkt enthält.

Diese Aussagen lassen sich wie folgt beweisen. Es seien $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ verschiedene Substitutionen $\subset S_r$ und $Z_{\mu 1}, Z_{\mu 2}, \dots, Z_{\mu s_\mu}$ verschiedene Punkte $\subset \sigma_\mu(\mathfrak{R}_0)$. Ferner sei $Z_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}(Z)$, $\tau_{\mu\nu} \subset A_r$ und $s_\mu \geq 1$ für alle μ, ν . Da alle Kugeln $\tau_{\mu\nu}^{-1} \sigma_\mu(\mathfrak{R}_0)$ den Punkt Z gemeinsam haben, ist

$$\tau_{\mu\nu}^{-1} \sigma_\mu(Z_0) = \tau_{11}^{-1} \sigma_1(Z_0) \quad \text{oder} \quad \tau_{\mu\nu}^{-1} \sigma_\mu = \tau_{11}^{-1} \sigma_1 \alpha,$$

wobei α eine von den e_0 Substitutionen bezeichnet, die Z_0 festlassen. Man erkennt nun, daß σ_μ höchstens e_0 verschiedene Linksrestklassen von A_r in M_n repräsentieren kann. Mithin ist $t \leq e_0$. Außerdem sind bei festem μ die Substitutionen $\tau_{\mu\nu}$ auf e_0 Möglichkeiten beschränkt, so daß auch $s_\mu \leq e_0$ gilt, q. e. d.

Bekanntlich gibt es unter den zu Z_0 äquivalenten Punkten $\sigma(Z_0) = X_{0\sigma} + i Y_{0\sigma}$ einen, in welchem $|Y_{0\sigma}|$ einen maximalen Wert hat. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann auch eine von σ unabhängige Schranke für $|Y|$, wenn Z in einer der Kugeln $\sigma(\mathfrak{R}_0)$ liegt. Da $|Y|$ gegenüber den Substitutionen aus A_r invariant ist, kann t so bestimmt werden, daß der durch

$$Z \subset \mathfrak{S}_r, \quad |Y| \leq t$$

gegebene Bereich alle $\mathfrak{R}_0^{(v)}$ enthält. Aus dem Bisherigen geht hervor, daß dieser Bereich an jeder Stelle durch die Gesamtheit aller $\mathfrak{R}_0^{(v)}$ höchstens e_0^2 -fach überdeckt wird, woraus

$$(35) \quad h_{-k}(Z^*, T) \leq \frac{M e_0^2}{J_0 e(T_1)} \int_{Z \in \mathfrak{S}_r} \int_{|Y| \leq t} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(X) d(Y)$$

erhellt. Es bleibt zu untersuchen, wann das Integral

$$(36) \quad F_k(m T_1, t) = \int_{Z \in \mathfrak{S}_r} \int_{|Y| \leq t} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(X) d(Y)$$

existiert.

Im allgemeinen Fall ($0 < r < n$) führen wir an Stelle von Y die durch (17) gegebenen Matrizen Y_1, Y_2, V ein. Man bestätigt leicht, daß die Formeln

$$(37) \quad |Y| = |Y_1| |Y_2| \quad \text{und} \quad d(Y) = |Y_1|^{n-r} d(Y_1) d(Y_2) d(V)$$

gelten, wenn

$$d(V) = \prod_{\mu, \nu} dv_{\mu\nu}$$

gesetzt wird und wenn $d(Y_1), d(Y_2)$ wie $d(Y)$ erklärt werden. Nach (31) wird nun

$$(38) \quad F_k(m T_1, t) = \int_{X \in \mathfrak{W}_n, V \in \mathfrak{W}_{r, n-r}} \int_{Y_1 > 0, Y_2 \in \mathfrak{R}_{n-r}} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(TY_1)} |Y_1|^{\frac{k}{2} - r - 1} |Y_2|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(X) d(V) d(Y_1) d(Y_2) \\ = \int_{Y_1 > 0, Y_2 \in \mathfrak{R}_{n-r}} \int_{|Y_1| |Y_2| \leq t} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T_1 Y_1)} |Y_1|^{\frac{k}{2} - r - 1} |Y_2|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(Y_1) d(Y_2) \quad \text{für } 0 < r < n.$$

Die Integration über Y_2 kann mit Hilfe von (23) ausgeführt werden und ergibt

$$(39) \quad F_k(m T_1, t) = \frac{n-r+1}{k-n-r-1} v_{n-r} t^{\frac{k-n-r-1}{2}} \int_{Y_1 > 0} e^{-2\pi m \operatorname{Sp}(T_1 Y_1)} |Y_1|^{\frac{n-r-1}{2}} d(Y_1) \\ \text{für } k > n+r+1, \quad 0 < r < n.$$

Nach der von SIEGEL¹¹⁾ mitgeteilten Formel

$$(40) \quad \int_{Y>0} \dots \int e^{-\text{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{n+1}{2}} d(Y) = \\ = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \Gamma(s) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right) |T|^{-s} \\ \text{für } Y = Y^{(n)}, T = T^{(n)} > 0, s > \frac{n-1}{2}$$

erhält man schließlich

$$(41) \quad F_k(m T_1, t) = \\ = \frac{n-r+1}{k-n-r-1} v_{n-r} t^{\frac{k-n-r-1}{2}} \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} (2\pi m)^{-\frac{rn}{2}} |T_1|^{-\frac{n}{2}} \prod_{v=0}^{r-1} \Gamma\left(\frac{n-v}{2}\right) \\ \text{für } k > n+r+1, 0 < r < n.$$

In den Grenzfällen ($r=0, n$) treten an Stelle von (38) die folgenden Formeln:

$$(38') \quad F_k(m T_1, t) = \int_{\substack{X \in \mathfrak{M}_n, Y \in \mathfrak{N}_n \\ |Y| \leq t}} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y) \\ = \int_{\substack{Y \in \mathfrak{N}_n \\ |Y| \leq t}} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y) = \frac{n+1}{k-n-1} v_n t^{\frac{k-n-1}{2}} \\ \text{für } r=0, k > n+1,$$

$$(38'') \quad F_k(m T_1, t) = \int_{\substack{X \in \mathfrak{M}_n, Y > 0 \\ |Y| \leq t}} e^{-2\pi m \text{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y) \\ \leq \int_{\substack{Y > 0 \\ |Y| \leq t}} e^{-2\pi m \text{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y) \\ = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (2\pi m)^{\frac{n(n+1-k)}{2}} |T|^{\frac{n+1-k}{2}} \prod_{v=1}^n \Gamma\left(\frac{k-n-v}{2}\right) \\ \text{für } r=n, k > 2n.$$

Damit ist bewiesen, daß die POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ für $k > \text{Min}(2n, n+r+1)$ in einer Kugelumgebung eines jeden Punktes $Z_0 \in \mathfrak{H}_n$ absolut und gleichmäßig konvergieren. Infolgedessen konvergieren die Reihen absolut in \mathfrak{H}_n und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich von \mathfrak{H}_n . $g_{-k}(Z, T)$ ist also eine reguläre Funktion der unabhängigen Elemente von Z , wenn Z in \mathfrak{H}_n variiert. Da wir uns auf Modulformen gerader Dimension beschränken, so können wir im folgenden die Forderung $k > \text{Min}(2n, n+r+1)$ durch $k > n+r+1$ ersetzen; denn beide Ungleichungen besagen im Falle $k=0$ (2) dasselbe.

Es soll nun bewiesen werden, daß die POINCARÉschen Reihen in FOURIER-Reihen der Art (2) entwickelt werden können. Da $g_{-k}(Z, T)$ sich gegenüber den Modulusubstitutionen $Z \rightarrow Z + S$ ($S = S'$ ganz) wie eine Modulform verhält, also invariant und als Funktion der unabhängigen Elemente von Z in \mathfrak{H}_n regulär ist, so gibt es jedenfalls eine FOURIER-Entwicklung

¹¹⁾ SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math. 36, 527 (1935), Hilfsatz 37.

$$(42) \quad g_{-k}(Z, T) = \sum_{T_0} a(T, T_0) e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, Z)},$$

wobei über alle halbganzen symmetrischen T_0 summiert wird. Man braucht also nur zu zeigen, daß $a(T, T_0) = 0$ ist, wenn T_0 nicht ≥ 0 ist.

Hilfssatz 5: Eine für $Z \in \mathfrak{H}_n$ erklärte komplexwertige Funktion $h(Z)$ sei in jedem meßbaren abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{H}_n im RIEMANNschen Sinne integrierbar, verhalte sich gegenüber den Modulsstitutionen wie eine Modulform:

$$h(\sigma(Z)) = |CZ + D|^k h(Z) \text{ für } \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n$$

und genüge der Abschätzung

$$\operatorname{abs} h(Z) \leq M e^{-m|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \in \mathfrak{H}_n,$$

wobei m, M positive Konstanten bezeichnen. Ferner sei T die durch (27) erklärte Matrix. Dann ist mit $\delta_0 = 1$ und $\delta_r = 2$ für $r > 0$

$$(43) \quad \begin{aligned} & \delta_r \int_{Z \in \mathfrak{E}_r} \dots \int h(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y) \\ &= \varepsilon(T_1) \int_{Z \in \mathfrak{H}_n} \dots \int h(Z) \overline{g_{-k}(Z, T)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y) \end{aligned}$$

für $k > \operatorname{Min}(2n, n+r+1)$. D. h. es wird die Existenz und Gleichheit der Integrale behauptet.

Beweis: Gemäß Voraussetzung ist

$$\operatorname{abs} h(Z) |Y|^{\frac{k}{2}} \leq M Y^{\frac{k}{2}} e^{-m|Y|^{\frac{1}{n}}} \leq M_1 e^{-m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \in \mathfrak{H}_n,$$

wenn $m_1 = \frac{m}{2}$ gesetzt und die positive Konstante M_1 geeignet gewählt wird.

Wendet man auf $Z (\in \mathfrak{H}_n)$ eine Modulsstitution an, so ändert sich

$\operatorname{abs} h(Z) |Y|^{\frac{k}{2}}$ nicht und $|Y|$ wird sicher nicht größer. Demnach ist

$$\operatorname{abs} h(Z) |Y|^{\frac{k}{2}} \leq M_1 e^{-m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } Z \in \mathfrak{H}_n.$$

Wir zeigen nun, daß

$$h(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)} |Y|^{k-n-1}$$

über \mathfrak{E}_r absolut integrierbar ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn das Integral

$$(44) \quad G_k(T_1, m_1) = \int_{Z \in \mathfrak{E}_r} \dots \int e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ) - m_1|Y|^{\frac{1}{n}}} |Y|^{\frac{k}{2}-n-1} d(X) d(Y)$$

existiert. Wir führen hier wieder die Parameterdarstellung (17) ein. Beachtet man (31) und (37), so erhält man

$$G_k(T_1, m_1) = \int_{Y_1 > 0, Y_2 \in \mathfrak{H}_{n-r}} \dots \int e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T, Y_1) - m_1|Y_1|^{\frac{1}{n}} |Y_2|^{\frac{1}{n}}} |Y_1|^{\frac{k}{2}-r-1} |Y_2|^{\frac{k}{2}-n-1} d(Y_1) d(Y_2).$$

Die Integration über Y_2 kann mit Hilfe von (24) ausgeführt werden. Es ergibt sich im allgemeinen Fall $0 < r < n$

$$G_k(T_1, m_1) = \frac{n(n-r+1)}{2} v_{n-r} m_1^{-\frac{n(k-n-r-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{n(k-n-r-1)}{2}\right) \int_{Y_1 > 0} \dots \int e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T, Y_1)} |Y_1|^{\frac{n-r-1}{2}} d(Y_1) \text{ für } k > n+r+1,$$

nach (40) also

$$(45) \quad G_k(T_1, m_1) = \frac{n(n-r+1)}{2} v_{n-r} m_1^{-\frac{n(k-n-r-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{n(k-n-r-1)}{2}\right) \\ \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} (2\pi)^{-\frac{r}{2}} |T_1|^{-\frac{n}{2}} \prod_{v=0}^{r-1} \Gamma\left(\frac{n-v}{2}\right) \text{ für } k > n+r+1.$$

Dazu treten die Grenzfälle

$$(45') \quad G_k(T_1, m_1) = \int_{Y \in \mathfrak{F}_n} \dots \int e^{-m_1 |Y|^{\frac{1}{n}}} |Y|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(Y) \\ = \frac{n(n+1)}{2} v_n \Gamma\left(\frac{n(k-n-1)}{2}\right) m_1^{\frac{n(n+1-k)}{2}} \\ \text{für } r=0, k > n+1,$$

$$(45'') \quad G_k(T_1, m_1) = \int_{Y > 0} \dots \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(TY) - m_1 |Y|^{\frac{1}{n}}} |Y|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(Y) \\ \leq \int_{Y > 0} \dots \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(TY)} |Y|^{\frac{k}{2} - n - 1} d(Y) \\ = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |T|^{\frac{n+1-k}{2}} \prod_{v=1}^n \Gamma\left(\frac{k-n-v}{2}\right) \\ \text{für } r=n, k > 2n.$$

Damit ist die Existenz des Integrals

$$(46) \quad H_k(T_1, h) = \int_{Z \in \mathfrak{C}_r} \dots \int h(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y)$$

für $k > \min(2n, n+r+1)$ bewiesen und zugleich sind die folgenden Umformungen dieses Integrals gerechtfertigt.

Nach (28) enthält A_0 mit τ auch $-\tau$, während A_r für $r > 0$ von den beiden Modulsstitutionen τ und $-\tau$ höchstens eine enthält. Wir dürfen also annehmen, daß S_r im Falle $r > 0$ mit σ auch $-\sigma$ enthält. Bildet man die Vereinigung aller $\sigma(\mathfrak{F}_n)$ (σ beliebig aus S_r), so erhält man einen einfach bzw. doppelt überdeckten Fundamentalbereich von A_r , je nachdem $r=0$ oder $r > 0$ ist. Da der Integrand von (46) gegenüber den Substitutionen aus A_r invariant ist, kann (46) in

$$(47) \quad H_k(T_1, h) = \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma \in S_r} \int_{Z \in \mathfrak{F}_n} \dots \int h(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y) \\ = \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma \in S_r} \int_{Z \in \mathfrak{F}_n} \dots \int h(\sigma(Z)) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |Y|^k |CZ + D|^{-k} |C\bar{Z} + D|^{-k} |Y|^{-n-1} d(X) d(Y) \\ = \frac{1}{\delta_r} \sum_{\sigma \in S_r} \int_{Z \in \mathfrak{F}_n} \dots \int h(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |C\bar{Z} + D|^{-k} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y)$$

übergeführt werden. Dabei ist $\delta_0 = 1$, $\delta_r = 2$ für $r > 0$ und (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ . Vertauschung der Summation mit der Integration ergibt nach (29)

$$(48) \quad H_k(T_1, h) = \frac{\varepsilon(T_1)}{\delta_r} \int_{Z \in \mathfrak{F}_n} \dots \int h(Z) \overline{g_{-k}(\bar{Z}, \bar{T})} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y), \text{ q. e. d.}$$

Im folgenden benötigen wir eine Parameterdarstellung der Determinantenfläche $|Y| = \text{konstant}$. Eine solche wird durch

$$(49) \quad Y = u \begin{pmatrix} W & w \\ w' & |W|^{-1} + W^{-1}[w] \end{pmatrix}$$

geliefert. Dabei ist u eine positive reelle Zahl, $W = W^{(n-1)} = (w_{\mu\nu}) > 0$ und $w = (w_{\mu})$ eine Spalte von $n-1$ beliebigen reellen Zahlen. Man stellt leicht fest, daß $|Y| = u^n$ und

$$(50) \quad d'(Y) = u^{\frac{n(n+1)}{2}-1} (|W|^{-1} + W^{-1}[w]) d(W) d(w) du$$

mit

$$d(W) = \prod_{\mu \leq \nu} dw_{\mu\nu}, \quad d(w) = \prod_{\mu} dw_{\mu}$$

ist.

Es sei nun

$$(51) \quad \text{Sp}(T^* Y^*) < 0, \quad Y^* \in \mathfrak{R}_n, \quad T^* \text{ halbganz und symmetrisch.}$$

Für $Y = Y^*$ sei $u = u^*$, $W = W^*$ und $w = w^*$. Da Y^* in \mathfrak{R}_n liegt, kann u_0 bekanntlich⁵⁾ so bestimmt werden, daß für $u \geq u_0$, $X \in \mathfrak{B}_n$ stets

$$X + i \frac{u}{u^*} Y^* \in \mathfrak{F}_n$$

gilt. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß Y^* ein innerer Punkt von \mathfrak{R}_n ist. Dann gilt aber auch noch für eine volle Umgebung \mathfrak{B} von (W^*, w^*) im (W, w) -Raum $\text{Sp}(T^* Y) < 0$ und

$$X + i Y \in \mathfrak{F}_n, \quad \text{wenn } u \geq u_0, (W, w) \in \mathfrak{B}, X \in \mathfrak{B}_n$$

ist. Wir können annehmen, daß \mathfrak{B} meßbar und abgeschlossen ist; dann hat \mathfrak{B} einen positiven Inhalt:

$$\int \dots \int_{(W, w) \in \mathfrak{B}} d(W) d(w) > 0.$$

Ferner läßt sich eine positive Konstante δ so bestimmen, daß

$$\text{Sp}(T^* Y) \leq -2\delta u \quad \text{für } (W, w) \in \mathfrak{B}$$

gilt. Für ein hinreichend kleines $\delta_1 > 0$ ist dann auch

$$\delta_1 \text{Sp}(Y) \leq \delta u \quad \text{für } (W, w) \in \mathfrak{B}.$$

Wir setzen nun

$$h(Z) = \begin{cases} e^{2\pi i \text{Sp}(T^* X) - 2\pi \delta_1 \text{Sp}(Y)} & \text{für } u \geq u_0, (W, w) \in \mathfrak{B}, X \in \mathfrak{B}_n, \\ 0 & \text{für alle anderen Punkte } \in \mathfrak{F}_n \end{cases}$$

und

$$(52) \quad h(\sigma(Z)) = |CZ + D|^k h(Z) \quad \text{für } Z \in \mathfrak{F}_n, \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Die Funktion $h(Z)$ ist damit in \mathfrak{F}_n erklärt. Man stellt leicht fest, daß (52) nicht nur in \mathfrak{F}_n , sondern ganz \mathfrak{F}_n gilt. Für $Y > 0$ ist

$$\text{Sp}(Y) \geq n \sqrt[1]{y_{11} y_{22} \dots y_{nn}} \geq n |Y|^{\frac{1}{n}}$$

und daher

$$(53) \quad \text{abs } h(Z) \leq e^{-2\pi n \delta_1 |Y|^{\frac{1}{n}}}$$

für $Z \in \mathfrak{F}_n$. Auf $h(Z)$ ist also Hilfssatz 5 anwendbar. Insbesondere ist damit gezeigt, daß

$$(54) \quad \int \dots \int_{Z \in \mathfrak{F}_n} h(Z) \overline{g_{-k}(Z, \bar{T})} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y)$$

existiert. Beachtet man

$$a(T, T^*) e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T^* Y)} = \int_{X \in \mathfrak{B}_n} \int g_{-k}(Z, T) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(T^* X)} d(X),$$

so geht (54) über in

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{u \geq u_0, (W, w) \in \mathfrak{B} \\ X \in \mathfrak{B}_n}} \int g_{-k}(\overline{Z}, \overline{T}) e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T^* X) - 2\pi \delta, \operatorname{Sp}(Y)} |Y|^{k-n-1} d(X) d(Y) \\ &= \overline{a(T, T^*)} \int_{\substack{(W, w) \in \mathfrak{B} \\ u \geq u_0}} \int e^{-2\pi \operatorname{Sp}(T^* Y) - 2\pi \delta, \operatorname{Sp}(Y)} |Y|^{k-n-1} d(Y). \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist nach unten durch

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{(W, w) \in \mathfrak{B} \\ u \geq u_0}} \int e^{2\pi \delta u} u^{n(k-n-1) + \frac{n(n+1)}{2} - 1} (|W|^{-1} + W^{-1}[w]) d(W) d(w) du \\ &= \int_{(W, w) \in \mathfrak{B}} (|W|^{-1} + W^{-1}[w]) d(W) d(w) \int_{u_0}^{\infty} e^{2\pi \delta u} u^{n(k - \frac{n+1}{2}) - 1} du \end{aligned}$$

abgeschätzt. Das Integral über u divergiert; das Integral über W, w hat einen positiven Wert. Es muß also $a(T, T^*) = 0$ sein.

Sei T_0 nicht ≥ 0 . Dann gibt es eine positive Matrix Y_0 mit $\operatorname{Sp}(T_0 Y_0) < 0$. Wir setzen $T^* = T_0 [U^{-1}]$, $Y^* = Y_0 [U']$ (U unimodular), so daß $\operatorname{Sp}(T^* Y^*) = \operatorname{Sp}(T_0 Y_0) < 0$ und bei geeigneter Wahl von U auch $Y^* \in \mathfrak{H}_n$ gilt. Unter der Voraussetzung (51), die nun erfüllt ist, konnten wir aber $a(T, T^*) = 0$ schließen. Aus $g_{-k}(Z [U'], T) = g_{-k}(Z, T)$ folgt andererseits $a(T, T^*) = a(T, T_0)$ und damit $a(T, T_0) = 0$, q. e. d.

Zusammenfassend können wir folgendes feststellen:

Satz 1: Es sei $T = T^{(n)}$ eine halbganze symmetrische Matrix ≥ 0 vom Rang r und $k = 0(2)$, $k > n + r + 1$. Dann stellt

$$g_{-k}(Z, T) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(T)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T \sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}$$

eine Modulform der Dimension $-k$ dar. Dabei ist (C, D) die zweite Matrizenzeile von σ .

Wie aus den Untersuchungen⁵⁾ hervorgeht, sind für eine Spitzenform $g_{-k}(Z)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 erfüllt. Bezeichnet $a(T)$ den FOURIER-Koeffizienten von $g_{-k}(Z)$ zur Exponentenmatrix T , so kann unter Verwendung der Bezeichnung (6) nach (43) und (40)

$$\begin{aligned} & \varepsilon(T_1) (g_{-k}(Z), g_{-k}(Z, T)) = \\ & \Rightarrow \delta_r \int_{Z \in \mathfrak{H}_r} \int g_{-k}(Z) e^{-2\pi i \operatorname{Sp}(TZ)} d(X) e^{-4\pi \operatorname{Sp}(TY)} |Y|^{k-n-1} d(Y) \\ &= \begin{cases} 2 a(T) \int_{Y > 0} \int e^{-4\pi \operatorname{Sp}(TY)} |Y|^{k-n-1} d(Y) \\ 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 a(T) |T|^{\frac{n+1}{2}-k} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}-nk} \prod_{v=1}^n \Gamma\left(k - \frac{n+v}{2}\right) & \text{für } |T| > 0, \\ 0 & \text{für } T = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

geschlossen werden. Damit ist die Grundformel (7) bewiesen.

§ 3. Der Darstellungssatz.

Wir wollen nun den durch (9) erklärten Funktional-Operator Φ auf die POINCARÉschen Reihen anwenden. Um den erforderlichen Grenzprozeß durchzuführen, setzen wir

$$(55) \quad Z = \begin{pmatrix} Z^* & n \\ n' & z \end{pmatrix} \text{ mit } Z^* \in \mathfrak{H}_{n-1}, z \in \mathfrak{H}_1, n = \text{Nullspalte.}$$

Jede Modulform $g_{-k}(Z)$ der Dimension $-k$, insbesondere also auch $g_{-k}(Z, T)$ stellt nach E. WIRT¹²⁾ bei festem Z^* in z eine Modulform ersten Grades von der Dimension $-k$ dar. Wir bringen die Abhängigkeit von z in besonderer Weise zum Ausdruck, indem wir bei fest gewähltem T

$$(56) \quad \varphi(z) = g_{-k}(Z, T)$$

setzen. Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S(T).$$

Man stellt leicht fest, daß $AZ + B$ in z linear ist und daß die $n-1$ ersten Spalten dieser Matrix von z nicht abhängen. Ebenso ist $|CZ + D| (CZ + D)^{-1}$ in z linear, wobei jedoch die letzte Zeile von z nicht abhängt. Infolgedessen ist $|CZ + D| \sigma(Z)$ in z linear. Berücksichtigen wir noch, daß auch $|CZ + D| = cz + d$ gilt mit Koeffizienten c, d , die von z unabhängig sind, so ergibt sich

$$(57) \quad \text{Sp}(T \sigma(Z)) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit einer von z unabhängigen Matrix $L_\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Offenbar ist

$$(58) \quad \Im L_\sigma(z) \geq 0 \quad \text{für } z \in \mathfrak{H}_1.$$

Wir zerlegen die POINCARÉsche Reihe $g_{-k}(Z, T)$; die nun in der Gestalt

$$(59) \quad \varphi(z) = \sum_{\sigma \in S(T)} e^{2\pi i L_\sigma(z)} (cz + d)^{-k}$$

erscheint, in Teilreihen. G bezeichne die Gruppe der Moduls substitutionen

$$(60) \quad \tau_t = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} \text{ mit } B = (b_{\mu\nu}), b_{\mu\nu} = \begin{cases} t & \text{für } (\mu, \nu) = (n, n), \\ 0 & \text{für } (\mu, \nu) \neq (n, n). \end{cases}$$

Offenbar ist $\tau_t = \tau_1^t$, also G zyklisch. Wendet man τ_t auf Z an, so bleibt Z^* fest und z geht in $z + t$ über.

Ein vollständiges System von Moduls substitutionen ϱ , die verschiedene Komplexe $A(T) \in G$ ergeben, bezeichnen wir mit S^* . Die ganze nicht-negative Zahl n_ϱ erzeuge den Modul der Exponenten t , für welche

$$(\varrho \tau_1 \varrho^{-1})^t = \varrho \tau_1^t \varrho^{-1} \in A(T)$$

gilt. Sodann ist

$$A(T) \varrho \tau_p = A(T) \varrho \tau_q \text{ mit } p = q(n_\varrho)$$

gleichwertig. Es ergibt sich

$$M_n = \sum_{\varrho \in S^*} A(T) \varrho G = \sum_{\varrho \in S^*} \sum_{t \bmod n_\varrho} A(T) \varrho \tau_t.$$

¹²⁾ WIRT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 14, 323 (1941).

Die hier auftretenden Produkte $\varrho \tau_i$ definieren also ein System $S(T)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß sich die Funktionen

$$(61) \quad \omega_{\varrho}(Z) = e^{2\pi i S_{\varrho}(T_e(Z))} |CZ + D|^{-k} \text{ mit } \varrho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n$$

nach der Formel

$$(62) \quad \omega_{\varrho}(\tau(Z)) = |\tilde{C}Z + \tilde{D}|^k \omega_{\varrho\tau}(Z) \text{ mit } \tau = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \in M_n$$

umsetzen. Speziell für $\tau = \tau_i$ erhält man

$$(63) \quad e^{2\pi i L_{\varrho}(z+t)} (c(z+t) + d)^{-k} = e^{2\pi i L_{\varrho\tau_i}(z)} (c_t z + d_t)^{-k},$$

wenn $L_{\varrho\tau_i} = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$ angenommen wird. (59) geht damit in

$$(64) \quad \varphi(z) = \sum_{\varrho \in S^*} \sum_{t \bmod n_{\varrho}} e^{2\pi i L_{\varrho\tau_i}(z)} (c_t z + d_t)^{-k} = \sum_{\varrho \in S^*} \varphi_{\varrho}(z)$$

über, wenn

$$(65) \quad \varphi_{\varrho}(z) = \sum_{t \bmod n_{\varrho}} e^{2\pi i L_{\varrho}(z+t)} (c(z+t) + d)^{-k} \text{ mit } L_{\varrho} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Da bei jeder Wahl von $z \in \mathfrak{H}_1$ stets $cz + d \neq 0$ ist, so ist entweder $c = 0$ oder $\Im m \frac{d}{c} \geq 0$. Wir zeigen, daß $c = 0$ mit $n_{\varrho} > 0$ gleichwertig ist. Beachtet man, daß das allgemeine Glied der Reihe (65) nur von der Restklasse von t modulo n_{ϱ} abhängt, so folgt insbesondere

$$e^{2\pi i L_{\varrho}(z+n_{\varrho})} - e^{2\pi i L_{\varrho}(z)} = \left(\frac{cz + c n_{\varrho} + d}{cz + d} \right)^k.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist keine meromorphe Funktion von z , wenn zugleich $c \neq 0$ und $n_{\varrho} > 0$ ist. $n_{\varrho} > 0$ zieht also $c = 0$ nach sich. Ist $c = 0$, dann ist $\frac{a}{d}$ eine reelle nicht-negative Zahl; denn es ist stets $\Im m \frac{az+b}{d} \geq 0$ für $z \in \mathfrak{H}_1$. Infolgedessen haben alle Glieder der Reihe (65) denselben von Null verschiedenen Betrag. Wegen der Konvergenz der Reihe dürfen dann nur endlich viele Glieder auftreten; d. h. es ist $n_{\varrho} > 0$.

Nunmehr ist gleichmäßig für alle x in einem Streifen $\text{abs } x \leq m$

$$(66) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_{\varrho}(z) = \sum_{t \bmod n_{\varrho}} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i L_{\varrho}(z+t)} (c(z+t) + d)^{-k} \quad (z = x + iy)$$

beweisbar. Es genügt natürlich, den Fall $n_{\varrho} = 0$, d. h. $c \neq 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\text{abs} \{ e^{2\pi i L_{\varrho}(z+t)} (c(z+t) + d)^{-k} \} \leq \varepsilon^{-k} \text{abs} (c(i+t) + d)^{-k}$$

für alle z in einem gegebenen Streifen $\text{abs } x \leq m$, $y \geq \delta > 0$ und eine geeignete nur von m, δ abhängige Konstante $\varepsilon > 0$. Dies folgt aus $\Im m L_{\varrho}(z+t) \geq 0$ und der mit

$$\text{abs} (c(z+t) + d) \geq \varepsilon \text{abs} (c(i+t) + d)$$

gleichwertigen Ungleichung

$$\operatorname{abs} \left\{ \frac{x + (y + q)i}{1 + q} + \frac{p + t}{1 + q} \right\} \geq \varepsilon \operatorname{abs} \left\{ i + \frac{p + t}{1 + q} \right\} \left(\frac{d}{c} = p + q i, q \geq 0 \right)$$

die auf Grund des PETERSSONschen Hilfssatzes⁹⁾ bestätigt werden kann, falls $\varepsilon = \varepsilon(m, \delta) > 0$ geeignet gewählt wird. $\varphi_\varepsilon(z)$ hat also eine von z unabhängige konvergente Majorante, wenn z in dem gegebenen Streifen variiert. Mithin gilt (66), sofern

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i L_\varepsilon(z+i)} (c(z+t) + d)^{-k}$$

existiert, was wir vorerst voraussetzen wollen. Später werden wir diesen Grenzwert berechnen.

Es bleibt noch

$$(67) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(z) = \sum_{\varepsilon \in S^+} \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_\varepsilon(z)$$

zu zeigen. $\varphi(z)$ und $\varphi_\varepsilon(z)$ stellen eindeutige Funktionen von $\zeta = e^{2\pi i z}$ dar:

$$\chi(\zeta) = \varphi(z), \quad \chi_\varepsilon(\zeta) = \varphi_\varepsilon(z).$$

Sie sind in $0 < \operatorname{abs} \zeta < 1$ regulär und haben in $\zeta = 0$ „hebbare Singularitäten“. Dies folgt für $\chi(\zeta)$ aus der Beschränktheit der POINCARÉschen Reihe $g_{-k}(Z, T)$ in \mathfrak{H}_n und für $\chi_\varepsilon(\zeta)$ aus (66). Da die POINCARÉsche Reihe $g_{-k}(Z, T)$, wie in § 2 gezeigt wurde, in jedem abgeschlossenen endlichen Teilbereich von \mathfrak{H}_n absolut und gleichmäßig konvergiert, so konvergiert

$$\chi(\zeta) = \sum_{\varepsilon \in S^+} \chi_\varepsilon(\zeta)$$

insbesondere in jedem Kreisring $0 < \varepsilon \leq \operatorname{abs} \zeta \leq 1 - \varepsilon$ gleichmäßig. Auf Grund der CAUCHYSchen Integralformel ist dann leicht

$$\chi(0) = \sum_{\varepsilon \in S^+} \chi_\varepsilon(0)$$

zu verifizieren. Damit ist (67) bewiesen.

In unserer ursprünglichen Bezeichnung kann auf Grund von (66) und (67) folgender Tatbestand formuliert werden: Existiert der Grenzwert

$$(68) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k},$$

wobei Z durch (55) gegeben und $z = x + iy$ gesetzt ist, und konvergiert die Reihe

$$(69) \quad \sum_{\sigma \in S(T)} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\sigma(Z))} |CZ + D|^{-k}$$

absolut, so stellt sie

$$(70) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g_{-k}(Z, T) = \Phi(g_{-k}(Z, T))$$

dar.

Wir berechnen (68). Dabei soll die Darstellung (30) zugrunde gelegt werden, wobei künftig $P = P^{(n, n)}$ an Stelle von Q' geschrieben werden soll. Ein volles Repräsentantensystem S_0 der Linksrestklassen von A_0 in M_n kann nach SIEGEL⁵⁾ in folgender Weise gewonnen werden:

$\{C_0, D_0\}$ durchlaufe ein volles System links nicht assoziierter teilerfremder symmetrischer Matrizenpaare mit $C_0 = C_0^{(n)}$, $|C_0| \neq 0$.

$\{Q\}$ durchlaufe ein volles System rechts nicht assoziierter primitiver Matrizen $Q = Q^{(n, n)}$

Man ergänze C_0, D_0 zu einer Modulsstitution $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \in M_s, Q$ zu einer unimodularen Matrix $U = (Q, R)$ und setze

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U', & B &= \begin{pmatrix} B_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{-1}, \\ C &= \begin{pmatrix} C_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U', & D &= \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{-1} \\ \sigma &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $E = E^{(n-s)}$. Schließlich hat s alle ganzen Zahlen des Intervalls $1 \leq s \leq n$ zu durchlaufen. Dem so bestimmten System von Modulsstitutionen ist noch die Einheitssubstitution hinzuzufügen. Für diese ist der Rang s von C gleich 0. Man erhält dann

$$(71) \quad g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{P \text{ primitiv}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 Z[P])} + \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{s=1}^n \sum_{P \text{ primitiv}} \sum_{(C_0, D_0)} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} |C_0 Z[Q] + D_0|^{-k},$$

wobei T von der speziellen Gestalt (27) angenommen ist.

Im folgenden verstehen wir unter Z die Matrix (55). Wir setzen noch $Z^* = X^* + iY^*$ und bezeichnen mit q_1, q_2, \dots, q_s die Spaltenvektoren der Matrix $Q = (q_{\mu\nu})$ ($\mu = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, s$). Ferner seien $q_1^*, q_2^*, \dots, q_s^*$ die Spaltenvektoren der Matrix Q^* , die aus Q durch Streichen der letzten Zeile entsteht. Nach⁵⁾ (Formel (32)) ist

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geq |Y[Q]| \quad \text{für } s > 0.$$

Da wir annehmen dürfen, daß $Y[Q]$ im MINKOWSKISCHEN Sinne reduziert ist, so kann mit einer geeigneten positiven Konstanten c_1

$$|Y[Q]| \geq c_1 \prod_{\nu=1}^s Y[q_\nu] = c_1 \prod_{\nu=1}^s (Y^*[q_\nu^*] + y q_{n\nu}^2)$$

geschlossen werden. Unter der Voraussetzung $(q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{ns}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ folgt ersichtlich $\lim_{y \rightarrow \infty} Y[Q] = \infty$, also

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1 \sigma(Z)[P])} |CZ + D|^{-k} = 0.$$

Es genügt also, wenn wir im folgenden $s = 0$ oder $s > 0$ und dann $(q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{ns}) = (0, 0, \dots, 0)$ annehmen. Hieraus folgt insbesondere $s < n$; denn Q ist primitiv. Ferner ist auch Q^* primitiv. Wir erledigen zunächst den Fall $s = 0$.

Es seien p_1, p_2, \dots, p_r bzw. $p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*$ die Spaltenvektoren von $P = (p_{\mu\nu})$ ($\mu = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, r$) bzw. derjenigen Matrix P^* , die aus P durch Streichen der letzten Zeile entsteht. Mit einer nur von T_1 abhängigen positiven Konstanten c_2 ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(T_1 Y[P]) &\geq c_2 \operatorname{Sp}(Y[P]) = c_2 \sum_{\nu=1}^r Y[p_\nu] \\ &= c_2 \sum_{\nu=1}^r (Y^*[p_\nu^*] + y p_{n\nu}^2), \end{aligned}$$

also

$$(72) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, Z(P))} = 0,$$

wenn $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nr}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ ist. Im Falle $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nr}) = (0, 0, \dots, 0)$ hingegen ist $r < n$, da P primitiv ist, und

$$(73) \quad e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, Z(P))} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, Z^*(P^*))},$$

was von z gar nicht mehr abhängt. P^* ist hier selber primitiv.

Wir haben jetzt noch den Fall $1 \leq s < n$ mit $(q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{ns}) = (0, 0, \dots, 0)$ zu behandeln. Q^* werde durch R^* zu einer unimodularen Matrix (Q^*, R^*) ergänzt. Wir dürfen dann

$$R = \begin{pmatrix} R^* & n \\ n' & 1 \end{pmatrix}$$

setzen. Dabei ist n eine Spalte von $n-1$ Nullen und n' eine Zeile von $n-s-1$ Nullen. Eine elementare Rechnung liefert

$$\begin{aligned} \sigma(Z) &= (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A_0 Z [Q] + B_0, A_0 Q' Z R \\ R' Z Q, Z [R] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 Z [Q] + D_0, C_0 Q' Z R \\ O, E \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A_0 Z^* [Q^*] + B_0, A_0 Q^{*'} Z^* R^*, n \\ R^{*'} Z^* Q^*, Z^* [R^*], n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 Z^* [Q^*] + D_0, C_0 Q^{*'} Z^* R^*, n \\ O, E, n \\ n', n', 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^*(Z^*), n \\ n', z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei stellt σ^* eine Modulsstitution $(n-1)$ -ten Grades dar, die mit $\{C_0, D_0\}$, $\{Q^*\}$ ersichtlich in demselben Zusammenhang steht, wie σ mit $\{C_0, D_0\}$, $\{Q\}$. Sei

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}, U^* = (Q^*, R^*).$$

Dann ist also

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{*'}, B^* = \begin{pmatrix} B_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{*-1}, \\ C^* &= \begin{pmatrix} C_0 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{*'}, D^* = \begin{pmatrix} D_0 & O \\ O & E \end{pmatrix} U^{*-1} \end{aligned}$$

mit $E = E^{(n-s-1)}$. Ferner gilt

$$|CZ + D| = |C_0 Z [Q] + D_0| = |C_0 Z^* [Q^*] + D_0| = |C^* Z^* + D^*|.$$

Eine einfache Betrachtung, ähnlich wie sie oben schon durchgeführt ist, ergibt nun

$$(74) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, \sigma(Z)(P))} |CZ + D|^{-k} = 0,$$

wenn $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nr}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ ist. Im Falle $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nr}) = (0, 0, \dots, 0)$ ist jedoch

$$(75) \quad e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, \sigma(Z)(P))} |CZ + D|^{-k} = e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, \sigma^*(Z^*)(P^*))} |C^* Z^* + D^*|^{-k},$$

was von z nicht mehr abhängt.

Wir stellen nunmehr fest: Damit ein Glied der POINCARÉschen Reihe (71) bei dem Grenzübergang $y \rightarrow \infty$ einen von Null verschiedenen Limes ergibt, ist

$$(76) \quad r < n, s < n, Q = \begin{pmatrix} Q^* \\ n' \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P^* \\ n' \end{pmatrix} \quad (n' = \text{Nullzeile})$$

notwendig. Sind diese Bedingungen erfüllt, so hängt das betreffende Reihenglied von z nicht mehr ab. Auf Grund der Bemerkungen, die in bezug auf (68), (69), (70) gemacht wurden, ergibt sich folgendes Resultat:

$$(77) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g_{-k}(Z, T) = 0 \text{ für } r = n,$$

$$(78) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g_{-k}(Z, T) = \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{P^* \text{ primitiv}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T_1, Z^* \{P^*\})} + \frac{1}{\varepsilon(T_1)} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{P^* \text{ primitiv}} \sum_{\substack{C_s, D_s \\ (Q^*)}} e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T, \sigma^s(Z^*) \{P^*\})} |C^* Z^* + D^*|^{-k}$$

für $r < n$.

Wir formulieren das Ergebnis in

Satz 2: Es sei $T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $T_1 = T_1^{(\tau)} > 0$ und halbganz. Ferner sei $k > n + r + 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$. Dann ist

$$(79) \quad \Phi(g_{-k}(Z, T)) = \begin{cases} 0 & \text{für } r = n, \\ g_{-k}(Z^*, T^*) & \text{für } r < n, \end{cases}$$

wenn Z^* und T^* aus Z bzw. T durch Streichen der letzten Zeile und Spalte hervorgehen.

Es sei $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ die lineare Schar der Spitzenformen n -ten Grades von der Dimension $-k$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ die Normalschar bezüglich $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ in der Schar aller Modulformen. $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ besteht aus den Modulformen $g_{-k}(Z)$, die auf allen Spitzenformen $h_{-k}(Z) \in \mathfrak{S}_k^{(n)}$ senkrecht stehen:

$$(g_{-k}(Z), h_{-k}(Z)) = 0.$$

Wir beweisen nun den Darstellungssatz in der folgenden scharfen Fassung:

Satz 3: Es sei $k > 2n + 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$. Dann ist die von den Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ erzeugte lineare Schar mit $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ identisch, während $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ alle Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T < n$ umfaßt und von diesen erzeugt wird. Jede Modulform n -ten Grades von der Dimension $-k$ gestattet eine eindeutige Darstellung der Art $g_{-k}(Z) + h_{-k}(Z)$ mit $g_{-k}(Z) \in \mathfrak{N}_k^{(n)}$ und $h_{-k}(Z) \in \mathfrak{S}_k^{(n)}$.

Beweis: Für Modulformen ersten Grades ist der Satz bekannt¹⁾. Wir beweisen ihn für Modulformen n -ten Grades unter der Voraussetzung, daß er für solche $(n-1)$ -ten Grades gilt. Auf die Nennung der Dimension können wir verzichten, da sie in jedem Falle $-k$ ist.

Nach Satz 2 lassen sich die Matrizen T_1, T_2, \dots, T_μ vom Rang $< n$ so bestimmen, daß die Formen $(n-1)$ -ten Grades

$$\Phi(g_{-k}(Z, T_1)), \Phi(g_{-k}(Z, T_2)), \dots, \Phi(g_{-k}(Z, T_\mu))$$

die lineare Schar aller Modulformen $(n-1)$ -ten Grades erzeugen. Sei $f_{-k}(Z)$ eine gegebene Modulform n -ten Grades. Dann ist

$$(80) \quad \Phi(f_{-k}(Z)) = \sum_{v=1}^{\mu} c_v \Phi(g_{-k}(Z, T_v))$$

mit gewissen konstanten Koeffizienten c_v . Offenbar stellt

$$(81) \quad h_{-k}(Z) = f_{-k}(Z) - \sum_{v=1}^{\mu} c_v g_{-k}(Z, T_v)$$

eine Spitzenform dar.

Die von den Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ erzeugte lineare Schar $\mathfrak{L}_k^{(n)}$ ist nach Satz 2 in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ enthalten. Nach allgemeinen Sätzen über metrische Vektorräume kann $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ als direkte Summe von $\mathfrak{L}_k^{(n)}$ und der in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ gelegenen Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ bezüglich $\mathfrak{L}_k^{(n)}$ dargestellt werden:

$$\mathfrak{S}_k^{(n)} = \mathfrak{L}_k^{(n)} + \mathfrak{N}_k^{(n)}.$$

Eine Spitzenform n -ten Grades, die auf allen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ senkrecht steht, muß nach (7) identisch verschwinden. Mithin ist $\mathfrak{S}_k^{(n)} = \mathfrak{L}_k^{(n)}$, insbesondere $h_{-k}(Z) \in \mathfrak{L}_k^{(n)}$. Aus (7) ist auch sofort zu ersehen, daß alle $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T < n$ in der Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ liegen. Ist $f_{-k}(Z) \in \mathfrak{N}_k^{(n)}$, so steht — in obiger Bezeichnung — $h_{-k}(Z)$ auf sich selber senkrecht, verschwindet also identisch. Die Reihen $g_{-k}(Z, T_v)$ ($v = 1, 2, \dots, \mu$) erzeugen also $\mathfrak{N}_k^{(n)}$.

Beachtet man, daß die lineare Schar aller Modulformen n -ten Grades als direkte Summe von $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ dargestellt werden kann, so folgt auch noch die letzte Behauptung von Satz 3.

Satz 4: Der Operator Φ bildet $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ isomorph auf $\mathfrak{N}_k^{(n-1)} + \mathfrak{S}_k^{(n-1)}$ ab, wenn $k > 2n + 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$ angenommen wird.

Beweis: Daß Φ die Normalschar $\mathfrak{N}_k^{(n)}$ homomorph auf $\mathfrak{N}_k^{(n-1)} + \mathfrak{S}_k^{(n-1)}$ abbildet, ergab sich beim Beweis von Satz 3. Sei

$$g_{-k}(Z) \in \mathfrak{N}_k^{(n)}, \quad \Phi(g_{-k}(Z)) = 0.$$

Dann ist $g_{-k}(Z) \in \mathfrak{S}_k^{(n)}$; d. h. $g_{-k}(Z)$ steht auf sich selber senkrecht, woraus $g_{-k}(Z) = 0$ erhellt, q. e. d.

Satz 5: Es sei $k > 2n + 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$. Die POINCARÉsche Reihe $g_{-k}(Z, T)$ mit Rang $T = n$ steht senkrecht auf allen Spitzenformen, deren FOURIERkoeffizient zur Exponentenmatrix T verschwindet. Durch diese Eigenschaft ist $g_{-k}(Z, T)$ in $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Der Beweis folgt sofort aus der Grundformel (7).

Satz 6: Es sei $\varrho(n, k)$ der Rang der linearen Schar aller Modulformen n -ten Grades von der Dimension $-k$. Dann ist für $k > 2n + 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$:

$$(82) \quad \varrho(n, k) \geq \varrho(n-1, k) \geq \dots \geq \varrho(1, k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies folgt aus Satz 4. Die Angaben über $\varrho(1, k)$ sind bekannt.

Die Voraussetzung $k > 2n + 1$ in den Sätzen 3 bis 6 gewährleistet die absolute Konvergenz der POINCARÉschen Reihen. Eine Einbeziehung des

Falles $k < 2n + 1$ könnte in der Weise geschehen, daß die POINCARÉschen Reihen einem besonderen Summationsverfahren (etwa dem HECKESchen¹³⁾) unterworfen werden. Bei der technischen Durchführung dürften indessen erhebliche Schwierigkeiten auftreten.

Um wenigstens im Falle $n = 2$ zeigen zu können, daß aus den absolut konvergenten POINCARÉschen Reihen alle Modulformen gewonnen werden können, bedürfen wir des folgenden allgemeinen Satzes von SIEGEL¹⁴⁾.

Satz 7: Es sei s_n die kleinste obere Schranke von $\text{Sp}(Y^{-1})$ im Fundamentalbereich \mathfrak{F}_n ; es sei

$$(83) \quad f_{-k}(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{Sp}(TZ)}$$

eine Modulform n -ten Grades von der Dimension $-k$ und

$$(84) \quad a(T) = 0 \quad \text{für } \text{Sp}(T) \leq \frac{k}{4\pi} s_n.$$

Dann ist $f_{-k}(Z) = 0$.

Beweis: Sei $Z = X + iY \in \mathfrak{F}_n$ und Y_r die Matrix, die aus Y durch Streichen der r -ten Zeile und Spalte entsteht. Auf Grund bekannter Ungleichungen⁵⁾ ergibt sich dann

$$(85) \quad \text{Sp}(Y^{-1}) = \sum_{r=1}^n \frac{|Y_r|}{|Y|} \leq c_n \sum_{r=1}^n \frac{1}{y_{rr}} \leq \frac{2c_n n}{\sqrt{3}}$$

mit einer von MINKOWSKI abgeschätzten nur von n abhängigen positiven Konstanten c_n , woraus $s_n \leq \frac{2c_n n}{\sqrt{3}}$ erhellt. Insbesondere ist damit die Endlichkeit von s_n gezeigt.

Aus $Z^* = X^* + iY^* \in \mathfrak{F}_{n-1}$ folgt, was leicht bestätigt werden kann, $Z = \begin{pmatrix} Z^* & n \\ n' & i\lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_n$ für alle hinreichend großen reellen λ . Die Spurrelation $\text{Sp}(Y^{-1}) = \text{Sp}(Y^{*-1}) + 1/\lambda$ zieht daher

$$(86) \quad s_{n-1} \leq s_n$$

nach sich.

Es sei nun entweder $n = 1$ oder $n > 1$ und Satz 7 für $n - 1$ an Stelle von n richtig. Im letzteren Falle verschwinden dann alle $a(T)$ mit $|T| = 0$, wie man durch Bildung von $\Phi(f_{-k}(Z))$ unter Berücksichtigung von (86) erkennt. In beiden Fällen ist die Funktion

$$\alpha(Z) = \text{abs } f_{-k}(Z) |Y|^{\frac{k}{2}} \quad \text{für } Z \in \mathfrak{F}_n$$

beschränkt und nimmt ihr Maximum $\mu \geq 0$ in einem Punkt Z_0 von \mathfrak{F}_n an. Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Variable, $Z = Z_0 + zE$, $\zeta = e^{2\pi iz}$ und

$$g(\zeta) = f_{-k}(Z) e^{-i\lambda \text{Sp}(Z)},$$

wobei λ durch $\frac{n\lambda}{2\pi} = 1 + \left[\frac{k}{4\pi} s_n\right]$ bestimmt werden möge. Dann ist $g(\zeta)$ regulär

¹³⁾ HECKE, E.: Theorie der Eisensteinreihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 5, 199 (1927).

¹⁴⁾ Formulierung und Beweis dieses Satzes in der hier wiedergegebenen Form verdanke ich Herrn SIEGEL (briefliche Mitteilung vom 28. 11. 49). Die Publikation erfolgt hier mit seinem Einverständnis.

in einem Kreise $\text{abs } \zeta \leq \varrho$ vom Radius $\varrho > 1$. Auf dem Kreise $e^{-2\pi y} = \text{abs } \zeta = \varrho$ liegt ein Punkt mit

$$\text{abs } g(\zeta) \geq \text{abs } g(1).$$

Wegen

$$\text{abs } g(\zeta) = \alpha(Z) |Y|^{-\frac{k}{2}} e^{\lambda \text{Sp}(Y)}$$

folgt

$$\alpha(Z) |Y|^{-\frac{k}{2}} e^{\lambda \text{Sp}(Y)} \geq \alpha(Z_0) |Y_0|^{-\frac{k}{2}} e^{\lambda \text{Sp}(Y_0)}.$$

Setzt man noch

$$n\lambda y - \frac{k}{2} \log |E + y Y_0^{-1}| = \varphi(y),$$

so ist also

$$\mu e^{\varphi(y)} \geq \mu \text{ mit } y = -\frac{1}{2\pi} \log \varrho.$$

Nun gilt aber $\varphi(0) = 0$ und

$$\varphi'(0) = n\lambda - \frac{k}{2} \text{Sp}(Y_0^{-1}) \geq n\lambda - \frac{k}{2} s_n > 0,$$

also ist $\varphi(y) < 0$, wenn ϱ hinreichend nahe bei 1 gewählt wird. Daher ist $\mu = 0$, also $f_{-k}(Z) = 0$, q. e. d.

Als Beispiel wähle man $n = 2$. Die Ungleichung (85) ist dann mit $c_2 = 4/3$ beweisbar, woraus

$$\frac{s_2}{4\pi} \leq \frac{4}{3\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{4}$$

folgt. Ferner ist

$$\frac{s_1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{10}.$$

Ist nun $k \leq 8$ und $a(O) = 0$, so folgt $\Phi(f_{-k}(Z)) = 0$, also $a(T) = 0$ für $\text{Sp}(T) < 2$, mithin $f_{-k}(Z) = 0$. Für $n = 2$ und jedes $k \leq 8$ ist also die Basis der Modulformen von der Dimension $-k$ höchstens eingliedrig. Da jede Modulform ersten Grades von der Dimension -2 identisch verschwindet, so ist stets $\Phi(f_{-2}(Z)) = 0$, also $a(O) = 0$ und daher $f_{-2}(Z) = 0$. Für $k = 4, 6, 8$ werden die Modulformen $f_{-k}(Z)$ von den EISENSTEIN-Reihen $g_{-k}(Z, O)$ erzeugt. Für $k \geq 10$, $k \equiv 0 \pmod{2}$ werden die Formen $f_{-k}(Z)$ jedenfalls durch die POINCARÉschen Reihen $g_{-k}(Z, T)$ dargestellt.

(Eingegangen am 22. August 1950.)

Systems of logic whose truth-values form lattices.

By

ALAN ROSE in Manchester.

Lattices: A "partially ordered system" is defined to be a set of a finite or infinite number of elements, in which an inclusive relation $x \subseteq y$ (read " x is included in y ") is defined between certain pairs of the elements obeying the

Reflexive Law: for all x , $x \subseteq x$,

Antisymmetric Law: if $x \subseteq y$ and $y \subseteq x$, then $x = y$,

Transitive law: if $x \subseteq y$ and $y \subseteq z$, then $x \subseteq z$.

We define $x < y$ to mean $x \subseteq y$ and $x \neq y$.

A "least element" of a partially ordered system P is defined to be an element O which is included in all the elements of P , while a "greatest element" I is one which includes all the elements of P . A least element, if it exists, is unique; the same is true for a greatest element.

A partially ordered system with a finite number of elements is said to be of finite order, or simply "finite". A finite system can be represented by a diagram. The elements x, y, \dots of the system are represented by small circles. The elements are joined by non-horizontal lines in such a way that there is a descending path from x to y if and only if $y < x$.



Fig. 1.

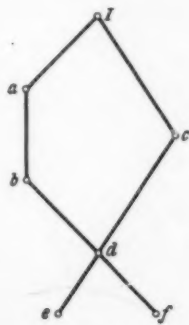


Fig. 2.

Thus in Fig. 1, $O < a$, $O < b$, $O < I$, $a < I$, $b < I$, but we cannot say either that $a < b$ or that $b < a$. In Fig. 2, $b < a$, $e < b$, but we cannot say that $a < c$, or that $c < a$, or that $e < f$ or that $f < e$.

A lower bound to a subset X of a partially ordered system P is an element a of P satisfying $a \subseteq x$ for all x . A "greatest lower bound" is a lower bound b which contains all other lower bounds. A "least upper bound" is defined similarly. The sum of two elements is defined to be their l. u. b., their product to be their g. l. b. A "lattice" is a partially ordered system in which any two elements x and y have a unique greatest lower bound and a unique least upper bound. Thus Fig. 1 represents a lattice, but Fig. 2 does not.

Truth-tables for the systems.

In 1920-22 ŁUKASIEWICZ [2], [3]¹⁾ and POST [4] independently generalised the classical 2-valued logic to systems with finite simply ordered²⁾ sets of truth-values. It has been suggested by BIRKHOFF [1] that it would be of value to develop systems in which the truth-values form lattices. He points out that J. M. KEYNES has suggested that the modes of probability form a partly ordered system and that this view is shared by B. O. KOOPMAN (Annals of Math. 41, 271-292 (1940)). We shall consider these systems, which include those of POST and ŁUKASIEWICZ as special cases. Illustrations will be given mainly with reference to one of the two non-distributive lattices with five elements. The diagram for this lattice is given in Fig. 3. Since our methods apply to non-distributive lattices our systems include some in which a distributive formula fails. This may be of interest in connection with quantum mechanics since BIRKHOFF and VON NEUMANN have found non-distributive modes in this subject. The functions "or", "and", "implies" and "not" of two-valued logic have been generalised to simply ordered m -valued systems and we generalise these definitions further here so that we have truth-tables for these functions for any system in which the truth-values form a lattice.

Since the main part of this paper was written I have found that in view of the existence of non-Euclidean geometries we can regard geometry as a system in which the truth-values form an eight-element lattice, and that in Euclidean geometry there are four designated truth-values. This justifies the use of the names "or", "and", "implies" and "not" for certain truth-tables of the lattice systems. I hope to publish these results shortly.

When we consider a system with a simply ordered set of truth-values, we assign to the propositions pvq , $p \cdot q$ respectively the higher and lower of the truth-values of p and q . But in a simply ordered system the least upper bound and greatest lower bound of two elements are the greater and smaller of the two elements respectively. This suggests that in general we assign to the propositions pvq , $p \cdot q$ respectively the l. u. b. and g. l. b. of the truth-values of p and q . Thus when the truth-values are the elements of the lattice of Fig. 3, the functions pvq , $p \cdot q$ have the truth-tables

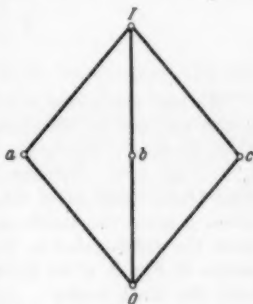


Fig. 3.

pvq	I	a	b	c	O	q	$p \cdot q$	I	a	b	c	O	q
I	I	I	I	I	I	I	I	I	a	b	c	O	I
a	I	a	I	I	a	a	a	a	O	O	O	O	a
b	I	I	b	I	b	b	b	O	b	O	O	O	b
c	I	I	I	c	c	c	c	O	O	O	c	O	c
O	I	a	b	c	O	O	O	O	O	O	O	O	O
p							p						

¹⁾ The numbers in brackets refer to the Bibliography.

²⁾ A system P is said to be simply ordered if, whenever x and y belong to P , one of the relations $x \subset y$, $x = y$, $y \subset x$ holds.

Generalising definitions recently proposed by SŁUPECKI [6] for implication and negation for 3-valued logic, we assign to the function $p \rightarrow q$ the same truth-value as q when p has the truth-value I ; otherwise we assign to $p \rightarrow q$ the truth-value I . We assign to the function $\ominus p$ the truth-value O when p has the truth-value I ; otherwise assigning to $\ominus p$ the truth-value I . Thus, when the truth-values are the elements of the lattice of Fig. 3, implication and negation have the truth-tables

$p \rightarrow q$	p	q					$\ominus p$
		I	a	b	c	O	
I	I	I	a	b	c	O	O
a	I	I	I	I	I	I	I
b	I	I	I	I	I	I	I
c	I	I	I	I	I	I	I
O	I	I	I	I	I	I	I

We also introduce $m-2$ analogues of SŁUPECKI's R function [6], where m is the number of elements of the lattice. We denote these functions by $\bar{\wedge}_1 p$, $\bar{\wedge}_2 p$, ..., $\bar{\wedge}_{m-2} p$. We denote the elements of the lattice by $I, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O$. We then assign to the functions $\bar{\wedge}_i p$ ($1 \leq i \leq m-2$) the same truth-value as p when p takes a truth-value different from I or a_i . When p takes the truth-value I , $\bar{\wedge}_i p$ takes the truth-value a_i , and when p takes the truth-value a_i we assign to $\bar{\wedge}_i p$ the truth-value I . Thus for the lattice of Fig. 3, if we write a_1, a_2, a_3 for a, b, c respectively, $\bar{\wedge}_1 p$, $\bar{\wedge}_2 p$, $\bar{\wedge}_3 p$ have the truth-tables

p	$\bar{\wedge}_1 p$	$\bar{\wedge}_2 p$	$\bar{\wedge}_3 p$
I	a	b	c
a	I	a	a
b	b	I	b
c	c	c	I
O	O	O	O

The distributive formula

$$(1) \quad (p \vee r) \cdot (q \vee r) \rightarrow (p \cdot q) \vee r$$

is not an identical formula of all the systems. In particular it is not an identical formula of the system based on the lattice of Fig. 3, as may be seen by assigning the truth-values a, b, c to p, q, r respectively. For then $p \vee r, q \vee r$ and therefore $(p \vee r) \cdot (q \vee r)$ have the truth-value I . On the other hand $p \cdot q$ has the truth-value O so that $(p \cdot q) \vee r$ has the truth-value c . Hence (1) has the truth-value c .

However our implication and negation functions have most of the usual properties of implication and negation.

For instance $p \rightarrow \ominus \ominus p$ is an identical formula, for when p has the truth-value I , $\ominus \ominus p$ has the truth-value I .

$\ominus \ominus p \rightarrow p$ is an identical formula, for if p does not have the truth-value I , $\ominus p$ has the truth-value I , so that $\ominus \ominus p$ has the truth-value O .

$$(2) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (\ominus q \rightarrow \ominus p)$$

and

$$(3) \quad (\ominus q \rightarrow \ominus p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

are identical formulae. For, if q has the truth-value I , $\ominus q$ has the truth-value O , so that $\ominus q \rightarrow \ominus p$, and therefore (2) have the truth-value I . If p has a truth-value different from I , $\ominus p$ and therefore $\ominus q \rightarrow \ominus p$, and therefore (2) have the truth-value I . If p has the truth-value I and q does not have the truth-value I , $p \rightarrow q$ does not have the truth-value I and therefore (2) has the truth-value I .

If p does not have the truth-value I or q has the truth-value I , $p \rightarrow q$ and therefore (3) have the truth-value I . If p has the truth-value I and q does not have the truth-value I , $\ominus q$ has the truth-value I and $\ominus p$ has the truth-value O , so that $\ominus q \rightarrow \ominus p$ has the truth-value O . Hence (3) has the truth-value I .

The formula

$$(4) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

is an identical formula. For if $p \rightarrow q$ does not have the truth-value I , (4) has the truth-value I . If $(q \rightarrow r)$ does not have the truth-value I , $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ and therefore (4) have the truth-value I . If p does not have the truth-value I $p \rightarrow r$ has the truth-value I , so that $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ and therefore (4) have the truth-value I . If $p, p \rightarrow q, q \rightarrow r$ all have the truth-value I , q and therefore r have the truth-value I . Hence $p \rightarrow r$ and therefore (4) have the truth-value I .

The formulae

$$(5) \quad (p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \cdot r)$$

and

$$(6) \quad (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$$

are identical formulae. For, if p takes the truth-value I , $p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \rightarrow q \cdot r, p \rightarrow q \vee r$ take the same truth-values as $q, r, q \cdot r, q \vee r$ respectively. Hence $(p \rightarrow q) \cdot (p \rightarrow r), (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ take the same truth-values as $q \cdot r, q \vee r$ respectively, so that (5) and (6) take the truth-value I . If p does not have truth-value I , $p \rightarrow q \cdot r, p \rightarrow q \vee r$ have the truth-value I , so that (5) and (6) have the truth-value I .

Functional completeness³⁾.

SLUPECKI [6] showed that a system of logic containing implication⁴⁾, negation⁴⁾, and the R function is functionally complete or full. This result will now be generalised to a system with m truth-values, the truth-values being simply ordered. By considering the relationship between this system⁵⁾ and systems whose truth-values are elements of lattices with m elements, the latter systems will be shown to be full.

We consider here an m -valued system whose truth-values are simply ordered and which has the functions $\rightarrow, \ominus, \bar{\wedge}_1, \dots, \bar{\wedge}_{m-2}$, as primitives. These functions are now defined as follows:

$p \rightarrow q$ has the same truth-value as q when p has the truth-value 1. When p has a truth-value different from 1, $p \rightarrow q$ has the truth-value 1.

$\ominus p$ has the truth-value m when p has the truth-value 1. Otherwise $\ominus p$ has truth-value 1.

⁴⁾ A system is said to be functionally complete if, given any truth-table, a function with that truth-table can be defined in terms of the primitive functions.

⁵⁾ In the sense of the second part of [6].

³⁾ Here 1 is regarded as the highest truth-value.

$\bar{\Lambda}_i p$ has the truth-value $i+1$ when p has the truth-value 1, and when p has the truth-value $i+1$, $\bar{\Lambda}_i p$ has the truth-value 1. Otherwise $\bar{\Lambda}_i p$ has the same truth-value as p .

Thus in the case $m=5$ these functions now have the following truth-tables:

$p \rightarrow q$	q					$\ominus p$	$\bar{\Lambda}_1 p$	$\bar{\Lambda}_2 p$	$\bar{\Lambda}_3 p$
	1	2	3	4	5				
1	1	2	3	4	5	5	2	3	4
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2
3	1	1	1	1	1	1	3	1	3
4	1	1	1	1	1	1	4	4	1
5	1	1	1	1	1	1	5	5	5

Hence, if we set up the 1-1 correspondence

I	a_1	a_2	\dots	a_i	\dots	a_{m-2}	O
1	2	3	\dots	$i+1$	\dots	$m-1$	m

between the truth-values of the two systems, the functions $\rightarrow, \ominus, \bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_i, \dots, \bar{\Lambda}_{m-2}$ of either system correspond respectively to the functions $\rightarrow, \ominus, \bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_i, \dots, \bar{\Lambda}_{m-2}$ of the other system.

We now consider the functions $p \top_i q$ ($1 \leq i \leq m-2$) defined by

$$p \top_1 q =_{df}. (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$p \top_{i+1} q =_{df}. \bar{\Lambda}_i (\bar{\Lambda}_i (q \top_i p) \top_i \bar{\Lambda}_i (p \top_i q)) \quad (1 \leq i \leq m-3).$$

We shall now prove that

$p \top_i q$ takes the higher of the truth-values of p and q when at least one of these is i or a higher value and that $p \top_i q$ takes the same truth-value as q when the truth-values of both p and q are below i .

We use induction on i :

When $i=1$, if p takes the truth-value 1, $p \rightarrow q$ takes the same truth-value as q , so that $p \top_1 q$ takes the truth-value 1. If p does not take the truth-value 1, $p \rightarrow q$ takes the truth-value 1, so that $p \top_1 q$ takes the same truth-value as q .

We now assume the theorem for i and prove it for $i+1$. If at least one of p, q has the truth-value 1, $p \top_i q, q \top_i p$ have the truth-value 1, so that $\bar{\Lambda}_i (q \top_i p)$ and $\bar{\Lambda}_i (p \top_i q)$ have the truth-value $i+1$. Hence $\bar{\Lambda}_i (q \top_i p) \top_i \bar{\Lambda}_i (p \top_i q)$ has the truth-value $i+1$, so that $p \top_{i+1} q$ has the truth-value 1.

If neither p nor q takes the truth-value 1 but at least one takes a truth-value at least as high as i , $p \top_i q$ and $q \top_i p$ both take the higher of the truth-values of p and q . Since this truth-value will not be 1 or $i+1$, $\bar{\Lambda}_i (p \top_i q)$ and $\bar{\Lambda}_i (q \top_i p)$ both take the higher of the truth-values of p and q , and, for the same reason, so does $p \top_{i+1} q$.

If one of p and q takes the truth-value $i+1$ and the other takes a truth-value lower than i , $p \top_i q$ and $q \top_i p$ take the truth-value $i+1$ and a truth-value lower than i ⁶). Hence $\bar{\Lambda}_i (p \top_i q)$ and $\bar{\Lambda}_i (q \top_i p)$ take the truth-value 1 and a truth-value lower than $i+1$ ^{6,7}). Hence $\bar{\Lambda}_i (q \top_i p) \top_i \bar{\Lambda}_i (p \top_i q)$ takes the truth-value 1, so that $p \top_{i+1} q$ takes the truth-value $i+1$.

⁶) Not necessarily respectively.

⁷) If q both p and q take the truth-value $i+1$, these expressions both take the truth-value 1.

If both p and q take truth-values lower than $i+1$, $p \top_i q$ and $q \top_i p$ both take truth-values lower than $i+1$. Hence $\bar{\wedge}_i(q \top_i p)$ takes the same truth-value as p , and $\bar{\wedge}_i(p \top_i q)$ takes the same truth-value as q , so that $\bar{\wedge}_i(q \top_i p) \top_i \bar{\wedge}_i(p \top_i q)$ takes the same truth-value as $p \top_i q$. But this is lower than $i+1$. Hence $p \top_{i+1} q$ takes the same truth-value as $p \top_i q$.

Thus in the case $m=5$, $p \top_1 q$ and $p \top_2 q$ have the truth-tables:

		q							q				
$p \top_1 q$		1	2	3	4	5	$p \top_2 q$		1	2	3	4	5
p	1	1	1	1	1	1	p	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	3	4	5		2	1	2	2	2	2
	3	1	2	3	4	5		3	1	2	3	4	5
	4	1	2	3	4	5		4	1	2	3	4	5
	5	1	2	3	4	5		5	1	2	3	4	5

This completes the proof. Hence when $i=m-2$, $p \top_i q$ takes the higher of the truth-values of p and q except when p takes the truth-value $m-1$ and q takes the truth-value m , in which case $p \top_{m-2} q$ takes the truth-value m . By an argument of exactly the same type as that of the second part of the induction proof it can be shown that if we define $p \vee q$ by

$$p \vee q = df. \bar{\wedge}_{m-2}(\bar{\wedge}_{m-2}(q \top_{m-2} p) \top_{m-2} \bar{\wedge}_{m-2}(p \top_{m-2} q))$$

then $p \vee q$ has the higher of the truth-values of p and q .

We now consider the functions $\bar{\wedge}_i p$ defined by

$$\begin{aligned} \bar{\wedge}_1 p &= df. \bar{\wedge}_1 p \\ \bar{\wedge}_{i+1} p &= df. \bar{\wedge}_{i+1} \bar{\wedge}_i p \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq m-3).$$

Then, if p has the truth-value j :

If $j \leq i$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value $j+1$.

If $j = i+1$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value 1.

If $j > i+1$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value j .

We prove this by induction on i .

The theorem is true when $i=1$ by the definition of $\bar{\wedge}_1 p$ and the properties of $\bar{\wedge}_1 p$.

We assume the theorem for i and prove it for $i+1$. If $j \leq i$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value $j+1$. But then $2 \leq j+1 \leq i+1$, so that $\bar{\wedge}_{i+1} \bar{\wedge}_i p$ has the same truth-value as $\bar{\wedge}_i p$, i. e. $j+1$. If $j = i+1$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value 1, so that $\bar{\wedge}_{i+1} \bar{\wedge}_i p$ has the truth-value $i+2 = j+1$.

If $j = i+2$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value $i+2$, so that $\bar{\wedge}_{i+1} \bar{\wedge}_i p$ has the truth-value 1.

If $j > i+2$, $\bar{\wedge}_i p$ has the truth-value j . Since now the truth-value of $\bar{\wedge}_i p$ is a number exceeding $i+2$, the truth-value of $\bar{\wedge}_{i+1} \bar{\wedge}_i p$ is j . This completes the proof.

In particular, $\bar{\wedge}_{m-2} p$ takes the truth-value 1 when and only when p takes the truth-value $m-1$, so that $\ominus \bar{\wedge}_{m-2} p$ takes the truth-value m when p takes the truth-value $m-1$, and otherwise $\ominus \bar{\wedge}_{m-2} p$ takes the truth-value 1.

We now define $\odot p$ by

$$\odot p = df. \bar{\wedge}_{m-2} \ominus \bar{\wedge}_{m-2} p$$

so that $\odot p$ takes the truth-value m when p takes the truth-value $m-1$ and otherwise $\odot p$ takes the truth-value $m-1$. We then define $\sim p$ by

$$\sim p = df. \perp_{m-2} (p \top_{m-2} \odot p).$$

Then if the truth-value j of p satisfies $1 \leq j \leq m-1$, $\sim p$ takes the truth-value $j+1$; and if p takes the truth-value m , $\sim p$ takes the truth-value 1. For, if $1 \leq j \leq m-2$, $\odot p$ takes the truth-value $m-1$, so that $p \top_{m-2} \odot p$ takes the truth-value j . But since $1 \leq j \leq m-2$, $\perp_{m-2}(p \top_{m-2} \odot p)$ takes the truth-value $j+1$. If $j = m-1$, $\odot p$ takes the truth-value m , so that $p \top_{m-2} \odot p$ takes the truth-value m . Hence $\perp_{m-2}(p \top_{m-2} \odot p)$ takes the truth-value m .

If $j = m$, $\odot p$ takes the truth-value $m-1$, so that $p \top_{m-2} \odot p$ takes the truth-value $m-1$. Hence $\perp_{m-2}(p \top_{m-2} \odot p)$ takes the truth-value 1.

The following truth-tables show the truth-values of the above functions in the case $m = 5$.

p	$\perp_1 p$	$\perp_2 p$	$\perp_3 p$	$\odot \perp_3 p$	$\odot p$	$p \top_3 \odot p$	$\sim p$
1	2	2	2	1	4	1	2
2	1	3	3	1	4	2	3
3	3	1	4	1	4	3	4
4	4	4	1	5	5	5	5
5	5	5	5	1	4	4	1

Since the simply ordered system contains \vee and \sim it is full by a theorem of POST [4]. Since, in the $1-1$ correspondence, the primitives correspond, the lattice systems are also full.

Formalisation of the Systems.

Our systems will be formalised, taking I as the designated truth-value, by a modification of the method used by ROSSER and TURQUETTE [5]. We take $\rightarrow, \odot, \perp_1, \perp_2, \dots, \perp_{m-2}$ as primitives.

We define the functions $J_I(P), J_{a_i}(P), J_O(P)$ by

$$J_I(P) = df. \odot \odot P$$

$$J_{a_i}(P) = df. \odot \odot \perp_i P \quad (1 \leq i \leq m-2)$$

$J_O(P) = df. \odot (J_I(P) \top_1 (\sum_{i=1}^{m-2} J_{a_i}(P)))$ (where \top_1 is defined as in the simply ordered case, and Σ refers to summation by \top_1), so that $J_I(P)$ takes the truth-value I when P takes the truth-value I and otherwise $J_I(P)$ takes the truth-value O . $J_{a_i}(P)$ takes the truth-value I when P takes the truth-value a_i and otherwise $J_{a_i}(P)$ takes the truth-value O .

$((\sum_{i=1}^{m-2} J_{a_i}(P)) \top_1 J_I(P))$ takes the truth-value O when P takes the truth-value O , otherwise the expression takes the truth-value I . Hence $J_O(P)$ takes the truth-value I when P takes the truth-value O , otherwise $J_O(P)$ takes the truth-value O .

We define $P \& Q$ by

$$P \& Q = df. \odot (\odot P \top_1 \odot Q).$$

If P and Q both have the truth-value I , $\odot P$ and $\odot Q$ both have the truth-value O , so that $\odot P \top_1 \odot Q$ has the truth-value O . Hence $P \& Q$ has the truth-value I . If at least one of P, Q has a truth-value different from I , at least

one of $\ominus P, \ominus Q$ will have the truth-value I , so that $\ominus P \top_1 \ominus Q$ has the truth-value I . Hence $P \& Q$ has the truth-value O .

The following truth-tables give the truth-values of the last six functions for the system based on the lattice of Fig. 3.

$P \& Q$		Q									
		I	a	b	c	O	$J_I(P)$	$J_a(P)$	$J_b(P)$	$J_c(P)$	$J_O(P)$
P	I	I	O	O	O	O	I	O	O	O	O
	a	O	O	O	O	O	O	I	O	O	O
	b	O	O	O	O	O	O	O	I	O	O
	c	O	O	O	O	O	O	O	O	I	O
	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	I

We define the algebraic functions $f_i(u)$ ($f_i, u = I, a_1, \dots, O$) to have the value equal to the truth-value of $\bar{\bigwedge}_i P$ when P has the truth-value u .

We now consider the axiom schemes

$$A1) \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$A2) \quad (\ominus P \rightarrow P) \rightarrow P$$

$$A3) \quad P \rightarrow (\ominus P \rightarrow Q)$$

$$A4) \quad J_j(P) \rightarrow \ominus P \quad (j = a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O)$$

$$A5) \quad J_v(P) \rightarrow J_v(\bar{\bigwedge}_i P) \quad \text{where } v = f_i(u) \quad (i = 1, 2, \dots, m-2)$$

$$A6) \quad J_I(P) \& J_u(Q) \rightarrow J_u(P \rightarrow Q) \quad (u = a_1, \dots, a_{m-2}, O)$$

$$A7) \quad J_I(P) \rightarrow J_O(\ominus P)$$

together with the rule of inference

$$R1) \quad \text{If } P \text{ and } P \rightarrow Q \text{ then } Q.$$

The axioms A1), A2), A3) have been shown by LUKASIEWICZ to give a deductively complete formalisation of the 2-valued propositional calculus when \ominus is used for negation. Our definitions of \top_1 and $\&$ in terms of \rightarrow and \ominus are the same as those used by LUKASIEWICZ for alternation and conjunction.

Hence any formula which contains no functions other than $\rightarrow, \ominus, \top_1$, and $\&$ is provable in our systems if the corresponding formula is an identical formula of the 2-valued propositional calculus.

In particular the formulae

- F 1) $P \rightarrow P$
- F 2) $P \top_1 P \rightarrow P$
- F 3) $Q \& P \rightarrow P$
- F 4) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- F 5) $P \& Q \rightarrow Q \& P$
- F 6) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- F 7) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow S) \rightarrow (P \top_1 R \rightarrow Q \top_1 S))$
- F 8) $(P \top_1 Q) \& R \rightarrow ((P \& R) \top_1 (Q \& R))$
- F 9) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q \& R))$
- F 10) $P \top_1 \ominus P$
- F 11) $\ominus \ominus P \rightarrow P$
- F 12) $P \rightarrow \ominus \ominus P$
- F 13) $\ominus P \& Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
- F 14) $P \top_1 (Q \top_1 R) \rightarrow (P \top_1 Q) \top_1 R$
- F 15) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \& R \rightarrow Q \& R)$
- F 16) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \top_1 R \rightarrow Q \top_1 R)$

are provable.

From F10) we deduce

$$(J_I(P) \top_1 \Sigma_1^{m-2} J_{a_i}(P)) \top_1 \ominus (J_I(P) \top_1 (\Sigma_1^{m-2} J_{a_i}(P)))$$

$$\text{i. e. F17) } (J_I(P) \top_1 \Sigma_1^{m-2} J_{a_i}(P)) \top_1 J_O(P).$$

By repeated application of F14) and F16) we obtain the analogue of ROSSER and TURQUETTE's a10^a).

By the definition of $J_I(P)$, F11) is identical with $J_I(P) \rightarrow P$ and F12) is identical with $P \rightarrow J_I(P)$.

From F6), A4), F13), F15[§] and R1) we deduce

$$\begin{aligned} \text{F18) } J_j(P) \& J_k(Q) \rightarrow (P \rightarrow Q) & (j = a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O; \\ & k = I, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O) \end{aligned}$$

and by a similar method we can prove

$$J_I(P) \& J_I(Q) \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

From F18), F12), F6) and R1) we deduce

$$\begin{aligned} \text{F19) } J_j(P) \& J_k(Q) \rightarrow J_I(P \rightarrow Q) & (j = a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O; \\ & k = I, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O) \end{aligned}$$

and similarly we deduce

$$\text{F19') } J_I(P) \& J_I(Q) \rightarrow J_I(P \rightarrow Q).$$

From F12) we deduce

$$\ominus P \rightarrow J_I(\ominus P).$$

From this, A4), F6), and R1) we deduce

$$\text{F20) } J_j(P) \rightarrow J_I(\ominus P) \quad (j = a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, O).$$

It has been shown by ROSSER and TURQUETTE [5] that a formalisation of an m -valued truth-system whose truth-values are simply ordered, which has s designated truth-values and which satisfies the following conditions, is deductively complete.

(1) There exist b basic functions denoted by $F_i(P_1, \dots, P_{a_i})$ ($i = 1, \dots, b$) which take the truth-values $F_i(x_1, \dots, x_{a_i})$ when their arguments P_1, \dots, P_{a_i} are assigned the ordered sets of truth-values $[x_1, \dots, x_{a_i}]$.

(2) An implication function denoted by $P \rightarrow Q$, a conjunction function denoted by $P \cdot Q$ and an alternation function denoted by $P \vee Q$ can be defined in terms of the basic functions.

(3) A set of m -functions can be defined which are denoted by $J_k(P)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

(4) The truth-value of $P \rightarrow Q$ is undesignated when and only when the truth-value of P is designated and that of Q is undesignated.

(5) The truth-value of $P \cdot Q$ is designated when and only when the truth-values of both P and Q are designated.

(6) The truth-value of $P \vee Q$ is undesignated when and only when the truth-values of both P and Q are undesignated.

(7) The truth-value of $J_k(P)$ is designated when the truth-value of P is k and is undesignated otherwise.

(8) The axiom schemes and rule of inference of the system are

^a) See below.

- a 1) $P \rightarrow P$
 a 2) $P \vee P \rightarrow P$
 a 3) $Q \cdot P \rightarrow P$
 a 4) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
 a 5) $P \cdot Q \rightarrow Q \cdot P$
 a 6) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
 a 7) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow S) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)))$
 a 8) $(P \vee Q) \cdot R \rightarrow (P \cdot R) \vee (Q \cdot R)$
 a 9) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q \cdot R))$
 a 10) $\sum_1^m J_i(P)$
 a 11) $J_i(P) \rightarrow P \quad (1 \leq i \leq s)$
 a 12) $\Pi_1^s J_u(P_k) \rightarrow J_v(F_i(P_1, \dots, P_{a_i}))$ where $u = x_i$ and
 $v = F_i(x_1, \dots, x_{a_i})$.

R1) If P and $P \rightarrow Q$ then Q .

By considering truth-tables it can be seen that our functions \rightarrow , \vee , \cdot , & the J functions satisfy the respective conditions for \rightarrow , \vee , \cdot , and the J functions in the case $s = 1$. Hence from F1-9), the modified form of F17), F11), A7), F20), A5), A6), F19) and F19') deductive completeness follows from the above result of ROSSER and TURQUETTE, in view of the 1-1 correspondence between the elements of any of our systems and the system with the same number of truth-values in which the truth-values are simply ordered. By considering truth-tables our axioms can be seen to be identical formulae. Since R1) is the only rule of inference, consideration of the \rightarrow table shows that our formalisation is plausible.

Strong completeness.

Suppose we adjoin to the axioms the formula $F(P_1, P_2, \dots, P_l)$ which takes a truth-value different from I when P_i takes the truth-value $a_{f(i)}$ ($f, i = 0, 1, 2, \dots, m-1$)⁹⁾. From this formula we deduce

$$F\{\bar{\wedge}_{f(i)}(P \vee \ominus P), \dots, \bar{\wedge}_{f(l)}(P \vee \ominus P)\} = \Phi(P)^{10)} \quad (\text{say})$$

This formula never takes the truth-value I since $\bar{\wedge}_{f(i)}(P \vee \ominus P)$ always takes the truth-value $a_{f(i)}$.

Hence, in view of the weak completeness,

$$\Phi(P) \rightarrow Q$$

is demonstrable. From this and R1) we deduce Q . Thus the formalisation is strongly complete.

Lattice-Theoretic Characterisation of the Systems.

We consider the problem for the lattice of Fig. 3. For other lattices the treatment is similar. We denote statements by ordered triples of elements (a, b, c) , (d, e, f) , ... from a Boolean algebra, where

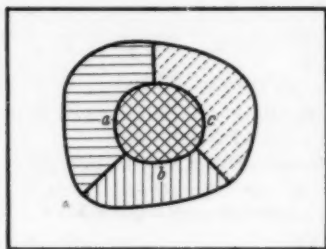
$$a \cap b = b \cap c = c \cap a$$

$$d \cap e = e \cap f = f \cap d$$

We denote this type of element by E_{abc}, E_{def}, \dots

⁹⁾ Here a_s is regarded as I and a_{m-1} as O .

¹⁰⁾ $\bar{\wedge}_s P$ is here to be regarded as $P \cdot \bar{\wedge}_{m-1} P$ is defined in terms of the primitive functions, and has a truth-table similar to those of the other $\bar{\wedge}_i$'s.

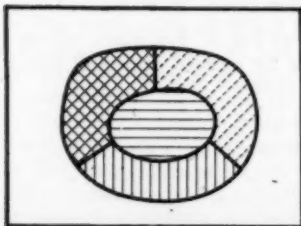
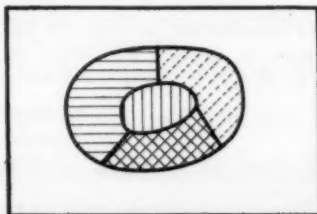
Fig. 4 (a, b, c).

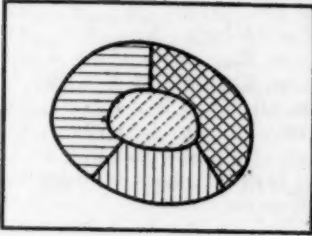
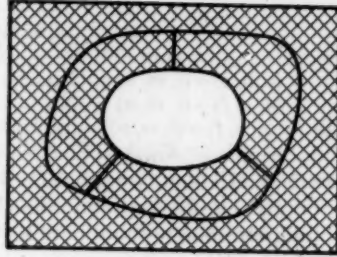
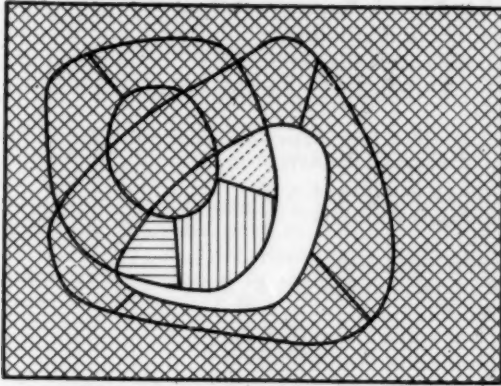
If (a, b, c) denotes some specific statement “— — —”, while (d, e, f) denotes another statement “...”, ($E'_{abc} \cup d, E'_{abc} \cup e, E'_{abc} \cup f$) denotes the statement “— — —” implies “...”, ($E'_{abc}, E'_{abc}, E'_{abc}$) denotes the statement not “— — —”, ($a, (a \cup b) \cap E'_{abc}, (a \cup c) \cap E'_{abc}$) denotes the statement $\bar{\Lambda}_1$ “— — —”, ($(b \cup a) \cap E'_{abc}, b, (b \cup c) \cap E'_{abc}$) denotes the statement $\bar{\Lambda}_2$ “— — —”, ($(c \cup a) \cap E'_{abc}, (c \cup b) \cap E'_{abc}, c$) denotes the statement $\bar{\Lambda}_3$ “— — —”. Since $(E'_{abc} \cup d) \cap (E'_{abc} \cup e) = E'_{abc} \cup (d \cap e) = E'_{abc} \cup E_{def}$ which is symmetrical in a, b, c and in d, e, f , (a, b, c) \rightarrow (d, e, f) satisfies the intersection condition. Since all three elements of $\ominus(a, b, c)$ are identical this does so also.

Since $a \cap (a \cup b) = a \cap (a \cup c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) = a$, the condition is satisfied by $\bar{\Lambda}_1(a, b, c)$ and it can similarly be shown to be satisfied by $\bar{\Lambda}_2$ and $\bar{\Lambda}_3$.

The intuitive inner meaning to be attached to (d, e, f) is that d is the region in which (d, e, f) takes the truth-value a or the truth-value I , e is the region in which it takes the truth-value b or the truth-value I , and f is the region in which it takes the truth-value c or the truth-value I . Thus E_{def} is the region in which it takes the truth-value I . The diagrams 4—9, in the style of Venn, illustrate the conformity of this with our definitions of the primitive functions. The criss-cross shading denotes the region in which the proposition has the truth-value I , the horizontal shading that in which it has the truth-value a , the vertical shading that in which it has the truth-value b , the dotted area that in which it has the truth-value c , the white area that in which it has the truth-value O .

It will now be shown that all our axioms are equal to (I, I, I) . First we must examine our defined functions.

Fig. 5 $\bar{\Lambda}_1(a, b, c)$.Fig. 6 $\bar{\Lambda}_2(a, b, c)$.

Fig. 7 $\bar{A}, (a, b, c)$.Fig. 8 $\ominus (a, b, c)$.Fig. 9 $(a, b, c) \rightarrow (d, e, f)$.

$$\begin{aligned}
 (a, b, c) \top_1 (d, e, f) &= ((a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \rightarrow (d, e, f) \\
 &= (E_{abc} \cup d, E'_{abc} \cup e, E'_{abc} \cup f) \rightarrow (d, e, f) \\
 &= ((E_{abc} \cap E'_{def}) \cup d, \dots \cup e, \dots \cup f) \\
 &= ((E_{abc} \cup d) \cap (d' \cup e' \cup d), \dots \cup e, \dots \cup f) \\
 &= (E_{abc} \cup d, E_{abc} \cup e, E_{abc} \cup f) \\
 (a, b, c) \& (d, e, f) &= \ominus (\ominus (a, b, c) \top_1 \ominus (d, e, f)) \\
 &= \ominus ((E'_{abc}, E'_{abc}, E'_{abc}) \top_1 (E'_{def}, E'_{def}, E'_{def})) \\
 &= \ominus (E_{abc} \cup E_{def}, \dots, \dots) \\
 &= (E_{abc} \cap E_{def}, \dots, \dots) \\
 J_I(a, b, c) &= \ominus \ominus (a, b, c) = \ominus (E_{abc}, \dots, \dots) = (E_{abc}, E_{abc}, E_{abc}) \\
 J_a(a, b, c) &= \ominus \ominus \bar{A}_1(a, b, c) = \ominus \ominus (a, (a \cup b) \cap E', (a \cup c) \cap E') \\
 &= \ominus (a' \cup E, \dots, \dots) = (a \cap E', a \cap E', a \cap E'). \\
 \text{Similarly } J_b(a, b, c) &= (b \cap E', b \cap E', b \cap E') \\
 \text{and } J_c(a, b, c) &= (c \cap E', c \cap E', c \cap E'). \\
 \text{Hence } J_O(a, b, c) &= \ominus (J_I \top_1 J_a \top_1 J_b \top_1 J_c) \\
 &= \ominus (E \cup (a \cap E') \cup (b \cap E') \cup (c \cap E'), \dots, \dots) \\
 &= \ominus (E \cup ((a \cup b \cup c) \cap E'), \dots, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ominus (E \cup a \cup b \cup c, \dots, \dots) \\
&= \ominus (a \cup b \cup c, \dots, \dots) \\
&= (a' \cap b' \cap c', a' \cap b' \cap c', a' \cap b' \cap c').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A1) \quad (a, b, c) \rightarrow (l, m, n) &= (E'_{abc} \cup l, E'_{abc} \cup m, E'_{abc} \cup n) \\
(d, e, f) \rightarrow (l, m, n) &= (E'_{def} \cup l, E'_{def} \cup m, E'_{def} \cup n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } ((d, e, f) \rightarrow (l, m, n)) \rightarrow ((a, b, c) \rightarrow (l, m, n)) \\
= ((E'_{def} \cap E'_{lmn}) \cup (E'_{abc} \cup l), \dots \cup m), \dots \cup n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } ((a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \rightarrow (((d, e, f) \rightarrow (l, m, n)) \rightarrow ((a, b, c) \rightarrow (l, m, n))) \\
= ((E'_{abc} \cap E'_{def}) \cup ((E'_{def} \cap E'_{lmn}) \cup E'_{abc} \cup l), \dots \cup m), \dots \cup n)) \\
= (\text{since } E'_{lmn} = l' \cup m' = m' \cup n' = n' \cup l') \\
(I, I, I).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A2) \quad \ominus (a, b, c) \rightarrow (a, b, c) \\
= (E'_{abc}, E'_{abc}, E'_{abc}) \rightarrow (a, b, c) \\
= (E'_{abc} \cup a, E'_{abc} \cup b, E'_{abc} \cup c) = (a, b, c).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } (\ominus (a, b, c) \rightarrow (a, b, c)) \rightarrow (a, b, c) \\
= (E'_{abc} \cup a, E'_{abc} \cup b, E'_{abc} \cup c) \\
= (a' \cup b' \cup a, a' \cup b' \cup b, b' \cup c' \cup c) \\
= (I, I, I).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A3) \quad \ominus (a, b, c) \rightarrow (d, e, f) &= (E'_{abc}, E'_{abc}, E'_{abc}) \rightarrow (d, e, f) \\
&= (E'_{abc} \cup d, E'_{abc} \cup e, E'_{abc} \cup f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } (a, b, c) \rightarrow (\ominus (a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \\
= (E'_{abc} \cup E'_{abc} \cup d, \dots \cup e, \dots \cup f) \\
= (I, I, I).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A4) \quad J_a (a, b, c) \rightarrow \ominus (a, b, c) \\
= (a \cap E', a \cap E', a \cap E') \rightarrow (E', E', E') \\
= (a' \cup E \cup E', \dots, \dots) = (I, I, I).
\end{aligned}$$

$$\text{Similarly } J_b (a, b, c) \rightarrow \ominus (a, b, c) = (I, I, I)$$

$$\text{and } J_c (a, b, c) \rightarrow \ominus (a, b, c) = (I, I, I)$$

$$J_O (a, b, c) \rightarrow \ominus (a, b, c)$$

$$= (a' \cap b' \cap c', \dots, \dots) \rightarrow (E', E', E')$$

$$= (a \cup b \cup c \cup a' \cup b', \dots, \dots) = (I, I, I).$$

A5) We shall prove

$$J_a (P) \rightarrow J_I (\bar{\wedge}_1 P)$$

and

$$J_a (P) \rightarrow J_a (\bar{\wedge}_2 P).$$

The other proofs are similar.

$$\begin{aligned}
J_I (\bar{\wedge}_1 (a, b, c)) &= J_I (a, (a \cup b) \cap E', (a \cup c) \cap E') \\
&= (a \cap E', a \cap E', a \cap E').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } J_a (a, b, c) \rightarrow J_I (\bar{\wedge}_1 (a, b, c)) \\
= (a \cap E', a \cap E', a \cap E') \rightarrow (a \cap E', a \cap E', a \cap E') \\
= ((a \cap E')' \cup (a \cap E'), \dots, \dots) = (I, I, I)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_a (\bar{\wedge}_2 (a, b, c)) &= J_a ((b \cup a) \cap E', b, (b \cup c) \cap E') \\
&= ((b \cup a) \cap E' \cap (b' \cup E), \dots, \dots) \\
&= ((b \cup a) \cap (E' \cap b'), \dots, \dots) \\
&= ((b \cup a) \cap b', \dots, \dots) \\
&= (a \cap b', a \cap b', a \cap b') \\
&= (a \cap (a' \cup b'), \dots, \dots) \\
&= (a \cap E', a \cap E', a \cap E') = J_a (a, b, c).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hence } J_a ((a, b, c)) \rightarrow J_a (\bar{\wedge}_2 (a, b, c)) &= (I, I, I). \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A6) \quad & J_I(a, b, c) \& J_a(d, e, f) \\
 = & (E_{abc}, E_{abc}, E_{abc}) \& (E'_{des} \cap d, E'_{des} \cap d, E'_{des} \cap d) \\
 = & (E_{abc} \cap E'_{des} \cap d, \dots, \dots) \\
 J_a((a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \\
 = & J_a(E'_{abc} \cup d, E'_{abc} \cup e, E'_{abc} \cup f) \\
 = & (E_{abc} \cap E'_{des} \cap (E'_{abc} \cup d), \dots, \dots) \\
 = & (E_{abc} \cap E'_{des} \cap d, \dots, \dots) \\
 = & J_I(a, b, c) \& J_a(d, e, f)
 \end{aligned}$$

from which the result follows at once.

For J_b and J_c the proofs are similar.

$$\begin{aligned}
 J_I(a, b, c) \& J_O(d, e, f) \\
 = & (E_{abc}, E_{abc}, E_{abc}) \& (d' \cap e' \cap f', d' \cap e' \cap f', d' \cap e' \cap f') \\
 = & (E_{abc} \cap d' \cap e' \cap f', \dots, \dots) \\
 J_O((a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \\
 = & J_O(E'_{abc} \cup d, E'_{abc} \cup e, E'_{abc} \cup f) \\
 = & (E_{abc} \cap d' \cap e' \cap f', \dots, \dots) \\
 = & J_I(a, b, c) \& J_O(d, e, f).
 \end{aligned}$$

$$\text{Hence } (J_I(a, b, c) \& J_O(d, e, f)) \rightarrow J_O((a, b, c) \rightarrow (d, e, f)) \\
 = (I, I, I).$$

$$\begin{aligned}
 A7) \quad & J_I(a, b, c) \rightarrow J_O(\neg(a, b, c)) \\
 = & (E, E, E) \rightarrow J_O(E', E', E') = (E, E, E) \rightarrow (E, E, E) = (I, I, I).
 \end{aligned}$$

$$R1) \quad \text{If } (a, b, c) = (I, I, I)$$

$$\text{and } (a, b, c) \rightarrow (d, e, f) = (I, I, I), \text{ then } (d, e, f) = (I, I, I).$$

$$\text{For } (E_{abc} \cup d, E_{abc} \cup e, E_{abc} \cup f) = (I, I, I).$$

But since $(a, b, c) = (I, I, I)$, $E_{abc} = I$. Hence $E'_{abc} = O$. Thus $(d, e, f) = (I, I, I)$. Thus every tautology is equal to (I, I, I) . In view of the strong completeness no other formula is equal to (I, I, I) .

Bibliography.

- [1] BIRKHOFF, GARRETT: Lattice Theory. Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 25 (1948). —
 [2] ŁUKASIEWICZ, JAN: O logice trójwartościowej. Ruch filozoficzny, 5, 169 (1920). —
 [3] ŁUKASIEWICZ, JAN a. ALFRED TARSKI: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. C. r. Warsaw, Cl. III, 23, 30 (1930). — [4] POST, EMIL L.: Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. 43, 163 (1921). — [5] ROSSER, J. B., a. A. R. TURQUETTE: Axiom schemes for m -valued propositional calculi. J. Symb. Log. 10, 61 (1945). — [6] SZUPECKI, JERZY: Pełny trójwartościowy rachunek zdań. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska (Lublin), 1, Nr. 3, sect. F 193 (1946).

(Eingegangen am 21. Juli 1950.)

Die Eliminierbarkeit des bestimmten Artikels in Kodifikaten der Analysis.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg (Lahn).

Einleitung.

Der bestimmte Artikel wird in der mathematischen Logik durch das ι -Symbol folgendermaßen formalisiert: Ist von einer Aussage $\mathfrak{A}(a)$ bewiesen, daß sie auf genau ein Ding a zutrifft, so gilt $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ als „*dasjenige Ding x , auf das $\mathfrak{A}(x)$ zutrifft*“.

Durch das ι -Symbol werden die logischen Formeln sehr verwickelt, so daß man bestrebt ist, möglichst ohne dieses Symbol auszukommen. Insbesondere ist es eine wesentliche Vereinfachung für den Widerspruchsfreiheitsbeweis eines Kodifikats, wenn dieser ohne Berücksichtigung des ι -Symbols geführt werden kann. In einem Kodifikat der reinen Zahlentheorie ist dies möglich. Wie im HILBERT-BERNAYS¹⁾ bewiesen ist, läßt sich hier das ι -Symbol in der Weise eliminieren, daß jede mit Hilfe des ι -Symbols hergeleitete Formel, welche das ι -Symbol nicht enthält, auch ohne ι -Symbol hergeleitet werden kann. Daher folgt aus der Widerspruchsfreiheit des engeren Kodifikats, in dem das ι -Symbol nicht enthalten ist, auch die Widerspruchsfreiheit des durch das ι -Symbol erweiterten Kodifikats.

Nimmt man zum zahlentheoretischen Kodifikat gebundene Funktionsvariablen oder gebundene Formelvariablen mit entsprechenden All- und Existenzzeichen hinzu, so erhält man ein Kodifikat, in dem sich die Analysis entwickeln läßt. Die vorliegende Arbeit zeigt die Eliminierbarkeit des ι -Symbols für ein derartiges Kodifikat, das die im HILBERT-BERNAYS angegebenen Formalismen K und L umfaßt²⁾. Dabei wird die dort aufgeworfene Frage, ob das ι -Symbol im Formalismus K (mit gebundenen Funktionsvariablen) bei Hinzunahme eines speziellen Auswahlprinzips eliminierbar ist, im positiven Sinne beantwortet. Für den Formalismus L (mit gebundenen Formelvariablen) besteht diese Eliminierbarkeit bereits ohne Auswahlprinzip.

Wir lassen den bestimmten Artikel in dreifacher Form zu, nämlich in Anwendung auf Zahlen, Funktionen und Prädikate. Demgemäß unterscheiden wir *gegenständliche*, *funktionale* und *prädikative* ι -Ausdrücke, welche insgesamt eliminiert werden sollen. Wir beweisen diese Eliminierbarkeit in Form eines allgemeineren Satzes, nach dem zur Herleitung einer Formel keine stärkere Schachtelung von ι -Symbolen erforderlich ist, als sie in der Endformel auftritt.

¹⁾ HILBERT-BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, I. Band, S. 422—457.

²⁾ HILBERT-BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, II. Band, Supplement IV, S. 480—494.

§ 1. Das Kodifikat.

1. Zahlzeichen sind:

- a) *Ziffern*, d. h. Zeichen für bestimmte Zahlen, eventuell auch transfiniten Ordinalzahlen (Mitteilungszeichen: α, β, γ).
 b) *Freie Zahlvariablen* (Mitteilungszeichen: a, b, c).
 c) *Gebundene Zahlvariablen* (Mitteilungszeichen: x, y, z).

2. Funktionszeichen sind:

- a) Zeichen für bestimmte *Funktionen* (Mitteilungszeichen: φ, χ, ψ).
 b) *Freie Funktionsvariablen* (Mitteilungszeichen: f, g, h).
 c) *Gebundene Funktionsvariablen* (Mitteilungszeichen: u, v, w).

Zu jedem Funktionszeichen gehört eine bestimmte Anzahl n von Argumentstellen. Wir drücken dies aus, indem wir statt φ, f, u auch φ^n, f^n, u^n schreiben. (n kann auch 0 sein.)

3. Erklärung des Begriffs „Term“:

- a) Jede *Ziffer* und jede *freie Zahlvariable* ist ein *Term*.
 b) Ist f^n ein *Funktional*, und sind t_1, \dots, t_n *Terme*, so ist

$$f^n(t_1, \dots, t_n)$$

ein *Term*.

Mitteilungszeichen für *Terme*: r, s, t .

4. Erklärung des Begriffs „Funktional“.

- a) Jede *Funktion* und jede *freie Funktionsvariable* ist ein *Funktional*.
 b) Ist $t(a_1, \dots, a_n)$ ein *Term*^{a)}, welcher die gebundenen Zahlvariablen x_1, \dots, x_n nicht enthält, so ist

$$\lambda_{x_1, \dots, x_n} t(x_1, \dots, x_n)$$

ein *Funktional* mit n Argumentstellen.

Mitteilungszeichen für *Funktionale*: $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$.

Die zu einem Funktional gehörende Anzahl n von Argumentstellen bringen wir zum Ausdruck, indem wir statt \bar{f} auch \bar{f}^n schreiben.

5. Aussagezeichen sind:

- a) Zeichen für bestimmte *Prädikate* (Mitteilungszeichen: Φ, X, Ψ), darunter das *Gleichheitszeichen* „ $=$ “.

b) *Freie Formelvariablen* (Mitteilungszeichen: F, G, H).

c) *Gebundene Formelvariablen* (Mitteilungszeichen: U, V, W).

Zu jedem Aussagezeichen gehört eine Anzahl m von Argumentstellen für Funktionale und eine Anzahl n von Argumentstellen für Terme. Wir drücken dies aus, indem wir statt Φ, F, U auch $\Phi^{mn}, F^{mn}, U^{mn}$ schreiben. (m und n können auch 0 sein.) Insbesondere gehören zum Gleichheitsprädikat nur zwei Argumentstellen für Terme.

6. Erklärung des Begriffs „Formel“:

- a) Ist \mathfrak{P}^{mn} ein *Prädikat* oder eine *freie Formelvariable*, sind $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m$ *Funktionale* und t_1, \dots, t_n *Terme*, so ist

$$\mathfrak{P}^{mn}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m, t_1, \dots, t_n)$$

eine *Formel*. Insbesondere ist $t_1 = t_2$ eine Formel, wenn t_1, t_2 Terme sind.

Diese Formeln bezeichnen wir als „*Primformeln*“.

- b) Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Formeln, so auch

^{a)} $t(a_1, \dots, a_n)$ braucht die a_1, \dots, a_n nicht zu enthalten.

- $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (die *Implikation*: „Wenn \mathfrak{A} , so \mathfrak{B} “),
 $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (die *Konjunktion*: „ \mathfrak{A} und \mathfrak{B} “),
 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (die *Disjunktion*: „ \mathfrak{A} oder \mathfrak{B} “),
 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ (die *Äquivalenz*: „ \mathfrak{A} ist gleichwertig mit \mathfrak{B} “)
 $\neg \mathfrak{A}$ (die *Negation*: „nicht \mathfrak{A} “).

c) Ist $\mathfrak{A}(a)$ eine Formel⁴⁾, welche die gebundene Zahlvariable x nicht enthält, so sind auch Formeln:

- $(x) \mathfrak{A}(x)$ („Für alle Zahlen x gilt $\mathfrak{A}(x)$ “),
 $(\exists x) \mathfrak{A}(x)$ („Es gibt eine Zahl x mit $\mathfrak{A}(x)$ “).

d) Ist $\mathfrak{A}(f^n)$ eine Formel, welche die gebundene Funktionsvariable u^n nicht enthält, so sind auch Formeln:

- $(u^n) \mathfrak{A}(u^n)$ („Für alle Funktionen u^n gilt $\mathfrak{A}(u^n)$ “),
 $(\exists u^n) \mathfrak{A}(u^n)$ („Es gibt eine Funktion u^n mit $\mathfrak{A}(u^n)$ “).

e) Ist $\mathfrak{A}(F^{mn})$ eine Formel, welche die gebundene Formelvariable U^{mn} nicht enthält, so sind auch Formeln:

- $(U^{mn}) \mathfrak{A}(U^{mn})$ („Für alle Prädikate U^{mn} gilt $\mathfrak{A}(U^{mn})$ “),
 $(\exists U^{mn}) \mathfrak{A}(U^{mn})$ („Es gibt ein Prädikat U^{mn} mit $\mathfrak{A}(U^{mn})$ “).

Wollen wir die Argumentstellen von F^{mn} in $\mathfrak{A}(F^{mn})$ zum Ausdruck bringen, so wählen wir die ausführlichere Schreibweise:

$$\mathfrak{A}_{u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n} (F^{mn} (u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)).$$

Dann lautet die Formel mit dem Allzeichen

$$(U^{mn}) \mathfrak{A}_{u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n} (U^{mn} (u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n))$$

und entsprechend die Formel mit dem Existenzzeichen.

Mitteilungszeichen für Formeln: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$

7. Grundformeln gliedern sich in:

I. Logische Grundformeln:

- 1) Die identisch wahren Formeln der Aussagenlogik.
- 2) Die Quantoren-Grundformeln

a) für Zahlvariablen:

$$(x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a) \quad \mathfrak{A}(a) \rightarrow (\exists x) \mathfrak{A}(x)$$

b) für Funktionsvariablen:

$$(u^n) \mathfrak{A}(u^n) \rightarrow \mathfrak{A}(f^n) \quad \mathfrak{A}(f^n) \rightarrow (\exists u^n) \mathfrak{A}(u^n)$$

c) für Formelvariablen:

$$(U^{mn}) \mathfrak{A}(U^{mn}) \rightarrow \mathfrak{A}(F^{mn}) \quad \mathfrak{A}(F^{mn}) \rightarrow (\exists U^{mn}) \mathfrak{A}(U^{mn})$$

II. Gleichheits-Grundformeln:

- a) $a = a$
- b) $a = b \rightarrow [\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{A}(b)]$
- c) $(x_1) \dots (x_n) [f^n(x_1, \dots, x_n) = g^n(x_1, \dots, x_n)] \rightarrow [\mathfrak{A}(f^n) \rightarrow \mathfrak{A}(g^n)]$

III. Auswahl-Grundformel:

$$(x_1) \dots (x_n) (\exists y) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow (\exists u^n) (x_1) \dots (x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, u^n(x_1, \dots, x_n))$$

IV. λ -Grundformel:

$$[\lambda x_1, \dots, x_n t(x_1, \dots, x_n)] (a_1, \dots, a_n) = t(a_1, \dots, a_n)$$

⁴⁾ Die Formel $\mathfrak{A}(a)$ braucht a nicht zu enthalten. Entsprechendes gilt für d) und e).

V. Mathematische Grundformeln,

das sind gewisse, in beliebiger Weise festgelegte Formeln, welche das λ -Symbol nicht enthalten. (Hierunter können Axiome für Funktionen und Prädikate, weitere Auswahlaxiome, das Axiom der vollständigen Induktion oder auch Axiome der transfiniten Induktion auftreten.)

8. *Schlußschemata* sind:

I. Grund-Schlußschema.

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

II. Quantoren-Schlußschemata

a) für Zahlvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a) \quad \mathfrak{A} \rightarrow (x) \mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)} \quad \frac{\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B} \quad (E x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}}$$

b) für Funktionsvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(f^n) \quad \mathfrak{A} \rightarrow (u^n) \mathfrak{B}(u^n)}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(f^n)} \quad \frac{\mathfrak{A}(f^n) \rightarrow \mathfrak{B} \quad (E u^n) \mathfrak{A}(u^n) \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}(f^n) \rightarrow \mathfrak{B}}$$

c) für Formelvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(F^{mn}) \quad \mathfrak{A} \rightarrow (U^{mn}) \mathfrak{B}(U^{mn})}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(F^{mn})} \quad \frac{\mathfrak{A}(F^{mn}) \rightarrow \mathfrak{B} \quad (E U^{mn}) \mathfrak{A}(U^{mn}) \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}(F^{mn}) \rightarrow \mathfrak{B}}$$

III. Einsetzungen

a) für Zahlvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A}(a)}{\mathfrak{A}(t)}$$

b) für Funktionsvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A}(f^n)}{\mathfrak{A}(f^n)}$$

c) für Formelvariablen:

$$\frac{\mathfrak{A}_{u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n}(F^{mn}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n))}{\mathfrak{A}_{u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n}(\mathfrak{B}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n))}$$

Zu den Schlußschematen II und III gehören die *Variablenbedingungen*: Die freie Zahlvariable a bzw. die freie Funktionsvariable f^n bzw. die freie Formelvariable F^{mn} darf in den betreffenden Oberformeln nur an den bezeichneten Stellen auftreten.

Ferner ist darauf zu achten, daß die Unterformeln ebenso wie die Oberformeln tatsächlich Formeln darstellen. Dazu müssen die gebundenen Variablen entsprechend gewählt werden, daß keine Kollisionen entstehen.

9. *Herleitungen*. Unter der „Herleitung einer Formel \mathfrak{C} “ verstehen wir eine endliche Folge von Formeln mit folgenden Eigenschaften:

a) Jede Formel der Folge ist entweder eine Grundformel oder die Unterformel eines Schlusses, dessen Oberformeln in der Folge vor der betreffenden Formel stehen.

b) \mathfrak{C} ist die letzte Formel der Folge.

☐ heißt dann die „Endformel der Herleitung“. Wir bezeichnen eine Formel als „herleitbar“, wenn es eine Herleitung gibt, in der diese Formel als Endformel auftritt.

10. Unitätsformeln.

a) *Gegenständliche Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (a) bezüglich a :

$$(E x) (y) [\mathfrak{A}(y) \sim y = x]^5$$

b) *Funktionale Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (f^n) bezüglich f^n :

$$(E u^n) (v^n) [\mathfrak{A}(v^n) \sim v^n = u^n].$$

Dabei steht $v^n = u^n$ zur Abkürzung für

$$(x_1) \dots (x_n) [v^n(x_1, \dots, x_n) = u^n(x_1, \dots, x_n)]$$

c) *Prädikative Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (F^{mn}) bezüglich F^{mn} :

$$(E U^{mn}) (V^{mn}) [\mathfrak{A}(V^{mn}) \sim V^{mn} \approx U^{mn}]$$

Dabei steht $V^{mn} \approx U^{mn}$ für

$$(u_1) \dots (u_m) (x_1) \dots (x_n) [V^{mn}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) \sim U^{mn}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)]$$

11. *Erweiterung des Termbegriffs.* Zu der unter 3a, b angegebenen Definition für Terme fügen wir hinzu:

c) Tritt in einer Herleitung die *gegenständliche Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (a) bezüglich a auf, so gilt im weiteren Verlauf der Herleitung

$$\iota_x \mathfrak{A}(x) \text{ („diejenige Zahl } x, \text{ für die } \mathfrak{A}(x) \text{ gilt“)}$$

als ein *Term*.

Hierbei ist die gebundene Zahlvariable x so zu wählen, daß keine Kollision mit schon in $\mathfrak{A}(a)$ auftretenden gebundenen Zahlvariablen entsteht. Wir bezeichnen einen solchen Term als „*t-Term*“.

12. *Erweiterung des Funktionalbegriffs.* Zu der Definition 4a, b für Funktionale fügen wir hinzu:

c) Tritt in einer Herleitung die *funktionale Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (f^n) bezüglich f^n auf, so gilt im weiteren Verlauf der Herleitung

$$\iota_u \mathfrak{A}(u) \text{ („diejenige Funktion } u, \text{ für die } \mathfrak{A}(u) \text{ gilt“)}$$

als ein *Funktional* mit n Argumentstellen.

Die gebundene Funktionsvariable u ist so zu wählen, daß sie nicht schon in $\mathfrak{A}(f^n)$ vorkommt. $\iota_u \mathfrak{A}(u)$ bezeichnen wir als „*t-Funktional*“.

Diese Erweiterung wirkt sich auf Grund der gekoppelten Definition für Terme und Funktionale zugleich in einer Erweiterung der Terme aus, ebenso wie die Erweiterung der Terme eine Erweiterung der Funktionale mit sich bringt.

13. *Erweiterung des Formelbegriffs.* Zu der Definition 6a für Primformeln fügen wir hinzu:

Tritt in einer Herleitung die *prädikative Unitätsformel* für eine Formel \mathfrak{A} (F^{mn}) bezüglich F^{mn} auf, sind $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m$ Funktionale und t_1, \dots, t_n Terme, so gilt im weiteren Verlauf der Herleitung

$$[\iota_U \mathfrak{A}(U)] (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m, t_1, \dots, t_n)$$

als eine *Primformel*,

⁵⁾ Diese Formel ist gleichwertig mit den beiden Formeln $(E x) \mathfrak{A}(x)$ und $(x) (y) [\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{A}(y) \rightarrow x = y]$. Entsprechendes gilt für die funktionale und die prädikative Unitätsformel.

Dabei soll U nicht in $\mathfrak{A}(F^{mn})$ vorkommen. Wir bezeichnen $\iota_U \mathfrak{A}(U)$ als ein „ ι -Prädikat“.

Die weitere Definition der Formeln bleibt mit dem Wortlaut von 6b—e bestehen. Durch die Erweiterung der Terme, Funktionale und Primformeln erweitert sich entsprechend der Formelbegriff.

14. *Erweiterung der Schlußschemata.* Zu den unter 8 aufgeführten Schlußschemata I—III fügen wir hinzu:

IV. ι -Schlüsse⁶⁾

a) für ι -Terme:

$$\frac{(E x) (y) [\mathfrak{A}(y) \sim y = x]}{(y) [\mathfrak{A}(y) \sim y = \iota_x \mathfrak{A}(x)]}$$

b) für ι -Funktionale:

$$\frac{(E u) (v) [\mathfrak{A}(v) \sim v \equiv u]}{(v) [\mathfrak{A}(v) \sim v \equiv \iota_u \mathfrak{A}(u)]}$$

c) für ι -Prädikate:

$$\frac{(E U) (V) [\mathfrak{A}(V) \sim V \approx U]}{(V) [\mathfrak{A}(V) \sim V \approx \iota_U \mathfrak{A}(U)]}$$

Die Variablen u, v bei b) und U, V bei c) sollen jeweils gleiche Anzahl von Argumentstellen haben.

15. *Herleitungen des erweiterten Kodifikats.* Die mathematischen Grundformeln sollen keine ι -Symbole enthalten. Auf die übrigen Grundformeln und auf alle Schlußschemata soll der erweiterte Term-, Funktional- und Formelbegriff angewandt werden. Unter dieser Erweiterung und mit Hinzunahme der ι -Schlüsse bleibt die Definition der Herleitung für das erweiterte Kodifikat mit dem Wortlaut von 9 bestehen.

§ 2. Ersetzungen der λ - und ι -Symbole.

Bevor wir zu den Ersetzungen kommen, welche zur Elimination der λ - und ι -Symbole führen, haben wir noch einige Begriffe einzuführen.

1. *Rümpfe.* Werden in Termen, Funktionalen oder Formeln einzelne oder alle darin auftretenden freien Variablen durch entsprechende gebundene Variablen ersetzt, so sprechen wir von „Term-Rümpfen“, „Funktional-Rümpfen“ bzw. „Formel-Rümpfen“. (Diese Bezeichnung soll auch gelten, wenn keine solche Ersetzungen stattgefunden haben.)

Die hierbei eingeführten gebundenen Variablen, welche nicht innerhalb des Rumpfes durch Quantoren, λ - oder ι -Symbole abgebunden sind, bezeichnen wir als die „offenen Variablen“ der betreffenden Rümpfe. Ersetzen wir die offenen Variablen eines Rumpfes durch entsprechende freie Variablen⁷⁾, so erhalten wir einen zu dem Rumpf „zugehörigen Term“, ein „zugehöriges Funktional“ bzw. eine „zugehörige Formel“.

Mitteilungszeichen für Term-Rümpfe: ξ, η, ζ ; für Funktional-Rümpfe: u, v, w ; für Formel-Rümpfe: $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

⁶⁾ Die Oberformeln dieser Schlüsse sind die entsprechenden Unitätsformeln. Die Unterformeln sind gleichwertig mit $\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$, $\mathfrak{A}(\iota_u \mathfrak{A}(u))$ bzw. $\mathfrak{A}(\iota_U \mathfrak{A}(U))$. Die hier gewählten Unterformeln haben für unser Eliminationsverfahren den Vorzug, daß die Ausdrücke $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, $\iota_u \mathfrak{A}(u)$, $\iota_U \mathfrak{A}(U)$ in diesen Formeln niemals von weiteren ι -Symbolen beherrscht werden.

⁷⁾ Diese freien Variablen sollen von den übrigen freien Variablen des betreffenden Rumpfes verschieden sein, und es sollen verschiedene offene Variablen durch verschiedene freie Variablen ersetzt werden.

Rümpfe, welche als äußerstes Zeichen ein ι -Symbol haben, nennen wir „ ι -Rümpfe“, und zwar unterscheiden wir „gegenständliche“, „funktionale“ und „prädikative“ ι -Rümpfe⁹).

Treten in einer Herleitung ι -Rümpfe auf, so enthält die Herleitung auf Grund der Bestimmungen für den Gebrauch der ι -Symbole vorhergehend die Unitätsformeln für die zugehörigen ι -Terme, ι -Funktionale bzw. ι -Prädikate, oder diese Unitätsformeln sind durch Einsetzungen aus vorhergehenden Formeln zu erhalten.

Funktional-Rümpfe, welche als äußerstes Zeichen ein λ -Symbol enthalten, nennen wir „ λ -Rümpfe“.

2. *Komponenten einer Formel.* Ein Formel-Rumpf, aus dem eine Formel (eventuell in Verbindung mit anderen Formel-Rümpfen) mit Hilfe logischer Zeichen (ohne λ - und ι -Symbol) aufgebaut ist, wird als „Komponente der Formel“ bezeichnet.

Diejenigen Komponenten einer Formel, deren zugehörige Formeln Primformeln sind, nennen wir die „Primkomponenten der Formel“. Diese sind für jede Formel eindeutig bestimmt.

Die Primkomponenten haben die Formen:

- a) $\mathfrak{P}^{mn}(u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n)$,
- b) $[\iota_U \cup (U)](u_1, \dots, u_m, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

Dabei sind die u_1, \dots, u_m Funktional-Rümpfe und die ξ_1, \dots, ξ_n Term-Rümpfe. \mathfrak{P}^{mn} ist ein Prädikat, eine freie oder gebundene Formelvariable, $\cup (U)$ ein Formel-Rumpf.

3. *Ersetzbarkeit des λ -Symbols.* In dem erweiterten Kodifikat kann das λ -Symbol mit Hilfe des ι -Symbols für Funktionale ersetzt werden, und zwar durch die explizite Definition, daß das λ -Funktional

$$\lambda_{x_1, \dots, x_n} t(x_1, \dots, x_n)$$

das ι -Funktional

$$\iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)]$$

bedeuten soll. Dazu haben wir zunächst nachzuweisen, daß die funktionale Unitätsformel für

$$(x_1) \dots (x_n) [f^n(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)]$$

bezüglich f^n herleitbar ist. Wir gewinnen sie folgendermaßen:

Aus der Gleichheits-Grundformel

$$t(a_1, \dots, a_n) = t(a_1, \dots, a_n)$$

folgt mit Hilfe einer Quantoren-Grundformel

$$(E y) [y = t(a_1, \dots, a_n)]$$

und nach Quantorenschlüssen

$$(x_1) \dots (x_n) (E y) [y = t(x_1, \dots, x_n)].$$

Durch eine Auswahl-Grundformel erhalten wir hieraus

$$(E u^n) (x_1) \dots (x_n) [u^n(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)].$$

⁹ Die prädikativen ι -Rümpfe sind keine Formel-Rümpfe, sondern Prädikaten-Rümpfe. Sie entstehen aus ι -Prädikaten, wenn darin freie Variablen durch gebundene Variablen ersetzt werden.

Aus Gleichheits-Grundformeln ergibt sich auf logischem Wege⁹⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^n) \{ (x_1) \dots (x_n) [u^n(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \rightarrow \\ (v^n) [(x_1) \dots (x_n) [v^n(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \sim v^n = u^n] \}. \end{array} \right.$$

Aus den letzten beiden Formeln ist schließlich mit logischen Mitteln⁹⁾ die verlangte Unitätsformel

$$(E u^n) (v^n) \{ (x_1) \dots (x_n) [v^n(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \sim v^n = u^n \}$$

zu erhalten. Die angegebene Ersetzung der λ -Funktionale durch ι -Funktionale verstößt also nicht gegen die Bestimmungen für den Gebrauch der ι -Symbole. Wir haben nur bei derartigen Ersetzungen in einer Herleitung immer die entsprechenden Unitätsformeln vorauszuschicken.

Bei dieser Ersetzung gehen die λ -Grundformeln über in

$$\{ \iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \} (a_1, \dots, a_n) = t(a_1, \dots, a_n).$$

Diese können wir in folgender Weise herleiten. Auf Grund der hergeleiteten Unitätsformel wenden wir einen funktionalen ι -Schluß an, und wir erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} (v) \{ (y_1) \dots (y_n) [v(y_1, \dots, y_n) = t(y_1, \dots, y_n)] \sim \\ v = \iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \}. \end{array} \right.$$

Ferner folgt aus der Unitätsformel

$$(E v) (y_1) \dots (y_n) [v(y_1, \dots, y_n) = t(y_1, \dots, y_n)].$$

Aus den letzten beiden Formeln ergibt sich

$$\left\{ \begin{array}{l} (E v) \{ (y_1) \dots (y_n) [v(y_1, \dots, y_n) = t(y_1, \dots, y_n)] \\ \wedge v = \iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \} \end{array} \right.$$

und hieraus mit Gleichheits-Grundformeln und logischen Mitteln

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_1) \dots (y_n) \{ t(y_1, \dots, y_n) = \\ \iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \} (y_1, \dots, y_n) \}, \end{array} \right.$$

woraus schließlich die verlangte Formel

$$\{ \iota_u(x_1) \dots (x_n) [u(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)] \} (a_1, \dots, a_n) = t(a_1, \dots, a_n)$$

zu gewinnen ist. Damit sind die Ersetzungen der λ -Grundformeln hergeleitet.

Auf Grund dieser Eliminierbarkeit scheiden wir das λ -Symbol aus unserem Kodifikat aus, wobei auch die λ -Grundformeln fortfallen. Wir betrachten also im folgenden nur Formeln, welche das λ -Symbol nicht enthalten.

Es ist zu beachten, daß bei dieser Elimination des λ -Symbols die Auswahl-Grundformeln herangezogen wurden.

4. *Äußere ι -Rümpfe.* Ist ein ι -Rumpf in einem Formel-Rumpf enthalten, und wird keine offene Variable des ι -Rumpfes innerhalb des Formel-Rumpfes abgegebunden, so bezeichnen wir den ι -Rumpf als einen „äußeren ι -Rumpf“ des betreffenden Formel-Rumpfes. In einer zu dem Formel-Rumpf zugehörigen Formel wird aus dem äußeren ι -Rumpf ein ι -Term, ι -Funktional bzw. ι -Prädikat.

5. *Der ι -Grad.* Unter dem „Grad eines ι -Rumpfes“ verstehen wir die Anzahl der ι -Symbole, die in dem ι -Rumpf auftreten. Der höchste Grad aller in einer Formel enthaltenen ι -Rümpfe wird als „ ι -Grad“ der Formel bezeichnet.

⁹⁾ Das heißt, mit Hilfe der logischen Grundformeln, Grundschlüsse, Quantorenschlüsse und Einsetzungen.

Einen ι -Rumpf, der den höchsten Grad aller in einer Herleitung auftretenden ι -Rümpfe besitzt, nennen wir „maximal“. In den Primkomponenten ist jeder maximale ι -Rumpf ein äußerer ι -Rumpf.

6. *Ersatzkomponenten.* Eine Formel möge als Komponente den Formel-Rumpf Ω besitzen. Wir bezeichnen mit \mathfrak{U} eine Reihe

$$\iota_U, U_1(U_1), \dots, \iota_U, U_r(U_r), \iota_{u_1}, \mathfrak{B}_1(u_1), \dots, \iota_{u_s}, \mathfrak{B}_s(u_s), \iota_{x_1}, \mathfrak{B}_1(x_1), \dots, \iota_{x_t}, \mathfrak{B}_t(x_t)$$

von äußeren ι -Rümpfen, die in Ω auftreten. Demgemäß schreiben wir $\Omega(\mathfrak{U})$ für Ω . Die Variablenreihe

$$U_1, \dots, U_r, u_1, \dots, u_s, x_1, \dots, x_t,$$

welche mit ihren Argumentstellen der \mathfrak{U} -Reihe entspricht, bezeichnen wir mit \mathfrak{X} , die Konjunktion

$$U_1(U_1) \wedge \dots \wedge U_r(U_r) \wedge \mathfrak{B}_1(u_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{B}_s(u_s) \wedge \mathfrak{B}_1(x_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{B}_t(x_t)$$

mit

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{X}),$$

die Folge aller Existenzzeichen für die Variablen aus \mathfrak{X} mit $(E\mathfrak{X})$ und die Folge aller Allzeichen für die Variablen aus \mathfrak{X} mit (\mathfrak{X}) .

Dann definieren wir für die Komponente $\Omega(\mathfrak{U})$ als „Ersatzkomponente 1. Art“ den Formel-Rumpf

$$(E\mathfrak{X})[\mathfrak{R}(\mathfrak{X}) \wedge \Omega(\mathfrak{X})]$$

und als „Ersatzkomponente 2. Art“ den Formel-Rumpf

$$(\mathfrak{X})[\mathfrak{R}(\mathfrak{X}) \rightarrow \Omega(\mathfrak{X})].$$

Dabei sollen die Variablen von \mathfrak{X} in der Formel, deren Komponente $\Omega(\mathfrak{U})$ ist, überhaupt nicht vorkommen.

7. *Die Unitätsformeln der Ersatzkomponenten.* Die in der Konjunktion $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ zusammengefaßten Formel-Rümpfe bezeichnen wir als die „Vorderglieder der Ersatzkomponente“. Die zugehörige Formel $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X})$ ist eine Konjunktion

$$U_1^*(F_1) \wedge \dots \wedge U_r^*(F_r) \wedge \mathfrak{B}_1^*(f_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{B}_s^*(f_s) \wedge \mathfrak{B}_1^*(a_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{B}_t^*(a_t).$$

Auf Grund der Bestimmungen für den Gebrauch der ι -Symbole sind die Unitätsformeln

$$(E U_i)(V_i) [U_i^*(V_i) \sim V_i \approx U_i] \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$(E u_i)(v_i) [\mathfrak{B}_i^*(v_i) \sim v_i = u_i] \quad (i = 1, \dots, s)$$

$$(E x_i)(y_i) [\mathfrak{B}_i^*(y_i) \sim y_i = x_i] \quad (i = 1, \dots, t)$$

in der Herleitung vorhanden bzw. durch Einsetzungen zu erhalten. Diese Unitätsformeln können wir zusammenfassen zu einer „Unitätsformel für $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X})$ “:

$$(E\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \approx \mathfrak{X}].$$

Dabei bedeutet \mathfrak{Y} eine entsprechende Variablenreihe

$$V_1, \dots, V_r, v_1, \dots, v_s, y_1, \dots, y_t$$

wie \mathfrak{X} , welche keine in $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X})$ auftretenden Variablen enthält; und $\mathfrak{Y} \approx \mathfrak{X}$ steht für die Konjunktion

$$V_1 \approx U_1 \wedge \dots \wedge V_r \approx U_r \wedge v_1 = u_1 \wedge \dots \wedge v_s = u_s \wedge y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_t = x_t.$$

8. *t-Ersetzungen*. Der Austausch einer Formel-Komponente gegen eine entsprechende Ersatzkomponente stellt eine „*t-Ersetzung*“ dar. Handelt es sich bei den Formel-Komponenten um Primkomponenten, so sprechen wir von einer „*Prim-Ersetzung*“, andernfalls von einer „*übergreifenden Ersetzung*“.

§ 3. Überführungen von *t-Ersetzungen*.

1. *Überführbare Formeln*. Wir sagen, daß zwei Formeln \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ineinander „*überführbar*“ sind (oder auch, daß \mathfrak{A} in \mathfrak{B} überführbar ist), wenn die Formel

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$$

herleitbar ist. In diesem Falle läßt sich eine Herleitung, welche die Formel \mathfrak{A} enthält, so ergänzen, daß sie auch \mathfrak{B} enthält. Eine solche ergänzende Herleitung, welche von \mathfrak{A} zu \mathfrak{B} führt, nennen wir eine „*Überführung von \mathfrak{A} in \mathfrak{B}* “.

2. *Der Überführungs-Satz*. Zum Nachweis der Überführbarkeit werden wir häufig folgenden „*Überführungs-Satz*“ anzuwenden haben:

Eine Formel $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ möge den Formel-Rumpf \mathfrak{U} als Komponente enthalten. \mathfrak{B} sei ein Formel-Rumpf mit denselben offenen Variablen, wie in \mathfrak{U} auftreten. Sind dann die zu \mathfrak{U} und \mathfrak{B} zugehörigen Formeln \mathfrak{U}^* und \mathfrak{B}^* ineinander überführbar, so ist auch $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ überführbar. Zu dieser Überführung werden keine *t-Rümpfe* höheren Grades benötigt, als in der Überführung von \mathfrak{U}^* in \mathfrak{B}^* und in $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ auftreten.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich aus der Tatsache, daß sich Herleitungen von Formeln

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}(a) \sim \mathfrak{B}(a), \quad \mathfrak{A}(f) \sim \mathfrak{B}(f), \quad \mathfrak{A}(F) \sim \mathfrak{B}(F)$$

mit logischen Mitteln weiterführen lassen zu

$$\begin{array}{ll} (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}) & (\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}) \\ (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{D}) & (\mathfrak{D} \wedge \mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{D} \wedge \mathfrak{B}) \\ (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{D}) & (\mathfrak{D} \vee \mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{D} \vee \mathfrak{B}) \\ (\mathfrak{A} \sim \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B} \sim \mathfrak{D}) & (\mathfrak{D} \sim \mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{D} \sim \mathfrak{B}) \end{array}$$

$$\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{array}{ll} (x)\mathfrak{A}(x) \sim (x)\mathfrak{B}(x) & (Ex)\mathfrak{A}(x) \sim (Ex)\mathfrak{B}(x) \\ (u)\mathfrak{A}(u) \sim (u)\mathfrak{B}(u) & (Eu)\mathfrak{A}(u) \sim (Eu)\mathfrak{B}(u) \\ (U)\mathfrak{A}(U) \sim (U)\mathfrak{B}(U) & (EU)\mathfrak{A}(U) \sim (EU)\mathfrak{B}(U) \end{array}$$

Hiernach läßt sich aus der Überführung der Komponenten-Formeln \mathfrak{U}^* und \mathfrak{B}^* von $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ bzw. $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ successive die Überführung der ganzen Formeln in der verlangten Weise entwickeln.

3. *Der Äquivalenz-Satz*. Wir bezeichnen die den Gleichheits-Grundformeln entsprechende Formel

$$F \approx G \rightarrow [\mathfrak{A}(F) \sim \mathfrak{A}(G)]$$

als „*Äquivalenzformel für $\mathfrak{A}(F)$* “. Für diese gilt der „*Äquivalenz-Satz*“:

Die Äquivalenzformel für eine Formel $\mathfrak{A}(F)$ ist eine herleitbare Formel, zu deren Herleitung keine *t-Rümpfe* höheren Grades gebraucht werden, als in $\mathfrak{A}(F)$ und den Herleitungen der zugehörigen Unitätsformeln auftreten.

Diesen Satz haben wir zunächst zu beweisen. Auf Grund derselben Überlegung, mit der wir den Überführungs-Satz begründet haben, erkennt man,

daß der Äquivalenz-Satz für beliebige Formeln aus dem für Primformeln gefolgert werden kann. Es genügt also, den Äquivalenz-Satz für

$$F \approx G \rightarrow [\mathfrak{P}(F) \sim \mathfrak{P}(G)]$$

nachzuweisen, wo $\mathfrak{P}(F)$ eine Primformel ist.

Die Herleitung ist trivial, wenn F gar nicht in $\mathfrak{P}(F)$ auftritt. Andernfalls ist eine solche Äquivalenzformel, wenn sie keine ι -Symbole enthält, von der Gestalt

$$F^{mn} \approx G^{mn} \rightarrow [F^{mn}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m, t_1, \dots, t_n) \sim G^{mn}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m, t_1, \dots, t_n)].$$

Diese Formel ist auf einfache Weise herleitbar, da ja $F^{mn} \approx G^{mn}$ für

$$(u_1) \dots (u_m) (x_1) \dots (x_n) [F^{mn}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) \sim G^{mn}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)]$$

steht. Somit gilt der Äquivalenzsatz für Formeln ohne ι -Symbole.

Wir nehmen an, der Äquivalenzsatz sei für Formeln von geringerem ι -Grad als p bewiesen, und wollen ihn dann für Formeln vom ι -Grad p beweisen.

Die Äquivalenzformeln für Primformeln vom ι -Grad p sind von den Formen

$$\begin{aligned} (a) \quad & \left\{ \begin{array}{l} F \approx G \rightarrow [\Phi^{mn}(\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F)) \\ \sim \Phi^{mn}(\bar{f}_1(G), \dots, \bar{f}_m(G), t_1(G), \dots, t_n(G))] \end{array} \right. \\ (b) \quad & \left\{ \begin{array}{l} F \approx G \rightarrow [H^{mn}(\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F)) \\ \sim H^{mn}(\bar{f}_1(G), \dots, \bar{f}_m(G), t_1(G), \dots, t_n(G))] \end{array} \right. \\ (c) \quad & \left\{ \begin{array}{l} F \approx G \rightarrow [F^{mn}(\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F)) \\ \sim G^{mn}(\bar{f}_1(G), \dots, \bar{f}_m(G), t_1(G), \dots, t_n(G))] \end{array} \right. \\ (d) \quad & \left\{ \begin{array}{l} F \approx G \rightarrow \{[\iota_U \mathfrak{E}(U, F)](\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F)) \\ \sim [\iota_U \mathfrak{E}(U, G)](\bar{f}_1(G), \dots, \bar{f}_m(G), t_1(G), \dots, t_n(G))\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Die Formeln (a) und (b) ergeben sich mit Hilfe von Gleichheits-Grundformeln aus Formeln der Gestalt

$$(a^*) \quad F \approx G \rightarrow t(F) = t(G),$$

$$(b^*) \quad F \approx G \rightarrow \bar{f}(F) = \bar{f}(G).$$

Für (c) ist zu beachten, daß aus der Bedeutung von $F \approx G$ die Herleitbarkeit von

$$F \approx G \rightarrow [F^{mn}(\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F)) \sim G^{mn}(\bar{f}_1(F), \dots, \bar{f}_m(F), t_1(F), \dots, t_n(F))]$$

zu ersehen ist, wonach die Formel (c) auf den Fall (b) zurückgeführt werden kann.

Da F in $\bar{f}(F)$ und $t(F)$ nur innerhalb von ι -Termen und ι -Funktionalen auftreten kann, ergeben sich (a*), (b*) mit Hilfe von Gleichheits-Grundformeln aus Formeln

$$[a] \quad F \approx G \rightarrow \iota_x \mathfrak{A}(x, F) = \iota_x \mathfrak{A}(x, G)$$

$$[b] \quad F \approx G \rightarrow \iota_u \mathfrak{B}(u, F) = \iota_u \mathfrak{B}(u, G)$$

Gleichheits-Grundformeln und die Formeln (a*), (b*) liefern schließlich auch die Formel (d), wenn noch die Formel

$$[c] \quad F \approx G \rightarrow \iota_U \mathfrak{E}(U, F) \approx \iota_U \mathfrak{E}(U, G)$$

hergeleitet ist.

Es brauchen also nur noch die Formeln [a], [b], [c] nach den Bedingungen des Äquivalenzsatzes hergeleitet zu werden.

Zu diesem Zweck gehen wir aus von den Äquivalenzformeln

$$\begin{aligned} F \approx G &\rightarrow [\mathfrak{A}(a, F) \sim \mathfrak{A}(a, G)], \\ F \approx G &\rightarrow [\mathfrak{B}(f, F) \sim \mathfrak{B}(f, G)], \\ F \approx G &\rightarrow [\mathfrak{C}(H, F) \sim \mathfrak{C}(H, G)], \end{aligned}$$

wo a, f, H sonst nicht vorkommende freie Variablen sind. Diese Formeln haben einen ι -Grad unter p , sind also nach Induktionsvoraussetzung im Sinne des Äquivalenzsatzes herleitbar. Daraus gewinnen wir

$$\begin{aligned} F \approx G &\rightarrow (y) [\mathfrak{A}(y, F) \sim \mathfrak{A}(y, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (v) [\mathfrak{B}(v, F) \sim \mathfrak{B}(v, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (V) [\mathfrak{C}(V, F) \sim \mathfrak{C}(V, G)]. \end{aligned}$$

Die Unitätsformeln, welche ja für [a], [b], [c] vorliegen sollen, liefern

$$(E y) \mathfrak{A}(y, F), (E v) \mathfrak{B}(v, F), (E V) \mathfrak{C}(V, F).$$

Aus den letzten und vorletzten Formeln folgt

$$\begin{aligned} F \approx G &\rightarrow (E y) [\mathfrak{A}(y, F) \wedge \mathfrak{A}(y, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (E v) [\mathfrak{B}(v, F) \wedge \mathfrak{B}(v, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (E V) [\mathfrak{C}(V, F) \wedge \mathfrak{C}(V, G)]. \end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben in Verbindung mit den Formeln

$$\begin{aligned} (y) [\mathfrak{A}(y, F) \rightarrow y = \iota_x \mathfrak{A}(x, F)], & \quad (y) [\mathfrak{A}(y, G) \rightarrow y = \iota_x \mathfrak{A}(x, G)], \\ (v) [\mathfrak{B}(v, F) \rightarrow v = \iota_u \mathfrak{B}(u, F)], & \quad (v) [\mathfrak{B}(v, G) \rightarrow v = \iota_u \mathfrak{B}(u, G)], \\ (V) [\mathfrak{C}(V, F) \rightarrow V = \iota_U \mathfrak{C}(U, F)], & \quad (V) [\mathfrak{C}(V, G) \rightarrow V = \iota_U \mathfrak{C}(U, G)], \end{aligned}$$

welche von ι -Schlüssen herrühren, die Formeln

$$\begin{aligned} F \approx G &\rightarrow (E y) [y = \iota_x \mathfrak{A}(x, F) \wedge y = \iota_x \mathfrak{A}(x, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (E v) [v = \iota_u \mathfrak{B}(u, F) \wedge v = \iota_u \mathfrak{B}(u, G)], \\ F \approx G &\rightarrow (E V) [V = \iota_U \mathfrak{C}(U, F) \wedge V = \iota_U \mathfrak{C}(U, G)] \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Gleichheits-Grundformeln die Formeln [a], [b], [c]. Damit ist der Äquivalenzsatz durch vollständige Induktion bewiesen.

4. *Herleitbarkeit der ι -Ersetzungen.* Es bezeichne wieder \mathfrak{S} eine Reihe äußerer ι -Rümpfe, welche in einer Formel-Komponente $\mathfrak{Q}(\mathfrak{S})$ auftreten. Eine zugehörige Formel dieser Komponente sei $\mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*)$. Dann läßt sich folgendes herleiten.

Aus $\mathfrak{S}^* \simeq \mathfrak{S}^*$ ergibt sich

$$\mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*) \rightarrow [\mathfrak{S}^* \simeq \mathfrak{S}^* \wedge \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*)]$$

und weiter

$$\mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*) \rightarrow (E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{S}^* \wedge \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{Y})].$$

Ferner erhält man mittels Gleichheits-Grundformeln und Äquivalenzformeln die Formel

$$\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{S}^* \wedge \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*)$$

und daraus

$$(E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{S}^* \wedge \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{Y})] \rightarrow \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{S}^*).$$

Es ist also $\Omega^*(\mathfrak{S}^*)$ überführbar in

$$(E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{S}^* \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y})].$$

Auf Grund der in

$$(E \mathfrak{X}) (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}]$$

zusammengefaßten Unitätsformeln führen wir ι -Schlüsse aus, deren Ergebnis sich zusammenfassen läßt zu

$$(\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{S}^*].$$

Hiernach ist $\Omega^*(\mathfrak{S}^*)$ weiter überführbar in

$$(E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y})].$$

Dies ist eine zur Ersatzkomponente 1. Art zugehörige Formel. Wenden wir nun den Überführungs-Satz an, so ergibt sich:

Eine an einer Formel \mathfrak{A} ausgeführte ι -Ersetzung 1. Art ist aus der Formel \mathfrak{A} und ihren Unitätsformeln herleitbar, wobei keine ι -Rümpfe höheren Grades gebraucht werden, als in \mathfrak{A} und den Herleitungen der zugehörigen Unitätsformeln auftreten.

Wir bezeichnen diese Tatsache als „Herleitbarkeit der ι -Ersetzungen“.

5. Umwandlungen der ι -Ersetzungen. Um die Überführbarkeit der ι -Ersetzungen 1. und 2. Art zu zeigen, gehen wir von einer Ersatzkomponente 1. Art aus. Eine zugehörige Formel derselben sei

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{X})].$$

Die Zusammenfassung der Unitätsformeln laute

$$(E \mathfrak{X}) (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}].$$

Hieraus erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} (E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y})] \rightarrow \\ (E \mathfrak{X}) \{ (E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y}) \wedge \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}] \wedge (\mathfrak{Z}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Z}) \rightarrow \mathfrak{Z} \simeq \mathfrak{X}] \} \end{array} \right.$$

und weiterhin unter Benutzung von Gleichheits-Grundformeln

$$(E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y})] \rightarrow (E \mathfrak{Y}) \{ \mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y}) \wedge (\mathfrak{Z}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Z}) \rightarrow \mathfrak{Z} \simeq \mathfrak{Y}] \}$$

und

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{X})] \rightarrow (E \mathfrak{Y}) (\mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{X} \simeq \mathfrak{Y} \wedge \Omega^*(\mathfrak{Y})].$$

Gleichheits-Grundformeln und Äquivalenzformeln liefern schließlich

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{X})] \rightarrow (\mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \rightarrow \Omega^*(\mathfrak{X})].$$

Umgekehrt ergibt sich mit Hilfe der Unitätsformeln zunächst

$$(\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \rightarrow \Omega^*(\mathfrak{Y})] \rightarrow (E \mathfrak{X}) \{ \mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \wedge (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{Y}) \rightarrow \Omega^*(\mathfrak{Y})] \}$$

und weiterhin

$$(\mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \rightarrow \Omega^*(\mathfrak{X})] \rightarrow (E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}) \wedge \Omega^*(\mathfrak{X})].$$

Die zugehörigen Formeln der Ersatzkomponenten 1. und 2. Art sind also ineinander überführbar. Auf Grund des Überführungs-Satzes gilt somit:

Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ ι -Ersetzungen 1. bzw. 2. Art einer Formel \mathfrak{A} , so sind \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 ineinander überführbar, wobei keine ι -Rümpfe höheren Grades gebraucht werden, als in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und den Herleitungen der Unitätsformeln von \mathfrak{A} auftreten.

Wesentlich ist, daß hierbei nicht die ι -Rümpfe von \mathfrak{A} selbst benötigt werden, sondern nur die von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und den Herleitungen der Unitätsformeln.

6. *Auflösung übergreifender Ersetzungen.* Zur Ersatzkomponente einer übergreifenden Ersetzung sei

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega^* (\mathfrak{X})]$$

eine zugehörige Formel.

Da es sich um eine übergreifende Ersetzung handeln soll, ist $\Omega^* (\mathfrak{X})$ mit Hilfe logischer Symbole aus einfacheren Formel-Rümpfen aufgebaut; und zwar können wir alle Möglichkeiten durch Überführungen darauf zurückführen, daß $\Omega^* (\mathfrak{X})$ gleich einem der folgenden fünf Formel-Rümpfe ist¹⁰⁾:

- | | |
|---|---|
| a) $\Omega_1^* (\mathfrak{X}) \vee \Omega_2^* (\mathfrak{X})$ | c) $(E x) \Omega_1^* (\mathfrak{X}, x)$ |
| b) $\bar{\Omega}_1^* (\mathfrak{X})$ | d) $(E u) \Omega_1^* (\mathfrak{X}, u)$ |
| | e) $(E U) \Omega_1^* (\mathfrak{X}, U)$ |

Wir zeigen, daß die zur Ersatzkomponente zugehörige Formel in jedem Falle in die entsprechende Formel, in der die betrachteten logischen Zeichen nach außen gerückt sind, überführbar ist.

a) Die Formel

$$(E \mathfrak{X}) \{\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge [\Omega_1^* (\mathfrak{X}) \vee \Omega_2^* (\mathfrak{X})]\}$$

ist mit logischen Grundformeln und Schlüssen überführbar in

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega_1^* (\mathfrak{X})] \vee (E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega_2^* (\mathfrak{X})].$$

b) Die Formel

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \bar{\Omega}_1^* (\mathfrak{X})]$$

ist zunächst überführbar in

$$(\bar{\mathfrak{X}}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \rightarrow \Omega_1^* (\mathfrak{X})],$$

woraus sich unter Umwandlung der Ersatzkomponente 2. Art in eine Ersatzkomponente 1. Art die Überführung in

$$(\bar{E} \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega_1^* (\mathfrak{X})]$$

ergibt.

c) Mit logischen Mitteln ist die Formel

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge (E x) \Omega_1^* (\mathfrak{X}, x)]$$

überführbar in

$$(E x) (E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega_1^* (\mathfrak{X}, x)].$$

Entsprechendes gilt für d) und e).

Die fortgesetzte Anwendung dieser Überführungen führt zu einer vollständigen Auflösung der übergreifenden Ersetzung. Auf Grund des Überführungs-Satzes gilt also:

Jede übergreifende Ersetzung läßt sich in Prim-Ersetzungen überführen, wobei keine ι -Rümpfe höheren Grades gebraucht werden, als in der betreffenden Formel und den Herleitungen ihrer Unitätsformeln auftreten.

7. *Zusammenziehung der Ersatzkomponenten.* Es sei wieder

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R} (\mathfrak{X}) \wedge \Omega (\mathfrak{X})]$$

¹⁰⁾ Auf $\vee, \neg, (E x), (E u), (E U)$ lassen sich alle logischen Operationen zurückführen mittels der Äquivalenzen $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \sim \bar{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \sim \mathfrak{A} \vee \bar{\mathfrak{B}}$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \wedge \bar{\mathfrak{B}})$, $(x) \mathfrak{A} (x) \sim (\bar{E} x) \bar{\mathfrak{A}} (x)$ usw.

eine Ersatzkomponente 1. Art und

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega^* (\mathfrak{X})]$$

eine zugehörige Formel. Wir nennen sie „normal“, wenn unter den Konjunktionsgliedern

$$\mathfrak{U}_1 (U_1), \dots, \mathfrak{U}_r (U_r), \mathfrak{B}_1 (u_1), \dots, \mathfrak{B}_s (u_s), \mathfrak{B}_1 (x_1), \dots, \mathfrak{B}_t (x_t)$$

von $\mathfrak{R} (\mathfrak{X})$ keine Übereinstimmungen zwischen $\mathfrak{U}_i (U)$ und $\mathfrak{U}_k (U)$ bzw. $\mathfrak{B}_i (u)$ und $\mathfrak{B}_k (u)$ bzw. $\mathfrak{B}_i (x)$ und $\mathfrak{B}_k (x)$ für verschiedene i, k bestehen.

Treten dagegen solche Übereinstimmungen auf, so bilden wir aus \mathfrak{X} eine verkürzte Variablenreihe \mathfrak{X}_0 , indem für übereinstimmende Rümpfe auch übereinstimmende Variablen benutzt werden. Dann gilt

$$(\mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}_0)].$$

Aus der zusammengefaßten Unitätsformel

$$(E \mathfrak{X}) (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}]$$

folgt nunmehr

$$(E \mathfrak{X}) \{\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}_0) \wedge \mathfrak{X}_0 \simeq \mathfrak{X} \wedge (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}]\}.$$

Unter Anwendung von Gleichheits-Grundformeln ergibt sich daraus

$$(E \mathfrak{X}_0) \{\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}_0) \wedge (\mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}_0]\}.$$

Hiermit erhalten wir

$$(E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^* (\mathfrak{Y})] \rightarrow (E \mathfrak{X}_0) \{\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}_0) \wedge (E \mathfrak{Y}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{Y}) \wedge \Omega^* (\mathfrak{Y}) \wedge \mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{X}_0]\}.$$

Gleichheits-Grundformeln und Äquivalenzformeln liefern schließlich

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}) \wedge \Omega^* (\mathfrak{X})] \rightarrow (E \mathfrak{X}_0) [\mathfrak{R}^* (\mathfrak{X}_0) \wedge \Omega^* (\mathfrak{X}_0)].$$

Da auch die Umkehrung hiervon gilt, ergibt sich nach dem Überführungssatz:

Unter Identifizierung entsprechender Variablen läßt sich jede Ersatzkomponente 1. Art in eine normale Ersatzkomponente überführen, und zwar ohne Benutzung von ι -Rümpfen höheren Grades, als in der betreffenden Formel und den Herleitungen ihrer Unitätsformeln auftreten.

Eine solche Überführung bezeichnen wir als „Zusammenziehung der Ersatzkomponenten“.

§ 4. Beweis des Eliminationssatzes.

1. Der Eliminationssatz. Zum Nachweis, daß jede herleitbare Formel, welche keine ι -Symbole enthält, auch ohne Benutzung von ι -Symbolen herleitet werden kann, beweisen wir den allgemeineren „Eliminationssatz“:

Jede Herleitung läßt sich so umformen, daß alle darin auftretenden Formeln höchstens den ι -Grad der Endformel besitzen.

2. Anlage des Beweises. Den Beweis des Eliminationssatzes führen wir durch Induktion nach der Länge der Herleitung.

Für Herleitungen mit einer einzigen Formel ist der Satz trivial.

Wir nehmen nun an, es sei die Herleitung einer Formel \mathfrak{E} vom ι -Grad p gegeben, und der Satz möge für alle Anfangsstücke der Herleitung gelten, welche nicht bis zu \mathfrak{E} führen. Wir haben zu beweisen, daß der Satz dann auch für die ganze Herleitung bis \mathfrak{E} gilt.

Den maximalen ι -Grad aller Formeln der Herleitung wollen wir mit q bezeichnen.

3. *Anwendung der Induktionsvoraussetzung.* Die Induktionsvoraussetzung ziehen wir nur zu folgender Überlegung heran.

Die Unitätsformeln welche zu den einzelnen ι -Rümpfen der Herleitung gehören, haben einen geringeren ι -Grad als q . Da diese Unitätsformeln in der Herleitung von \mathfrak{E} auftreten, können wir nach Induktionsvoraussetzung die Herleitungen dieser Unitätsformeln so abwandeln, daß sie ebenfalls nur Formeln von geringerem ι -Grad als q enthalten.

Diese Tatsache haben wir bei der Anwendung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen zu benutzen. Es handelt sich dabei um

- I. den Äquivalenzsatz,
- II. die Herleitbarkeit der ι -Ersetzungen,
- III. die Umwandlung der ι -Ersetzungen,
- IV. die Auflösung übergreifender Ersetzungen,
- V. die Zusammenziehung der Ersatzkomponenten.

Die hierzu angegebenen Herleitungen und Überführungen sind nunmehr mit Formeln von kleinerem ι -Grad als q möglich, sofern die betreffenden Ausgangs- und Endformeln kleinere ι -Grade als q haben und nur ι -Rümpfe, welche unserer Herleitung von \mathfrak{E} angehören, enthalten.

4. *Das Ersetzungsverfahren.* Ist $p = q$, so gilt der Eliminationssatz von vornherein für die ganze Herleitung von \mathfrak{E} . Es bleibt also der Fall $p < q$ zu behandeln.

In diesem Falle führen wir eine vollständige normale Prim-Ersetzung für alle maximalen ι -Rümpfe durch. D. h. wir ersetzen jede Primkomponente $\mathfrak{P}(\mathfrak{J})$, in der \mathfrak{J} die vollständige Reihe aller maximalen ι -Rümpfe dieser Primkomponente bezeichnet, durch die Ersatzkomponente 1. Art

$$(E \mathfrak{X}) [\mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \wedge \mathfrak{P}(\mathfrak{X})]$$

Diese Ersatzkomponente soll normal sein, d. h. die \mathfrak{J} -Reihe soll nicht einzelne ι -Rümpfe mehrfach enthalten. Dann ist diese Ersetzung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Konjunktionsglieder von $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ und die Benennung der gebundenen Variablen von \mathfrak{X} (welche natürlich so zu wählen sind, daß keine Kollisionen entstehen). Es besteht also Eindeutigkeit im Sinne der Überführbarkeit (ohne Verwendung von ι -Rümpfen, welche nicht in der Ersatzformel auftreten).

Diese Ersetzung der maximalen ι -Rümpfe ist deshalb möglich, weil alle maximalen ι -Rümpfe in den Primkomponenten als äußere ι -Rümpfe auftreten.

5. *Die Ersatzherleitung.* Bei den Ersetzungen bleiben die mathematischen Grundformeln, welche ja keine ι -Symbole enthalten, unverändert. Auch auf die Endformel \mathfrak{E} , in der keine maximalen ι -Rümpfe auftreten, findet das Ersetzungsverfahren keine Anwendung.

Aus der Tatsache, daß die Ersetzungen an den Primkomponenten, also unterhalb der logischen Zeichen vorgenommen werden, ist zu ersehen: Alle Grundformeln unseres Kodifikats gehen durch die Ersetzungen wieder in Grundformeln über. Ebenso behalten alle Grundschlüsse und Quantorenschlüsse ihren Charakter.

Damit wir nach den Ersetzungen wiederum eine Herleitung bekommen, und zwar eine Herleitung, in der nur ι -Rümpfe von geringerem Grad als q auftreten, haben wir also nur noch zu zeigen:

Soweit die Einsetzungen und ι -Schlüsse der Herleitung durch die Ersetzungen ihren Zusammenhang verloren haben, läßt sich dieser wiederherstellen durch verbindende Herleitungen, welche nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q enthalten.

Wenn wir in dieser Weise eine Ersatzherleitung aufstellen können, drücken wir den maximalen ι -Grad in der neuen Herleitung unter q herab. Dieses Verfahren wäre dann fortzusetzen, bis der maximale ι -Grad nur noch höchstens gleich p ist, womit der Eliminationssatz bewiesen wäre.

6. *Ersetzungen der ι -Schlüsse.* Es mögen in der Herleitung Formeln der Gestalt

$$(y) [\mathfrak{A}(y) \sim y = \iota_x \mathfrak{A}(x)],$$

$$(v) [\mathfrak{A}(v) \sim v = \iota_u \mathfrak{A}(u)],$$

$$(V) [\mathfrak{A}(V) \sim V \approx \iota_U \mathfrak{A}(U)]$$

durch ι -Schlüsse eingeführt sein.

Diese werden, wenn ihr ι -Grad kleiner als q ist, von der Ersetzung nicht betroffen. Die ι -Schlüsse bleiben dann als solche bestehen.

Sind die Formeln dagegen vom ι -Grad q , so ist hierin $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, $\iota_u \mathfrak{A}(u)$ bzw. $\iota_U \mathfrak{A}(U)$ der einzige ι -Rumpf vom Grad q . Die Unitätsformeln liefern dann die übergreifenden Ersetzungen

$$(E x) \{ \mathfrak{A}(x) \wedge (y) [\mathfrak{A}(y) \sim y = x] \},$$

$$(E u) \{ \mathfrak{A}(u) \wedge (v) [\mathfrak{A}(v) \sim v = u] \},$$

$$(E U) \{ \mathfrak{A}(U) \wedge (V) [\mathfrak{A}(V) \sim V \approx U] \}$$

Aus diesen leiten wir die Prim-Ersetzungen her, wobei nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q benutzt werden. Hierdurch wird der Herleitungszusammenhang für die ι -Schlüsse nach der Ersetzung in der gewünschten Weise ergänzt.

7. *Der Herleitungszusammenhang für die Einsetzungen.* Es bleibt nur noch in folgender Weise der Herleitungszusammenhang für die Einsetzungen herzustellen:

Eine Herleitungs-Formel $\mathfrak{A}(T)$, in der T eine freie Zahlvariable, Funktionsvariable oder Formelvariable bedeutet, möge durch die Prim-Ersetzungen der maximalen ι -Rümpfe in $\mathfrak{A}(T)$ übergehen. In der Herleitung sei auf T eine Einsetzung angewandt und so die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ gewonnen, wo \mathfrak{I} ein Term, ein Funktional bzw. eine Formel mit Leerstellen ist. Durch die Prim-Ersetzungen gehe $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ in $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{I})}$ über. Dann kommt es darauf an, $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{I})}$ so aus $\overline{\mathfrak{A}(T)}$ herzuleiten, daß dabei nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q verwendet werden.

8. *Einsetzungen innerhalb von ι -Rümpfen.* Die Variable T möge in $\mathfrak{A}(T)$ an mindestens einer Stelle innerhalb eines ι -Rumpfes stehen. Dann enthält \mathfrak{I} keine maximalen ι -Rümpfe (da wir sonst in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ mindestens einen übermaximalen ι -Rumpf hätten). Folglich kann sich dort, wo \mathfrak{I} außerhalb der ι -Rümpfe eingesetzt wird, kein maximaler ι -Rumpf ergeben. Nur dort, wo \mathfrak{I} in einen ι -Rumpf von $\mathfrak{A}(T)$ eingesetzt wird, kann ein neuer maximaler ι -Rumpf entstehen, indem nämlich ein vorher nicht maximaler ι -Rumpf durch die Einsetzung maximal wird. Es entspricht also jedem maximalen ι -Rumpf von $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ ein ι -Rumpf von $\mathfrak{A}(T)$.

In $\overline{\mathfrak{A}(T)}$ sind diejenigen ι -Rümpfe ersetzt, welche bereits in $\mathfrak{A}(T)$ maximal sind. Außerdem kann $\overline{\mathfrak{A}(T)}$ noch eine Reihe \mathfrak{J} von ι -Rümpfen enthalten,

welche erst durch die Einsetzung maximal werden. Diese treten in den Ersatzkomponenten von $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ als äußere ι -Rümpfe auf, und zwar nicht in den Vordergliedern. Die auf $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ für \mathfrak{J} an den Ersatzkomponenten durchführbaren ι -Ersetzungen lassen sich auf Grund der Herleitbarkeit der ι -Ersetzungen aus $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ so herleiten, daß dabei nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q benutzt werden. Dadurch möge $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ in $\mathfrak{B}(T)$ übergehen. Wenden wir nun auf $\mathfrak{B}(T)$ die Einsetzung an, so erhalten wir mit $\mathfrak{B}(\mathfrak{I})$ eine Formel, welche keine maximalen ι -Rümpfe enthält.

Wir haben $\mathfrak{B}(\mathfrak{I})$ gewonnen, indem wir die ι -Ersetzungen, welche auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ anzuwenden sind, bereits vor der Einsetzung zunächst auf $\mathfrak{A}(T)$ und dann auf $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ angewandt haben. Diese zweifache Ersetzung läßt sich zu einer Ersetzung vereinigen, denn die Ersatzkomponenten

$$(E \mathfrak{X}_2) (\mathfrak{R}_2 (\mathfrak{X}_2) \wedge (E \mathfrak{X}_1) [\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{X}_1) \wedge \mathfrak{P} (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)]),$$

welche man bei doppelter Ersetzung bekommt, sind überführbar in

$$(E \mathfrak{X}_2) (E \mathfrak{X}_1) [\mathfrak{R}_2 (\mathfrak{X}_2) \wedge \mathfrak{R}_1 (\mathfrak{X}_1) \wedge \mathfrak{P} (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)].$$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{I})$ ist also in eine entsprechende ι -Ersetzung, wie sie $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$ darstellt, überführbar. Es könnte nur sein, daß wir hierbei noch keine normalen Prim-Ersetzungen gewonnen hätten. Wir wenden dann noch die Auflösung der übergreifenden Ersetzungen und die Zusammenziehungen der Ersatzkomponenten an, wodurch sich schließlich eine Überführung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{I})$ in $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$ ergibt.

In dieser Weise ist eine verbindende Herleitung von $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ zu $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ möglich, wobei nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q verwendet werden.

9. *Äußere Term- und Funktional-Einsetzungen.* Es bleibt nun der Fall zu untersuchen, daß T in $\mathfrak{A}(T)$ nirgends innerhalb eines ι -Rumpfes auftritt. Dabei beschränken wir uns zunächst darauf, daß T eine Zahl- oder Funktionsvariable, also \mathfrak{I} ein Term oder Funktional ist.

Enthält \mathfrak{I} keine maximalen ι -Rümpfe, so ist $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$ bis auf Zusammenziehungen von Ersatzkomponenten gleich $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$, also durch Einsetzung aus $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ zu erhalten.

Es möge nun \mathfrak{I} die Reihe \mathfrak{J} der maximalen ι -Rümpfe enthalten, also von der Form $\mathfrak{I}(\mathfrak{J})$ sein. Diese maximalen ι -Rümpfe besitzen in unserem Falle keine offenen Variablen. Die offenen Variablen müßten nämlich innerhalb von \mathfrak{I} abgebunden sein. Als Term oder Funktional enthält aber \mathfrak{I} außerhalb der ι -Rümpfe keine Quantoren.

Eine der \mathfrak{J} -Reihe entsprechende Reihe von freien Variablen sei \mathfrak{F} , und eine entsprechende Reihe von gebundenen Variablen sei \mathfrak{X} . Dann enthält $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ und auch $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{F}))$ keine maximalen ι -Rümpfe.

Die Konjunktion der Vorderglieder, welche zu der ι -Ersetzung von \mathfrak{J} gehört, sei $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. Aus den Unitätsformeln ergibt sich

$$(E \mathfrak{X}) \mathfrak{R}(\mathfrak{X}).$$

Ferner gewinnen wir aus $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ durch Einsetzung die Formel

$$\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{F})).$$

Die freien Variablen von \mathfrak{F} sollen so gewählt sein, daß sie sonst nicht in $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{F}))$ vorkommen. Quantorenschlüsse liefern dann

$$(\mathfrak{I}) \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{I})).$$

Hieraus und aus der Folgerung der Unitätsformeln erhalten wir

$$(E \mathfrak{I}) [\mathfrak{A}(\mathfrak{I}) \wedge \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{I}))].$$

Das ist eine übergreifende Ersetzung für die maximalen ι -Rümpfe von $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(\mathfrak{I}))$. Wir überführen sie in eine normale Prim-Ersetzung und erhalten so eine Formel, welche genau so wie im vorigen Fall zur Übereinstimmung mit $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$ gebracht werden kann.

Damit ist der Herleitungszusammenhang von $\overline{\mathfrak{A}}(T)$ und $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I})$ auch in diesem Falle hergestellt.

10. *Äußere Formel-Einsetzungen.* Abschließend haben wir noch den Fall zu behandeln, daß in $\mathfrak{A}(F)$ für die freie Formelvariable F , welche in dieser Formel nirgends unter einem ι -Symbol steht, eine Formel mit Leerstellen \mathfrak{B} eingesetzt wird, so daß aus $\mathfrak{A}_{u,x}(F(u, x))$ die Formel $\mathfrak{A}_{u,x}(\mathfrak{B}(u, x))$ entsteht. Dabei steht u für eine Reihe gebundener Funktionsvariablen u_1, \dots, u_m und x für eine Reihe gebundener Zahlvariablen x_1, \dots, x_n . Die entsprechenden Reihen mit freien Variablen seien f bzw. a .

Wir bezeichnen die normalen Prim-Ersetzungen der maximalen ι -Rümpfe von $\mathfrak{A}_{u,x}(F(u, x))$ mit $\overline{\mathfrak{A}_{u,x}}(F(u, x))$, von $\mathfrak{A}_{u,x}(\mathfrak{B}(u, x))$ mit $\overline{\mathfrak{A}_{u,x}}(\mathfrak{B}(u, x))$ und von $\mathfrak{B}(f, a)$ mit $\overline{\mathfrak{B}}(f, a)$.

Die Formel $\overline{\mathfrak{A}_{u,x}}(\mathfrak{B}(u, x))$, welche wir durch Einsetzung aus $\overline{\mathfrak{A}_{u,x}}(F(u, x))$ gewinnen, enthält keine maximalen ι -Rümpfe. Wir überführen sie in derselben Weise, wie dies bei den vorigen Einsetzungen geschehen ist, in die Formel $\overline{\mathfrak{A}_{u,x}}(\mathfrak{B}(u, x))$, nämlich durch Auflösung übergreifender Ersetzungen, Zusammenziehungen der Ersatzkomponenten und Umformungen, welche die nacheinander ausgeführten Ersetzungen zur Vereinigung bringen. Hierbei sind nur ι -Rümpfe von kleinerem Grad als q zu verwenden.

Damit ist der Herleitungszusammenhang für alle Einsetzungen in der verlangten Weise hergestellt und der Beweis für den Eliminationssatz zum Abschluß gebracht.

11. *Ergebnis.* Aus dem Eliminationssatz folgt insbesondere: Eine herleitbare Formel, welche das ι -Symbol nicht enthält, ist auch ohne Benutzung der ι -Symbole herleitbar.

Daraus folgt weiter: Ist das engere Kodifikat, dem das ι -Symbol nicht angehört, widerspruchsfrei, so ist auch das durch das ι -Symbol erweiterte Kodifikat widerspruchsfrei.

12. *Bedeutung der Auswahl-Grundformeln.* In dem dargestellten Eliminationsverfahren sind die Auswahl-Grundformeln nur zur Elimination des λ -Symbols gebraucht worden. Man kann aber diese Grundformeln nicht dadurch entbehrlich machen, daß man auf die Elimination des λ -Symbols verzichtet. Die hier angegebene Elimination der ι -Symbole ist nämlich nur nach Elimination des λ -Symbols möglich, so daß die Auswahl-Grundformeln auch für die Eliminierbarkeit der ι -Symbole entscheidend sind.

Nehmen wir das λ -Symbol und die λ -Grundformeln nicht im Kodifikat auf, so werden zur Elimination der ι -Symbole die Auswahl-Grundformeln entbehrlich. Dieses Kodifikat ist jedoch bezüglich der Funktionale unvollständig, da es nicht den Übergang von einem Funktional zu einer Termfunktion gestattet, wie dies in der Schlußfolge

$$\frac{\mathfrak{A}_{x_1, \dots, x_n} (f(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\mathfrak{A}_{x_1, \dots, x_n} ([\lambda y_1, \dots, y_n] t(y_1, \dots, y_n)) (x_1, \dots, x_n)}{\mathfrak{A}_{x_1, \dots, x_n} (t(x_1, \dots, x_n))}}$$

möglich ist.

Es läßt sich aber auch bei Fortlassung des λ -Symbols ein vollständiges Kodifikat bilden, wenn an Stelle des λ -Symbols die „Funktions-Einsetzung“

$$\frac{\mathfrak{A}_{x_1, \dots, x_n} (f(x_1, \dots, x_n))}{\mathfrak{A}_{x_1, \dots, x_n} (t(x_1, \dots, x_n))}$$

aufgenommen wird. In diesem Falle müssen wir unseren Eliminationsbeweis für die Einsetzungen entsprechend ergänzen. Die Funktions-Einsetzungen innerhalb von ι -Rümpfen bringen nichts Neues. Die äußeren Funktions-Einsetzungen lassen sich jedoch nicht so einfach erledigen, wie dies bei den anderen äußeren Einsetzungen geschehen ist. Die nähere Untersuchung zeigt vielmehr, daß hierzu doch wiederum die Auswahl-Grundformeln herangezogen werden müssen.

Bei der formalen Darstellung der Analysis kann man sich auf ein Kodifikat ohne Funktionszeichen beschränken¹¹⁾. Bei diesem fallen das λ -Symbol, die Auswahl-Grundformeln und auch die Gleichheits-Grundformeln c) fort. Die Erweiterung gegenüber der Zahlentheorie kommt hier in dem Auftreten gebundener Formelvariablen zum Ausdruck.

Ebenso läßt sich die Analysis unter Ausschaltung gebundener Formelvariablen allein mit gebundenen Funktionsvariablen entwickeln¹²⁾. Für ein solches Kodifikat sind die λ - und ι -Symbole bzw. die Auswahl-Grundformeln, mit deren Hilfe diese Symbole eliminiert werden können, entscheidend. Würden wir nämlich die λ - und ι -Symbole und auch die Auswahl-Grundformeln fortlassen, so kämen wir nicht wesentlich über die reine Zahlentheorie hinaus. Jedenfalls läßt sich die Widerspruchsfreiheit eines so begrenzten Kodifikats bereits mit den gleichen Mitteln (der transfiniten Induktion bis zur ersten ε -Zahl) erbringen, die zum Widerspruchsfreiheitsbeweis der reinen Zahlentheorie benötigt werden¹³⁾.

13. Die Gleichheitsgrundformeln c). Die Gleichheits-Grundformeln

$$c) \quad (x_1) \dots (x_n) [\text{f}^n(x_1, \dots, x_n) = g^n(x_1, \dots, x_n)] \rightarrow [\mathfrak{A}(\text{f}^n) \rightarrow \mathfrak{A}(g^n)]$$

fallen nicht nur im Formalismus L fort, sondern sie werden auch dann entbehrlich, wenn als Argumente für Prädikate und Formelvariablen keine Funktionale, sondern nur Terme zugelassen werden. In diesem Falle sind die Gleichheits-Grundformeln c) mit Hilfe der Gleichheits-Grundformeln a) und b) herleitbar.

¹¹⁾ Es handelt sich dann um den Formalismus L in HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik, II. Band, S. 488–494.

¹²⁾ Formalismus K in HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik, II. Band, S. 480–488.

¹³⁾ Man kann hierauf ohne weiteres die Widerspruchsfreiheitsbeweise der reinen Zahlentheorie übertragen.

Lassen wir dagegen bei den Formelvariablen Argumente für Funktionale zu, schließen aber gebundene Formelvariablen aus, so werden die Gleichheits-Grundformeln c) zwar nicht herleitbar, aber zur Herleitung von Formeln, welche keine Formelvariablen enthalten, entbehrlich. Wir können dann nämlich in einer Herleitung, deren Endformel keine Formelvariablen enthält, die Formelvariablen durch Rückverlegung der Einsetzungen ausschalten. Dabei verwandeln sich die Gleichheits-Grundformeln c) in Formeln, welche ohne Benutzung dieser Grundformeln herleitbar sind. Dieses Kodifikat ist daher einschließlich der Gleichheits-Grundformeln c) widerspruchsfrei, wenn es ohne diese Grundformeln widerspruchsfrei ist.

14. *Die verzweigte Analysis.* Die Eliminierbarkeit der ι -Symbole gilt auch für ein Kodifikat der verzweigten Analysis, in dem die Aussagezeichen und Formeln gemäß der verzweigten Typenlogik aufgegliedert werden. Die bei der Elimination verwendeten Herleitungen lassen sich nämlich in gleicher Weise unter Beachtung solcher Verzweigungen durchführen (da ja bei diesen Herleitungen keine imprädikativen Begriffsbildungen benötigt werden). Die für ein Kodifikat ohne ι -Symbole bewiesene Widerspruchsfreiheit der verzweigten Analysis überträgt sich daher auch auf ein durch ι -Symbole erweitertes Kodifikat.

(Eingegangen am 19. Mai 1950.)

Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik.

Von
ARNOLD SCHMIDT in Marburg/Lahn.

Inhalt:

- § 1. Einleitende Erläuterung des Problems.
- § 2. Das zugrundeliegende Kodifikat und der Hauptsatz.
- § 3. Historische Anmerkungen.
- § 4. Der Satz von der Sortenrechtheit.
- § 5. Der Beweis des Satzes von der Sortenrechtheit.

§ 1. Einleitende Erläuterung des Problems.

In diesem Paragraphen soll die Fragestellung umrissen werden, ohne daß vorerst die zugrundeliegenden Definitionen und Schlußweisen präzisiert werden. Die genauen Definitionen werden in § 2 und § 3 folgen. Der elementaren Unausweichlichkeit des Problems entsprechend mögen jeweils bloß einige ganz einfache beispielhafte Andeutungen zur ersten Verdeutlichung herangezogen werden.

Bei der Kodifikation des Begriffs-, Urteils- und Beweisbestandes eines exakten Wissensgebietes in der mathematischen Logik läßt sich sowohl im Begriffsnetz wie im Vorrat der Axiome ein allgemein logischer Teil herauschälen, der allen Wissensgebieten (der betreffenden logischen Stufe) gemein ist, und ein hinzukommender Teil, der dem betrachteten Wissensgebiet eigen ist und seine Besonderheit charakterisiert. Der erste Teil — der die Prinzipien des Schließens mitumfaßt — wird gewöhnlich als der Prädikatenkalkül (der betreffenden Stufe) bezeichnet; das ganze sich ergebende Kodifikat der Theorie mit Einschluß des spezifischen Teiles sei demgegenüber eine „Prädikanten^{theorie}“ genannt. (Ich bediene mich hier des Terminus „Prädikat“ in dem einmal in der mathematischen Logik eingebürgerten Sinne; er soll nach dem Vorgange HILBERTS auch die mehrstelligen „Relationen“ mitumgreifen.) Die „Dinge“, von denen das Wissensgebiet handelt, indem es ihnen Eigenschaften und Beziehungen zuerkennt, werden in der zugehörigen Prädikanten^{theorie} durch „Term“-ausdrücke wiedergegeben; diese bestehen entweder in einzelnen Zeichen (für Grunddinge), oder sie bauen sich aus solchen mittels „Funktoren“ auf (in der Geometrie etwa: die Punkte und Geraden durch sie bezeichnende Antiqualeetern p, q, \dots bzw. g, h, \dots , das Lot p auf h durch „ $\text{Lot}(p, h)$ “ usw.). In einer Prädikanten^{theorie} — es soll hier nur von Prädikanten^{theorien} erster Stufe die Rede sein, so daß sich ein Eingehen auf den Begriff der logischen Stufe erübrigt — hat jeder echte Funktor und ebenso jedes Prädikat (bzw. jede Relation) Argumentstellen, die durch Termausdrücke auszufüllen sind. [Ist z. B. etwa die geometrische Relation „ p liegt auf h “ in der Kodifikation durch „ $\text{Inz}(p, h)$ “ abgekürzt, so ist $\text{Inz}(\dots)$ ein „zweistelliges Prädikat“; eine mögliche Ausfüllung ist z. B. $\text{Inz}(p, \text{Lot}(q, h))$: p liegt auf dem von q auf h gefällten

Lot.] Der übliche Prädikatenkalkül erster Stufe verwendet einheitliche Zeichen, meist kleine Antiqualeettern, für alle Termvariablen und gestattet dementsprechend, Formeln zu bilden, indem die Argumentstellen der Prädikate oder Funktoren durch beliebige Terme ausgefüllt werden. Demgegenüber handeln die meisten exakten Wissensgebiete von Dingen, die sich in *mehrere* verschiedene Sorten einteilen, die Geometrie von Punkten, Geraden und Ebenen, die Topologie von Zahlen, Punkten, Strecken u. a., usw. Bei der Kodifikation eines solchen Wissensgebietes mit mehreren Grunddingsorten hat man dann dem Begriffsnetz der Prädikatenlogik „Sortenprädikate“ beizugeben, die in bestimmter Weise in die Formeln einzuflechten sind. Um möglichst kurz in die Fragestellung einzuführen, will ich mich in der Veranschaulichung weiterhin auf elementarste Beispiele aus der euklidischen Geometrie beschränken. In der Kodifikation der Geometrie sei etwa die zweistellige Relation „ h und k treffen sich“ (die offenbar aus „ Inz “ logisch definierbar ist¹⁾) durch „ $Trifft(h, k)$ “ abgekürzt. Da der Prädikatenkalkül nur von einem Dingbereich ausgeht, sind weder die Argumentstellen der Prädikate noch die Termvariablen selbst in Sorten unterteilt, und es ist daher in jeder Formel — in Einklang mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch — überall anzugeben, von welcher Dingsorte jeweils die Rede ist. Das Parallelenaxiom z. B. würde *nicht* mit einer dem üblichen Sprachgebrauch ebenbürtigen Prägnanz wiedergegeben sein in der Formulierung: „Falls nicht $Inz(p, q)$, so gibt es genau ein r , für das $Inz(p, r)$, nicht aber $Trifft(q, r)$ gilt“. Hier wären aus der Aussage: „Falls der Punkt p nicht auf der Geraden q liegt, so gibt es genau eine Gerade r , die . . .“ gerade die Sortenangaben entfallen. Man wird sich vielmehr naturgemäß in der Kodifikation zur Unterscheidung der verschiedenen Dingsorten der „Sortenprädikate“ — wie $\mathfrak{P}(p)$ (oder auch $p \in \mathfrak{P}$) für „ p ist Punkt“ und $\mathfrak{G}(q)$ (oder auch $q \in \mathfrak{G}$) für „ q ist Gerade“ bedienen und das betreffende Axiom in „sortenbeschränkter“ Weise formulieren: „Falls $\mathfrak{P}(p)$ und $\mathfrak{G}(q)$ und nicht $Inz(p, q)$ ist, so gibt es genau ein r , für das $\mathfrak{G}(r)$ und $Inz(p, r)$, nicht aber $Trifft(q, r)$ gilt“. Auf die Einzelheiten dieser „Sortenbeschränkung“ soll erst in § 2 eingegangen werden; es möge hier nur kurz ihr Kern skizziert werden: in jedem Teile einer Aussage wird die Wendung „für alle x gilt $\mathfrak{A}(x)$ “ ersetzt durch „für alle x der richtigen Sorte \mathfrak{S} gilt $\mathfrak{A}(x)$ und die Wendung „es gibt x mit $\mathfrak{A}(x)$ “ ersetzt durch „es gibt x der richtigen Sorte \mathfrak{S} mit $\mathfrak{A}(x)$ “.

Diese „Sortenbeschränkung“ entspricht offenbar einer Theorie, der ein Dingbereich zugrundeliegt, welcher sich eben in die verschiedenen Sorten unterteilt; in der Geometrie z. B. bestände dieser Dingbereich aus allen Punkten, Geraden und Ebenen; und es ist jedesmal fixiert, von welcher dieser Dingsorten die Rede ist. Für die Interpretation ist dabei, wie wir sehen werden, im allgemeinen wichtig, daß die Dingsorten zueinander fremd sind (wie weit diese Voraussetzung auch formal nötig erscheint, wird noch zu diskutieren sein).

Würde man den Formeln diese Beschränkung nicht auferlegen, so würde man ganz gewiß zur Deduktion unsinniger, m. a. W.: nicht interpretierbarer Aussagen gelangen. So würde man z. B. von der in der euklidischen Geometrie richtigen Aussage „Wenn nicht $Trifft(q, r)$, so ist $Lot(p, q) = Lot(p, r)$ durch die (wegen der Einsortigkeit des Prädikatenkalküls formal erlaubte) Einsetzung von q für die Variable p zu der sinnlosen Behauptung kommen: „Wenn nicht $Trifft(q, r)$, so ist $Lot(q, q) = Lot(q, r)$. In ihr ist vom Lot eines

¹⁾ Nämlich durch: Es gibt ein l n. it $Inz(l, h)$ und $Inz(l, k)$.

Elements auf sich selbst die Rede; das ist in der euklidischen Geometrie kein sinnvoller Begriff. Die Sortenbeschränkung der gegebenen Aussage „Wenn $\mathcal{G}(q)$ und $\mathcal{G}(r)$ und nicht $\text{Trifft}(q, r)$ und $\mathcal{P}(p)$, so ist $\text{Lot}(p, q) = \text{Lot}(p, r)$ “ verhindert zwar nicht die durch formale Einsetzung entstehende unsinnige Bildung $\text{Lot}(q, q)$, aber sie hebt die Nichtinterpretierbarkeit explizite im Bau der entstehenden Formel dadurch hervor, daß die verbotene Bedingung „Wenn $\mathcal{G}(q) \dots$ und $\mathcal{P}(q)$ “ in ihr erscheint:

Während offenbar eine sinnvolle Aussage einer mehrsortigen Theorie in eindeutiger Weise „sortenbeschränkt“ formuliert werden kann, braucht im allgemeinen eine Aussage, in der neben den rein logischen Zeichen lediglich Prädikate (Relationen) und Funktoren einer gegebenen mehrsortigen Theorie auftreten, keineswegs eine vernünftige Sortenbeschränkung zu gestatten. Außer dem oben dafür angegebenen Beispiel sei etwa noch die Aussagen „ $\text{Inz}(a, b)$ und $\text{Inz}(b, c)$ “ angeführt, bei deren Sortenbeschränkung (im Sinne der geometrischen Interpretation) das b einmal als Punkt, das andere Mal als Gerade einsortiert werden müßte.

Es läßt sich nun eine strukturelle Bedingung für die eindeutige Sortenbeschränkbarkeit angeben; wir wollen eine Formel oder Formelnreihe, die dieser Bedingung genügt, „sortenrecht“ nennen. Alle Termzeichen einer gegebenen Formel oder einer gegebenen Formelnreihe mögen genau einer von n Sorten zugeteilt sein. Die Formel bzw. Formelnreihe heißt nun „sortenrecht“, wenn in ihr zwei Termzeichen der gleichen Sorte zugeteilt sind, sobald sie

1. gleich sind oder
2. entsprechende Argumentstellen gleicher Prädikate (Relationen) oder Funktoren besetzen.

Man könnte natürlich die Argumentstellen der Prädikate und Funktoren sortieren und die sortenrechte Ausfüllung verlangen. Ein solcher expliziter Rückgang auf die Sortierung der Argumentstellen ist jedoch für die allgemeine Fragestellung, die dieser Arbeit zu Grunde liegt, unnötig. Wir dürfen allgemein etwa sagen, daß die n -sortige Sortenrechtlichkeit der strukturelle Ausdruck einer n -sortigen Interpretierbarkeit ist. Von vorneherein ist plausibel: eine gegebene Formel (ohne freie Variablen; solche lassen sich ja stets durch Allzeichen binden) kann dann und nur dann einer vernünftigen n -sortigen Sortenbeschränkung unterworfen werden, wenn sie sortenrecht ist. In § 4 wird dies noch genauer zu präzisieren sein.

Ein Wissensgebiet mit mehreren Grunddingen pflegt man nun in solcher Weise zu kodifizieren, daß alle „Eigenaxiome“ der betreffenden Prädikaten-theorie sortenbeschränkt sind. Man richtet sein Augenmerk weiterhin auf den Beweis sortenbeschränkter Formeln und würdigt umgekehrt nur sortenbeschränkte Formeln einer Rolle als Endformeln von Beweisen und einer Interpretation. Dabei erlaubt man sich jedoch im übrigen, sich des gesamten einsortigen Apparates der üblichen Prädikaten-theorie zu bedienen; dieser aber läßt nicht nur die Bildung beliebiger nicht sortenbeschränkter, ja nicht einmal sortenrechter, d. h. nicht interpretierbarer Formeln zu und yermag sogar solche Formeln zu beweisen, sondern er gestattet darüber hinaus zum Beweise einer sortenbeschränkten, interpretierbaren Formel durch beliebig lange Reihen nicht-sortenrechter und somit nicht interpretierbarer, d. h. inhaltlich unsinniger Formeln hindurchzugehen.

Bei den großen methodischen Vorzügen der Einfachheit, Handlichkeit und Allgemeinheit des üblichen einsortigen Prädikatenkalküls wird man auch zur

Kodifikation der mehrsortigen Theorien an ihm festzuhalten streben, und man wird sich daher vergewissern müssen, ob bzw. unter welchen Nebenbedingungen er dazu geeignet und zulässig sei. D. h. man wird sich die unabweisbare Frage vorzulegen haben, ob eine sortenbeschränkte, formal beweisbare Formel auch stets durch einen interpretierbaren Beweis, d. h. durch einen Beweis aus lauter sortenbeschränkbaren Formeln herleitbar sei.

Diese Frage zerfällt in zwei Teile. Nehme ich zunächst einmal an, es liege mir ein in allen Teilen interpretierbarer, d. h. sortenrechter Beweis bereits vor. Dann ist es nur von mehr oder weniger symboltechnischem Interesse, ob ich die Sortenbeschränkung aller Formeln wirklich durchführe oder nicht. Von der Grundposition der Interpretierbarkeit aller benutzten Formeln aus hat sich bereits HERBRAND²⁾ (in einem spezielleren Zusammenhange) mit der Frage der Sortenbeschränkung befaßt und die Äquivalenz eines Kalküls mit Sortenbeschränkung zu einem solchen ohne sie skizziert. Diese Äquivalenz ist nicht allzu schwer zu erkennen; in § 3 werde ich hierauf noch zurückkommen. Der eigentliche Kern des Problems steckt aber, wie aus dem Vorangegangenen hervorgegangen sein dürfte, nicht hier, sondern in dem Umstand, daß ja durchaus nicht jede im Beweis benutzte Formel im Sinne der verschiedenen Dingsorten sinnvoll interpretierbar zu sein braucht, formal gewendet: daß sie nicht im Sinne der gegebenen Dingsorten sortenrecht zu sein braucht.

Die gestellte Frage geht also auf die folgende Frage zurück, in der nicht mehr von der Sortenbeschränkung selbst, von der wir ausgingen, die Rede ist: *Ist jede in einer einsortigen Prädikatenlogik formal beweisbare, sortenrechte Formel auch sortenrecht, d. h. durch einen Beweis, der in einer sortenrechten Formelnreihe besteht, beweisbar?*

Mit der Bejahung dieser Frage steht und fällt offenbar die Zulässigkeit des üblichen Prädikatenkalküls zur Kodifikation der Wissensgebiete mit mehreren Grunddingsorten. Denn wenn es sortenrechte, also interpretierbare Formeln gäbe, die im einsortigen Kodifikat beweisbar sind, obwohl sie nicht sortenrecht und mithin nicht durch inhaltliches Schließen hergeleitet werden können, so würde das Kodifikat offenbar unangemessen weit sein. Diese Frage wird nun in ihrer Allgemeinheit durch das übliche Vorgehen der Sortenbeschränkung der Axiome und der Endformeln von Beweisen gar nicht angeschnitten. Die formale Sortenbeschränkung allein leistet eben, da sie ja die Sortenrechtlichkeit zur stillschweigenden Voraussetzung hat, zwar z. B. den (durch ein oben gegebenes Beispiel angedeuteten) Schutz vor einer unerkannten unsinnigen formalen Einsetzung in eine sortenrechte Formel, sie schützt aber keineswegs allgemein vor der deduktiven Heranziehung beliebiger nicht sortenrechter Formeln.

§ 2. Das zugrundeliegende Kodifikat und der Hauptsatz.

Die Frage der Sortenbeschränkung wurde von mir im Anschluß an die HERBRANDschen Untersuchungen bereits in einer Arbeit „Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen“³⁾ behandelt; in § 3 wird hierauf noch ausführlicher eingegangen werden. Ich lege hier dasselbe Kodifikat der Prädikatenlogik zu Grunde wie dort, ebenso ist die Definition des Sortenbeschränkungsoperators übernommen. Zur Erleichterung der Lektüre

²⁾ Recherches sur la théorie de la démonstration (Thèse Paris). Warschau 1930, Kap. 3, Abschnitt 3.4—3.42, erster Absatz.

³⁾ Math. Ann. 115, S. 485—506, im folgenden zitiert als „Th. m. m. S.“.

mögen die wesentlichen Züge der Kodifikation in diesem Paragraphen skizziert werden, so daß die vorliegende Arbeit unabhängig von jener gelesen werden kann.

Skizze der Definition der n -sortigen Prädikatenlogik.

1. Das Begriffnetz.

Die Zeichen einer n -sortigen Prädikatenlogik teilen sich wie folgt ein:

Termzeichen: Termvariablen (a, b, c, \dots), Funktorzeichen (φ, ψ, \dots), Quantablen (auch wohl „gebundene Variablen“ genannt, x, y, \dots).

Formelzeichen: Aussagevariablen; Prädikatszeichen.

Verknüpfungszeichen: \wedge (und), \vee (oder), \rightarrow (folgt), \neg (nicht), Quantoren, d. s. die Zeichen A (alle) und E (es gibt); runde Klammern und Kommata. Einem Quantor sind ein oder mehrere Indizes beigegeben (die mit Quantablen gestaltlich übereinstimmen).

Die Bildung von Termen und Formeln aus diesen Zeichen geschieht, wie es in der Prädikatenlogik (einschließlich Funktorzeichen) üblich ist, jedoch mit Einschränkung durch eine „Sortenbedingung“. Der Formulierung dieser Bedingung sind noch einige Verabredungen voranzustellen.

Verabredungen zur Mitteilung. Zeichen, deren Gestalt freibleibt, werden durch gotische Lettern mitgeteilt (so Termzeichen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$, Termvariablen auch durch $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, Quantablen auch durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$). Terme werden wie ihre Anfangszeichen, aber in Fettdruck mitgeteilt. Ebenso werden ganze Formeln und Teilformeln fettgedruckt.

Alle Zeichen, denen irgendwelche Argumentstellen beigegeben sind, und die übrigen Funktorzeichen (falls man argumentstellenlose Funktorzeichen für spezielle Individuen heranziehen will) seien unter dem Namen „Charakterzeichen“ zusammengefaßt; Charakterzeichen werden durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \dots$ mitgeteilt.

Jedes Termzeichen wird nun genau einer von n Sorten zugeteilt (wobei Termvariablen und Quantablen aller Sorten vorkommen sollen).

Bei der Bildung von Formeln und Formelmengen ist nun die folgende Sortenbedingung zu beachten:

1. Gleiche Zeichen sind gleichsortiert.

2. Zwei Zeichen, die gleiche Argumentstellen gleicher Charakterzeichen ausfüllen, sind gleichsortiert (man könnte hier offenbar auch von einer Sortierung der Argumentstellen sprechen).

Verabredungen zur Mitteilung. Ein Ausdruck, der aus einer solchen Formel, die die aussagenlogischen Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ nicht enthält, nach Wegstreichung eventuell auftretender Quantoren entsteht, heißt Primausdruck, anders ausgedrückt: ein Ausdruck, der aus einem Prädikatszeichen mit durch Termen ausgefüllten Argumentstellen entsteht, indem eventuell einige Termvariablen durch Quantablen ersetzt werden, heißt Primausdruck.

Eine Formel ohne freie Termvariablen heißt geschlossen.

II. Das Beweisgerüst.

A. Als „Wahrform“ wollen wir jede aus $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ und Aussagevariablen gebildete Form bezeichnen, die bei jeder Bewertung mit „wahr“ und „falsch“ nach den Regeln der Aussagenlogik stets den Wert „wahr“ erhält.

Es sei dann als *Axiom* jede Formel zugelassen, die aus einer Wahrform durch eine Formeleinsetzung hervorgeht. Eine solche läßt sich schematisch kurz so andeuten:

$$\mathfrak{A} [\mathfrak{B}]$$

$$\mathfrak{A} [\mathfrak{B}];$$

hier bezeichnet \mathfrak{B} eine Aussagevariable, \mathfrak{B} irgend eine Formel.

Es ist zu beachten, daß die Formeleinsetzung nicht als Schlußschema benutzt wird, sondern lediglich zur Aufstellung der Axiome herangezogen wird. (Innerhalb eines Beweises — s. unten — spielen daher die Aussagevariablen keine andere Rolle als die Prädikatszeichen.)

B. Schlußschematen.

1. Das Schema der Termeinsetzung:

$$\mathfrak{A} [v]$$

$$\mathfrak{A} [a]$$

Hier bezeichnet v eine Termvariable, a einen so wie v sortierten Term.

2. Allzeichenlösung und Existenzzeichenlösung:

$$\mathfrak{A} \rightarrow A_x \mathfrak{B} [x]$$

$$E_x \mathfrak{B} [x] \rightarrow \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} [v]$$

$$\mathfrak{B} [v] \rightarrow \mathfrak{A}$$

Hier bezeichnet v eine Termvariable, die so sortiert ist wie die Quantale x .

3. Allzeichenbindung und Existenzzeichenbindung:

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} [v]$$

$$\mathfrak{B} [v] \rightarrow \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \rightarrow A_x \mathfrak{B} [x]$$

$$E_x \mathfrak{B} [x] \rightarrow \mathfrak{A}$$

Hier bezeichnet x eine Quantale, die so sortiert ist wie die Termvariable v . Die Teilformel \mathfrak{A} soll die Termvariable v nicht enthalten.

4. Grundschlussschema:

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{B}$$

Verabredungen zur Mitteilung. Die in den Schlußschematen 1 und 3 mitgeteilten v heißen die *Hauptvariablen*, die in 2 mitgeteilten x heißen *Hauptquantablen*, und die in der Termeinsetzung 1 mitgeteilten a heißen die *Einsatzterme*.

Eine endliche Formelnfigur, deren Formeln aus Axiomen durch Anwendung der Schlußschematen hervorgehen, heißt ein *Beweis*.

Anmerkung. Eigentlich sind einer speziellen Prädikantenlogik noch gewisse sog. „Eigenaxiome“ (ohne freie Variablen) beizugeben. Doch läßt sich von ihnen bei den meisten metamathematischen Problemen — so auch bei der Sortierung — in der üblichen Weise absehen. Ist nämlich \mathfrak{A} die Konjunktion der (als geschlossen vorausgesetzten) Eigenaxiome, \mathfrak{E} eine aus ihnen beweisbare Formel, so ist $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{E}$ ohne die Eigenaxiome beweisbar.

Sortenbeschränkung. Zunächst möge das Begriffsnetz einer gegebenen n -sortigen Theorie vorübergehend erweitert werden durch die Aufnahme von „Sortenprädikaten“, d. h. von speziellen einstelligen Prädikatszeichen $\mathfrak{S}_i (\cdot)$ [für $i = 1, \dots, n$]; in die Argumentstelle von $\mathfrak{S}_i (\cdot)$ soll nur ein Term der i -ten Sorte eingesetzt werden dürfen.

Danach läßt sich einer beliebigen Formel \mathfrak{F} aus dem Begriffsnetz, die keine Sortenprädikate enthält, eine „sortenbeschränkte“ Formel $P\mathfrak{F}$ zuordnen, und zwar durch den folgenden, induktiv definierten Operator:

$$\begin{aligned} P\Omega &=: \Omega \text{ für einen Primausdruck } \Omega \\ P(\supset \mathfrak{A}) &=: \supset P\mathfrak{A} \\ P(\mathfrak{A} \hat{=} \mathfrak{B}) &=: P\mathfrak{A} \hat{=} P\mathfrak{B} \\ PA_x \mathfrak{A} [\underline{x}] &=: A_x (\mathfrak{S}_i(\underline{x}) \rightarrow P\mathfrak{A} [\underline{x}]) \\ PE_x \mathfrak{A} [\underline{x}] &=: E_x (\mathfrak{S}_i(\underline{x}) \wedge P\mathfrak{A} [\underline{x}]). \end{aligned}$$

Hier soll \mathfrak{S}_i das Zeichen für diejenige Sorte mitteilen, der das \underline{x} im Ausdruck $\mathfrak{A} [\underline{x}]$ zugeteilt ist.

Beispiel: Das (schwache) Parallelenaxiom sei in der Gestalt

$$\mathfrak{F} =: A_{x\underline{u}} \{ \supset J(x, \underline{u}) \rightarrow E_y [J(y, \underline{u}) \wedge \supset E_v (J(x, \underline{v}) \wedge J(y, \underline{v}))] \}$$

gegeben, wobei die Quantablen der 1. Sorte (Geraden) nicht unterstrichen, diejenigen der 2. Sorte (Punkte) unterstrichen sind. Nach Einführung der beiden Sortenzeichen $\mathfrak{G}(\cdot)$ [als $\mathfrak{S}_1(\cdot)$] und $\mathfrak{P}(\cdot)$ [als $\mathfrak{S}_2(\cdot)$] hat man die sortenbeschränkte Gestalt

$$P\mathfrak{F} =: A_{x\underline{u}} \{ \mathfrak{G}(x) \rightarrow \mathfrak{P}(\underline{u}) \rightarrow \supset J(x, \underline{u}) \rightarrow E_y [\mathfrak{G}(y) \wedge J(y, \underline{u}) \wedge \supset E_v (\mathfrak{P}(v) \wedge J(x, v) \wedge J(y, v))] \}.$$

Es sei nun eine — noch nicht durch Sortenprädikate erweiterte — n -sortige Prädikatentheorie T_n vorgelegt. Ihr läßt sich eine „zugehörige“ einsortige Prädikatentheorie $T_1^{(n)}$ wie folgt zuordnen:

1. Man erweitert das Begriffsnetz der gegebenen Theorie T_n durch die Sortenprädikate,

2. man erweitert das Beweisgerüst durch die beiden folgenden Sortenaxiome:

S 1. Für jede Sorte i heißt eine Formel der Gestalt $E_x \mathfrak{S}_i(\underline{x})$ beweisbar.

S 2. Für jedes Funktorzeichen \mathfrak{h} mit m Argumentstellen heißt eine Formel der Gestalt $A_{x_1, \dots, x_m} (\mathfrak{S}_i(\underline{x}_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{S}_i(\underline{x}_m) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{h}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)))$

(mit richtigem Sortenindex für jedes \mathfrak{S}) beweisbar. [Für ein argumentstellenloses \mathfrak{h} reduziert sich dies auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{h})$.]

3. man läßt die Sortenbedingung für die Besetzung aller Argumentstellen fallen. Es gilt dann der

Hauptsatz: Für die Beweisbarkeit einer geschlossenen Formel \mathfrak{E} aus dem Begriffsnetz einer gegebenen mehrsortigen Prädikatentheorie T_n ist notwendig und hinreichend, daß in der zu T_n gehörigen einsortigen Prädikatentheorie $T_1^{(n)}$ die Formel $P\mathfrak{E}$ beweisbar ist.

§ 3. Historische Anmerkungen.

Die Notwendigkeit („wenn \mathfrak{E} in T_n beweisbar ist, so ist $P\mathfrak{E}$ in $T_1^{(n)}$ beweisbar“) zeigt man, indem man in der einsortigen Theorie $T_1^{(n)}$ von einer bewiesenen Formel \mathfrak{E} durch Netzinduktion zu $P\mathfrak{E}$ übergeht. Dieser bereits bei HERBRAND (a. in § 1 ang. O.) skizzierte Übergang wurde in meiner Arbeit Th. m. m. S.³⁾ § 4 für das hier betrachtete Kodifikat ausführlich bewiesen. Für das Hinreichen („wenn $P\mathfrak{E}$ in $T_1^{(n)}$ beweisbar ist, so \mathfrak{E} in T_n “) findet sich bei

HERBRAND a. a. O. der umgekehrte Beweisansatz, wobei aber, wie bereits in § 1 bemerkt wurde, die Sortierung nicht beachtet ist; es handelt sich dort lediglich um eine Elimination der Sortenzeichen innerhalb der gewöhnlichen einsortigen Theorie $T_1^{(n)}$. Diese Lücke in der HERBRANDschen Überlegung wurde mehrfach festgestellt. — Der jener Überlegung entsprechende Beweisteil ist für das von mir zugrunde gelegte Kodifikat in § 10 von Th. m. m. S. durchgeführt. Durch ihn reduziert sich dann das zum Beweis des Hauptsatzes noch verbleibende Problem auf den Satz von der Sortenrechtheit:

Eine in der mehrsortigen Theorie T_n sortenrechte Formel, die in der zugehörigen einsortigen Theorie $T_1^{(n)}$ herleitbar ist, läßt sich stets auch durch einen in T_n sortenrechten Beweis herleiten.

Der von mir in Th. m. m. S. hierfür gegebene Beweis, der das Hinreichen des im Hauptsatz gegebenen Kriteriums erweist, stellt noch nicht den Begriff der Sortenrechtheit explizite heraus. Der dort gegebene Beweis für das Hinreichen (§§ 7–9) unterliegt außerdem einer Einschränkung, auf die mich seinerzeit Herr P. BERNAVS freundlicherweise hinwies; es muß daselbst für die *Endformel* vorausgesetzt werden, daß in ungleichen Charakterzeichen mit gleichem Argumentbereich keine entsprechenden Argumentstellen durch gleiche Termzeichen besetzt seien. — Im folgenden zeige ich⁴⁾, daß sich diese Einschränkung beseitigen läßt, wobei der Beweis sich außerdem anstelle der beiden ursprünglich in Th. m. m. S. benutzten metamathematischen Relationen ω_1 , ω_2 nur noch einer derartigen Relation (\times) bedient. — Es sei hier bereits bemerkt, daß sich als die angemessenste Kodifikation für derartige metamathematische Probleme heute gewöhnlich eine *aufsichtende* Kodifikation erweist, wie sie, seit GENTZEN in diese Richtung wies, von verschiedenen Autoren angegeben wurde. Ein sehr kurzer Beweis des in Rede stehenden Satzes in einem aufsichtenden Kodifikat soll folgen; in der vorliegenden Arbeit liegt mir zunächst daran zu zeigen, daß auch in dem gewöhnlichen prädikatenlogischen Kodifikat der vollständige Beweis geradlinig geführt werden kann.

§ 4. Der Satz von der Sortenrechtheit.

Der am Schluß des § 2 angegebene Hauptsatz reduziert sich, wie im ersten Absatz des § 3 angedeutet wurde, durch einigermaßen zwangsläufige prädikatenlogische Umformungen auf den „Satz von der Sortenrechtheit“; dieser möge hier zunächst rein strukturell — ohne Bezugnahme auf die Begriffsbildung der „zu T_n “ gehörigen Theorie $T_1^{(n)}$ “ — formuliert werden. Hierzu seien einige Definitionen vorangeschickt.

„Gleichgelegen“ und „=“. Zunächst ist klar, wann zwei in gestaltlich übereinstimmenden Formeln bzw. Teilformeln auftretende Zeichen in diesen als „gleichgelegen“ zu „bezeichnen sind. Diese Relation läßt sich wie folgt verallgemeinern. Ober- und Unterformel eines Termeinsetzungs- oder Quantorschlusses heißen benachbart, ebenso heißen in einem Implikationschluß $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{C}$ die beiden \mathfrak{A} benachbart und die beiden \mathfrak{B} benachbart. Wenn man zunächst von den Termeinsetzungen absieht, so ist klar, wann zwei

⁴⁾ Der in der vorliegenden Arbeit veröffentlichte Beweis stammt aus dem Jahre 1939. Ich trug ihn im Dezember 1946 im Kolloquium der Mathematischen Gesellschaft der Universität Göttingen vor.

in benachbarten Formeln auftretende Zeichen in diesem Formelpaar „gleichgelegen“ heißen sollen. Auch für einen Termeinsetzungsschluß ist diese Bezeichnung evident, sofern das in der Unterformel herausgegriffene Zeichen entweder nicht einem Einsatztterm angehört oder aber das *Anfangs*zeichen eines Einsatztterms ist; nur für diese Fälle soll die Bezeichnung „gleichgelegen“ verwendet werden. Daß bei zwei Charakterzeichen $\mathfrak{S}, \mathfrak{R}$ mit gleichvielen Argumentstellen die ν -ten Stellen durch Terme ausgefüllt sind, die mit den Zeichen a bzw. b beginnen, sei durch „ $a = b$ hinter $\mathfrak{S}, \mathfrak{R}$ “ mitgeteilt.

Die in einer gegebenen Formel bzw. Formelnreihe \mathfrak{R} auftretenden Termzeichen⁴⁾ seien nun in n Sorten eingeteilt. Diese Einteilung (und somit auch die Formel bzw. Formelnreihe \mathfrak{R}) heißt nun „sortenrecht“, wenn die folgenden Bedingungen der *Sortenrechtheit* erfüllt sind (wobei die Zuteilung zur gleichen Sorte durch \approx mitgeteilt ist):

$\Sigma 1$. Jedes in der Formelnreihe \mathfrak{R} vorkommende Termzeichen⁵⁾ ist in eindeutiger Weise sortiert.

$\Sigma 2$. Gleiche Zeichen⁵⁾ sind gleichsortiert, d. h. mit $a = b$ ($\in \mathfrak{R}$) ist $a \approx b$.

$\Sigma 3$. Zeichen⁵⁾, die entsprechende Argumentstellen gleicher Charakterzeichen⁶⁾ ausfüllen, sind gleichsortiert, d. h. mit

$$a = b \text{ hinter } \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \text{ ($\in \mathfrak{R}$) und } \mathfrak{S} = \mathfrak{R} \text{ ist } a \approx b.$$

Der Satz von der *Sortenrechtheit*, auf den sich der (am Schlusse des § 2) angegebene Hauptsatz reduziert, läßt sich nun (unter Benutzung der Bemerkung betreffs der Eigenaxiome, S. 192, vorletzter Abs.) so aussprechen:

Eine in der einsortigen Prädikatenlogik beweisbare Formel, die — im Sinne irgendeiner Sortierung — sortenrecht ist, läßt sich stets durch einen Beweis herleiten, der eine in diesem Sinne sortenrechte Formelnreihe darstellt.

Mit dem Beweis dieses Satzes ist nach dem Vorangegangenen der Hauptsatz bewiesen.

Die übliche Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der einsortigen Prädikatenlogik unter Sortenbeschränkung der Axiome und der Ergebnisse ist dadurch als zulässig und berechtigt erwiesen.

§ 5. Beweis des Satzes von der Sortenrechtheit.

„Verbunden“ (\times) und „elementarverbunden“. Für einen Beweis mit der Endformel \mathfrak{G} gelten die folgenden induktiven Festsetzungen über seine Term- und Formelzeichen.

R 1. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn \mathfrak{F} gleichgelegen zu \mathfrak{G} in zwei gestaltlich gleichen Primbestandteilen eines Axioms ist⁷⁾.

R 2. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn \mathfrak{F} gleichgelegen zu \mathfrak{G} in einem benachbarten Formelpaar ist und die Zeichen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ beide Charakterzeichen oder beide nicht Charakterzeichen sind. (Durch die letzte Bedingung wird ein Funktorzeichen, das einen Einsatztterm in einer Termeinsetzung beherrscht, von der elementaren Verbundenheit mit der gleichgelegenen Hauptvariablen ausgeschlossen.)

⁴⁾ Mit „Zeichen“ ist hier ein an bestimmtem Platz der gegebenen Formelnreihe \mathfrak{R} stehendes Zeichen gemeint. Wo man sonst wohl von „einem zweimal auftretenden“ Zeichen sprechen würde, empfiehlt es sich hier, von „zwei gestaltlich gleichen“ Zeichen zu reden; diese werden in der Mitteilung durch verschiedene gotische Mitteilungszahlen zu unterscheiden sein, obwohl es sich rein gestaltlich gesehen um dasselbe Zeichen handelt. Eine metamathematische Mitteilung $a = b$ ist in dieser Weise zu verstehen.

R 3. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn \mathfrak{F} gleichgelegen zu \mathfrak{G} in zwei Einsatztermen einer Term-einsetzung ist, die unter solche Hauptvariablen p, q der Oberformel [mit $p = q^5$] eingesetzt sind, für die $p \times q$ gilt.

R 4. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ in der Endformel \mathfrak{E} .

R 5. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn es im Beweise ein Zeichen \mathfrak{H} mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}, \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ gibt.

R 6. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, d. h. „ \mathfrak{F} verbunden mit \mathfrak{G} “ nur gemäß R 1–5.

Zwei Zeichen, die gemäß einer der Rechenregeln R 1 bis R 4 allein verbunden sind, heißen „elementarverbunden“. Wenn zur Feststellung der Verbundenheit zweier Zeichen die Festsetzung R 4 nicht herangezogen zu werden braucht, so heißen die beiden Zeichen auch „engverbunden“.

Def. Die Mindestanzahl elementarer Verbundenheiten, die herangezogen werden müssen, um eine Verbundenheit zu erschließen, heiße der Rang dieser Beziehung.

Bei Durchgehen der Elementarverbundenheiten erkennt man unmittelbar die Gültigkeit der folgenden Sätze:

Satz 1. Mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}$.

Satz 2. Mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ gilt, wenn \mathfrak{F} Charakterzeichen ist, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Weiter gilt der

Satz 3. Es sei $a \times b$ engverbunden. a sei Anfangszeichen eines Terms, der eine Argumentstelle des Charakterzeichens \mathfrak{H} ausfüllt. Dann gibt es ein mit \mathfrak{H} engverbundenes Charakterzeichen \mathfrak{K} mit $a = b$ hinter $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$.
Nachweis durch Induktion nach dem Range der Verbundenheit.

Für eine elementare Verbundenheit gemäß R 1 oder R 2 ist die Behauptung evident. Der Induktionsschluß ist daher trivial, sobald die „letzte“ benötigte elementare Verbundenheit gemäß R 1 oder R 2 besteht. — Die letzte elementare Verbundenheit sei nun eine solche gemäß R 3, d. h. es gebe ein Zeichen c derart, daß 1. c gleichgelegen zu b in Einsatztermen, die für zwei gleiche Variablen p, q eingesetzt sind, welche engverbunden von kleinerem Range sind, wobei 2. entweder c mit a übereinstimmt oder $a \times c$ engverbunden von kleinerem Range ist. Es genügt, im folgenden den letzteren Fall anzunehmen; der Fall der Übereinstimmung von a und c erledigt sich dann offenbar an Hand derselben Überlegung, nur teilweise einfacher. — Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Charakterzeichen \mathfrak{L} , so daß $a = c$ hinter $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{L}$ engverbunden. Falls \mathfrak{L} zum Einsatzterm gehört, so gibt es in dem anderen Einsatzterm ein gleichgelegenes und gleiches Zeichen \mathfrak{K} mit $c = b$ hinter $\mathfrak{L}, \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L} \times \mathfrak{K}$ wegen $p \times q$. Falls \mathfrak{L} nicht zum Einsatzterm gehört, so gibt es in der Oberformel des betreffenden Termeinsetzungsschlusses ein mit \mathfrak{L} elementar verbundenes Charakterzeichen \mathfrak{M} , zu dessen Argumentbereich p gehört. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein Charakterzeichen \mathfrak{N} , so daß $p = q$ hinter $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ engverbunden. Zu \mathfrak{N} gibt es in der Unterformel ein elementarverbundenes Charakterzeichen \mathfrak{R} . Man hat nun nicht nur $\mathfrak{L} \times \mathfrak{R}$ engverbunden, sondern auch $c = b$ hinter $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $a = c$ hinter $\mathfrak{H}, \mathfrak{L}$ ergibt sich in jedem Falle: $a = b$ hinter $\mathfrak{H}, \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{R}$ engverbunden.

Zerspaltung. Als Zerspaltung eines Beweises B mit der Endformel \mathfrak{E} sei die folgende Ersetzung bezeichnet:

In B seien alle Termvariablen v durch Termvariablen v^* und alle Quantablen \mathfrak{x} durch Quantablen \mathfrak{x}^* in der Weise ersetzt, daß

1. $\mathfrak{s}^* = t^*$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{s} = t$ und $\mathfrak{s} \times t$,
2. $\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}$ für alle $\mathfrak{s} \in \mathfrak{E}$

3. \mathfrak{s}^* ein nicht in B vorgekommenes Zeichen ist, wenn kein zu \mathfrak{s} gleiches Zeichen in \mathfrak{C} auftritt.

Diese Forderungen sind gemäß R 4 offenbar miteinander verträglich. Ein Quantor A_r bzw. E_r , in dessen Bereich die Quantablen durch x_1^*, \dots, x_n^* ersetzt sind, werde sodann durch $A_{r_1^*} \dots r_n^*$ bzw. $E_{r_1^*} \dots r_n^*$ ersetzt. Hierdurch geht jede Formel wieder in eine Formel über.

Satz 4. Ein Beweis geht durch Zerspaltung — nebst geeigneter Ergänzung — in einen Beweis für die nämliche Endformel über.

Nachweis. 1. Ein Axiom geht gemäß R 1 in ein Axiom über.

2. Es sei irgendein Schluß betrachtet. Da gestaltlich verschiedene Zeichen durch gestaltlich verschiedene Zeichen ersetzt werden, läßt sich die Betrachtung der Änderung der Hauptvariablen und -quantablen von der der übrigen Zeichen abtrennen.

Die Ersetzung eines Zeichens, das weder Hauptvariable oder -quantable ist noch dem Einsatzterm einer Termeinsetzung angehört, stört gemäß R 2 den Charakter des betrachteten Schlusses nicht. (Insbesondere geht also ein Implikationsschluß in einen Implikationsschluß über.)

3. Gemäß R 2 sind in einem Quantorschluß zwei Zeichen der Ober- bzw. Unterformel dann und nur dann verbunden, wenn auch die gleichgelegenen Zeichen der Unter- bzw. Oberformel verbunden sind. Daher geht ein solcher Schluß stets entweder direkt in einen gleichartigen oder aber in ein Formelpaar über, das sich auf triviale Weise zu einer Kette gleichartiger Schlüsse ergänzen läßt; es wird genügen, dies am Beispiel der All-Lösung vorzuführen:

$\mathfrak{A} \rightarrow A_r \mathfrak{B} [x, x, \cdot]$ $\mathfrak{A} \rightarrow A_{r^* p^*} \mathfrak{B} [x^*, y^*, \cdot]$
 werde in $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} [v, v, \cdot]$ $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} [v^*, w^*, \cdot]$ geändert.

Hier ist mit $x^* \neq y^*$ auch $v^* \neq w^*$ (entsprechend in den durch „“ mitgeteilten Stellen).

Man ergänzt zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\rightarrow A_{r^* p^*} \mathfrak{B} [x^*, y^*, \cdot] \\ \mathfrak{A} &\rightarrow A_{p^*} \mathfrak{B} [v^*, y^*, \cdot] \\ \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{B} [v^*, w^*, \cdot]. \end{aligned}$$

4. Es bleiben also nur die Termeinsetzungen hinsichtlich ihrer Hauptvariablen und Einsatzterme zu betrachten. Bei Änderung von $\mathfrak{A} [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \cdot]$ in $\mathfrak{A} [\mathfrak{s}^*, t^*, \cdot]$ hat man wieder eine Termeinsetzung, oder man kann in trivialier Weise zu einer Kette mehrerer Termeinsetzungen ergänzen, *sofern* nicht $\mathfrak{s}^* = t^*, a^* \neq b^*$ (bzw. entsprechend in den durch „“ mitgeteilten Stellen) ist. Aber $\mathfrak{s}^* = t^*$ gilt nur bei Verbundenheit der beiden angeführten \mathfrak{s} . Dann sind nach R 3 je zwei in den beiden angeführten Einsatztermen gleichgelegene Zeichen miteinander verbunden, also $a^* = b^*$.

5. Die Endformel bleibt offenbar erhalten.

Verjüngung. In einem Beweise B mögen die Formelnzeichen als Zeichen erster Stufe und die Anfangszeichen solcher Terme, die eine Argumentstelle eines Zeichens m -ter Stufe ausfüllen, als Zeichen $m + 1$ -ter Stufe bezeichnet werden. Die höchste in B auftretende Stufe sei M . Als Verjüngung des

Beweises B sei die folgende, aus höchstens M Schritten bestehende Ersetzung bezeichnet.

m -ter Schritt der Verjüngung ($m \leq M$). Alle Charakterzeichen m -ter Stufe, die mit keinem Zeichen der Endformel verbunden sind, seien unter Fortfall ihrer Argumentenbereiche durch ein und dieselbe (genauer: für den m -ten Schritt ein- und dieselbe) nicht in der vorliegenden Beweisfigur aufgetretene Variable ersetzt, und zwar beim ersten Schritt durch eine Formelvariable, bei allen anderen Schritten durch Termvariablen. Quantoren, in deren Bereich keine zugehörige Quantable mehr auftritt, mögen jeweils samt ihrem Index gestrichen werden. Im Anschluß an diesen Schritt werde der Beweis zerspalten.

Satz 5. Ein Beweis geht durch Verjüngung in einen zerspaltenen Beweis für die nämliche Endformel über.

Nachweis. 1. Wenn ein Zeichen geändert wird, so auch jedes mit ihm verbundene Zeichen, und zwar in ein gleichgestaltetes Zeichen. Wenn weiter bei einem Schritt der Verjüngung ein Zeichen \S in Fortfall gerät, so stand es im Argumentenbereich eines zu ändernden oder fortfallenden Zeichens \S . Jedes mit \S engverbundene Zeichen \S steht nach Satz 3 im Bereiche eines mit \S engverbundenen Zeichens. \S gerät also ebenfalls in Fortfall.

2. Daraus ersieht man zunächst unmittelbar: Ein Axiom und ebenso ein Quantorschluß oder ein Implikationschluß geht durch Verjüngung in ein Axiom bzw. in einen gleichartigen Schluß oder — im Falle eines Quantorschlusses, dessen sämtliche Hauptvariablen von der Verjüngung betroffen werden — in ein Paar gleicher Formeln über; im letzteren Falle darf eine der beiden Formeln aus der Beweisfigur gestrichen werden.

3. Ebenso ersieht man, daß man sich bezüglich der Änderung einer Term-einsetzung auf die Betrachtung der verbleibenden Hauptvariablen und Einsatz-terme beschränken kann. Der Übergang

$$\mathfrak{A}[\S, \S, \cdot]$$

$$\mathfrak{A}[a, a, \cdot]$$

sei von der Verjüngung nicht so betroffen, daß eine der beiden angeführten Hauptvariablen \S in Fortfall geriete; dann gerät auch von den beiden a keines ganz in Fortfall (und umgekehrt). Ein Verjüngungsschritt, der eines der beiden \S abändert, ist nicht der erste. Da also vor Ausführung eines solchen Verjüngungsschritts der Beweis gemäß der Verjüngungsvorschrift zerspalten wurde, sind die beiden \S miteinander verbunden — mithin nach R 3 ebenso je zwei gleichgelegene Zeichen der beiden angeführten Einsatzterme a . Daher kann der Übergang nur in eine Termeinsetzung der Art

$$\mathfrak{A}[\S^*, \S^*, \cdot]$$

$$\mathfrak{A}[a^*, a^*, \cdot]$$

geändert sein.

4. Die jedesmalige Zerspaltung ändert an der Verjüngtheit erster bis M -ter Stufe offenbar nichts, da sie keine Charakterzeichen berührt.

Satz 6. Zu jedem Charakterzeichen eines verjüngten Beweises gibt es ein mit ihm verbundenes und ihm gleiches Zeichen in der Endformel.

Dies folgt unmittelbar aus der Verjüngungsvorschrift und Satz 5.

Satz 7. In einem verjüngten Beweis gilt mit $\S = \S$ auch $\S \times \S$.

Für Termvariablen und Quantablen ist dies eine Folge der begleitenden Zerspaltung. Zwei Charakterzeichen $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ sind nach Satz 6 mit gleichgestalteten Zeichen der Endformel verbunden, die ihrerseits nach R 4 miteinander verbunden sind.

Sortierung.

In einer einsortigen Prädikantentheorie sei die (bei Zugrundelegung von n gegebenen Sorten) sortenrechte Formel \mathfrak{E} durch einen verjüngten Beweis Γ ohne Benutzung von Sortenaxiomen hergeleitet.

\mathfrak{E} soll also die „Sortierungsbedingungen“ $\Sigma 1-3$ (von S. 195) erfüllen, d. h.

E 1. Jedes Termzeichen von \mathfrak{E} ist in eindeutiger Weise sortiert.

E 2. Mit $a = b$ ($\in \mathfrak{E}$) ist $a \approx b$.

E 3. Mit $a = b$ hinter gleichen Charakterzeichen ($\in \mathfrak{E}$) ist $a \approx b$.

Die Zeichen der Beweisfigur Γ mögen nun so sortiert (d. h. auf die n gegebenen Sorten verteilt) werden:

E 4. $a \approx b$, wenn $a = b$ zu $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$.

Satz 8. Die Bedingung $\Sigma 1$ ist für die gesamte Beweisfigur Γ erfüllt, d. h. die Sortierung der Termzeichen von Γ ist vollständig und eindeutig.

Nachweis der Vollständigkeit. Zu jedem Termzeichen a ($\in \Gamma$) gibt es ein Charakterzeichen \mathfrak{H} , hinter dem a eine Argumentstelle ausfüllt. Nach Satz 6 gibt es ein Charakterzeichen $\mathfrak{K} \in \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$. Es gibt dann auch ein Zeichen $b \in \mathfrak{E}$ mit $a = b$ zu $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$. Nach E 1 und E 4 ist nun a sortiert.

Nachweis der Eindeutigkeit. a sei auf solche Weise zweifach sortierbar. Es gibt dann $b_1, b_2 \in \mathfrak{E}$, so daß $a \approx b_1$, $a \approx b_2$ gemäß E 4 unter anderem auf Grund von $a = b_1$, $a = b_2$ hinter verbundenen Zeichen. Wegen der Transitivität der Beziehungen „ $=$ “ und „ \times “ ist $b_1 = b_2$ hinter verbundenen Zeichen, also nach E 3: $b_1 \approx b_2$.

Satz 9. Mit $a \times b$ ($\in \Gamma$) ist $a \approx b$.

Nachweis durch Induktion nach dem Rang von $a \times b$.

Es gibt das Zeichen c derart, daß $c \times b$ elementarverbunden gemäß einer der Vorschriften R 1 bis R 4 und entweder a mit c übereinstimmend (beim Range 1) oder $a \times c$ von kleinerem Range (bei einem Range > 1), also $a \approx c$ nach Induktionsvoraussetzung. Es bleibt zu zeigen: $c \approx b$.

1. Sei $c \times b$ elementar gemäß R 1 oder R 2. Wenn c eine Argumentstelle von \mathfrak{H} , b eine solche von \mathfrak{K} ausfüllt, so ist dann $c = b$ hinter $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$, und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$, also nach E 4: $c \approx b$.

2. Sei $c \times b$ elementar gemäß R 3, d. h. c und b sind in solchen Einsatzt termen der Unterformel einer Termeinsetzung gleichgelegen, welche unter zwei Hauptvariablen $p \times q$ der Oberformel eingesetzt sind. Dabei ist $p \times q$ von kleinerem Rang, also nach Induktionsvoraussetzung $p \approx q$.

Falls c, b nicht die Anfangszeichen der betreffenden Einsatzt terme sind, so gibt es in diesen Einsatzt termen die Zeichen r, s mit $c = b$ hinter r, s . Da mit $p \times q$ nach R 3 auch $r \times s$ ist, gilt $c \approx b$ nach E 4.

Wenn aber c, b die Anfangszeichen der Einsatzt terme sind, so gibt es in der Oberformel die Charakterzeichen $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}$ und in der Unterformel die Charakterzeichen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ derart, daß erstens $\mathfrak{R} \times \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Q} \times \mathfrak{N}$ elementar gemäß R 2 und zweitens $p = c$ hinter $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$ und $q = b$ hinter $\mathfrak{Q}, \mathfrak{N}$. Nach E 4 ist also $c \approx p$ und $q \approx b$. Dies führt mit $p \approx q$ auf $c \approx b$.

3. Sei $c \times b$ gemäß R 4, d. h. $c = b$ in \mathfrak{C} . Dann ist $c \approx b$ gemäß E 2.

Satz 10. Die Bedingung $\Sigma 2$ ist für die gesamte Beweisfigur I' erfüllt, d. h. mit $a = b$ ($\in I'$) ist $a \approx b$.

Dies ist eine Folge der Sätze 7 und 9.

Satz 11. Die Bedingung $\Sigma 3$ ist für die gesamte Beweisfigur I' erfüllt, d. h. mit $a = b$ ($\in I'$) hinter gleichen Charakterzeichen $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ ist $a \approx b$.

Nachweis. Es gibt, wie im Nachweis der Vollständigkeit gezeigt wurde, die Zeichen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{K}} \in \bar{\mathfrak{C}}$ derart, daß $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{H}}, \mathfrak{K} \times \bar{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}$, weiter $a = \bar{a}$ hinter $\mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{H}}$ und $b = \bar{b}$ hinter $\mathfrak{K}, \bar{\mathfrak{K}}$; also auch $\bar{a} = \bar{b}$ hinter $\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{K}} \in \bar{\mathfrak{C}}$. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ ist $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{K}}$. Gemäß E 3 ist $\bar{a} \approx \bar{b}$; gemäß E 4 ist $a \approx \bar{a}, b \approx \bar{b}$.

(Eingegangen am 5. August 1950.)

Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem.

Von

KARL STEIN in Münster (Westf.)

Die Herstellung eindeutiger regulärer Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ zu lokal vorgeschriebenen Nullstellenflächen in einem Gebiete \mathcal{G} des R^{2n} ist, wie schon früh bemerkt wurde, nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Daß zur Lösung dieser als zweites Cousinsches Problem bekannten Aufgabe besondere Bedingungen erfüllt sein müssen, hängt zu einem Teil mit der Erscheinung der Regularitätshüllen im Raume mehrerer komplexer Veränderlichen zusammen. Außerdem kann es im R^{2n} vorkommen, daß die Existenz einer gesuchten Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ aus topologischen Gründen ausgeschlossen ist. Die mit den Regularitätshüllen in Verbindung stehenden Schwierigkeiten sind bis heute nicht vollständig geklärt; es ist daher zweckmäßig, sie zunächst ganz auszuschalten, indem die Betrachtung auf Regularitätsgebiete \mathcal{G} beschränkt wird. Dies ist auch aus einem anderen Grunde von Vorteil. Herr K. OKA hat bewiesen, daß ein in einem Regularitätsgebiet des R^{2n} vorgegebenes Cousinsches Problem 2. Art stets dann eine reguläre Funktion als Lösung zuläßt, wenn eine stetige Lösung existiert¹⁾. Also braucht in Regularitätsgebieten nur nach rein topologischen Bedingungen für die Existenz Cousinscher Lösungsfunktionen gefragt werden.

In einer früheren Arbeit²⁾ habe ich Bedingungen dieser Art angegeben. Notwendig für die Existenz einer gesuchten Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ ist, daß die Schnitzzahlen der im Gebiete \mathcal{G} gelegenen zweidimensionalen Zyklen mit den vorgegebenen Nullstellenflächen — ich nenne sie charakteristische Schnitzzahlen — sämtlich verschwinden. Umgekehrt gibt es, wenn alle charakteristischen Schnitzzahlen Null sind, in jedem ganz im Innern von \mathcal{G} gelegenen Teilgebiet eine Lösungsfunktion. Indessen gelang es nicht, die Bedingung auch für das Gesamtgebiet \mathcal{G} allgemein als hinreichend nachzuweisen, angenommen in dem Falle, daß die erste Bettische Gruppe B^1 von \mathcal{G} eine freie abelsche Gruppe ist. Ob diese Einschränkung jedoch wirkliche Bedeutung für das Problem besitzt und nicht eigentlich überflüssig ist, blieb offen.

In der vorliegenden Arbeit zeigt sich nun, daß die angegebene Voraussetzung über die Gruppe B^1 in der Tat wesentlich ist und nicht fallen gelassen werden kann. Es gibt im R^{2n} ($n > 1$) Regularitätsgebiete, für welche B^1 keine freie abelsche Gruppe ist. (Ein Beispiel wird im Abschnitt 8 konstruiert). In solchen Gebieten \mathcal{G} muß die oben formulierte Schnitzzahlbedingung durch eine weitere Bedingung ergänzt werden. Hierzu ist es zweckmäßig, auch mehr-

¹⁾ K. OKA, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, [III] Deuxième problème de Cousin, Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A, 9, Nr. 1, 7—19 (1939).

²⁾ Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Ann. 117, 727—757 (1941).

deutige Funktionen als Lösungen Cousinscher Probleme zuzulassen. Wir weisen nach, daß zu einem in \mathcal{G} gegebenen Cousinschen Problem 2. Art, falls die zugehörigen charakteristischen Schnittzahlen sämtlich verschwinden, stets eine reguläre multiplikativ-mehrdeutige Lösungsfunktion $M(z_1, \dots, z_n)$ mit Einheitswurzeln als Multiplikatoren existiert. Die Multiplikatoren von $M(z_1, \dots, z_n)$ bestimmen einen zyklischen Charakter von B^1 , der ein Element c in einer gewissen Restklassengruppe \mathcal{C} der Gruppe der zyklischen Charaktere von B^1 repräsentiert. \mathcal{C} besteht genau dann allein aus dem Nullelement, wenn B^1 eine freie abelsche Gruppe ist. Das Element c ist den vorgegebenen Nullstellenflächen eindeutig, d. h.³ unabhängig von der speziell konstruierten Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ zugeordnet. Dann und nur dann, wenn c mit dem Nullelement in \mathcal{C} zusammenfällt, gibt es eine eindeutige Cousinsche Lösungsfunktion in \mathcal{G} . Wird umgekehrt ein Element c von \mathcal{C} beliebig vorgelegt, so lassen sich in \mathcal{G} Cousinsche Verteilungen von regulären Ortsfunktionen finden, derart, daß den dadurch bestimmten Nullstellenflächen das Element c entspricht.

Zur Durchführung dieser Untersuchungen werden Aussagen über die Existenz analytischer Funktionen mit additiven bzw. multiplikativen Periodizitätsmoduln benötigt – wir sprechen von *additiven* bzw. *multiplikativen automorphen Funktionen*. Als Periodizitätsmoduln sind beliebige eindeutige reguläre bzw. eindeutige reguläre nichtverschwindende Funktionen zugelassen. Wir beweisen, daß in Regularitätsgebieten des R^{2n} additive automorphe Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln stets existieren. Entsprechendes gilt für multiplikative automorphe Funktionen unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die gegebenen Multiplikatoren eindeutige Logarithmen besitzen (nachdem ein bestimmter Zweig des Logarithmus festgelegt ist). Es ist hervorzuheben, daß diese Aussagen auch in gewissen Gebieten komplexer Mannigfaltigkeiten zutreffen, die wir als R -konvex bezeichnen. (Näheres im Abschnitt 6). In den Übertragungen der Sätze auf solche Gebiete ist insbesondere die früher bewiesene Aussage über die Existenz von Integralen 1. Gattung zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln auf offenen Riemannschen Flächen³⁾ enthalten.

Inhaltsübersicht.

1. Analytische Polyeder und Regularitätsgebiete im R^{2n} .
2. Ein Satz von K. OKA zum zweiten Cousinschen Problem.
3. Eigenschaften additiver und multiplikativer automorpher Funktionen.
4. Additive automorphe Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln.
5. Multiplikative automorphe Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln.
6. R -konvexe Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten.
7. Multiplikative automorphe Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenflächen.
8. Ein Kriterium für die Existenz eindeutiger analytischer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenflächen.
9. Anhang. Hilfssätze über abelsche Gruppen.

³⁾ H. BEHNKE u. K. STEIN, Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. 120, 430–461 (1948).

1. **Analytische Polyeder und Regularitätsgebiete im R^{2n} .** Sei \mathcal{E} eine Punktmenge im Raume R^{2n} von n komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_n . Unter einer in \mathcal{E} regulären eindeutigen Funktion wird eine Funktion verstanden, die in einer Umgebung $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ regulär und eindeutig ist. Ist \mathcal{E} nicht zusammenhängend, so sprechen wir von einer in \mathcal{E} regulären Funktion auch dann, wenn die in den einzelnen zusammenhängenden Komponenten gegebenen regulären Funktionen nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

Eine kompakte Punktmenge im R^{2n} heißt ein analytisches Polyeder \mathfrak{P} , wenn sie innerhalb einer Umgebung $\mathcal{U}(\mathfrak{P})$ darstellbar ist durch Ungleichungen

$$|f_\lambda(z_1, \dots, z_n)| \leq K_\lambda \quad (K_\lambda > 0, \lambda = 1, \dots, l),$$

wo die Funktionen f_λ in $\mathcal{U}(\mathfrak{P})$ regulär und eindeutig sind. \mathfrak{P} braucht nicht zusammenhängend zu sein. Besitzt \mathfrak{P} innere Punkte, so sind die in \mathfrak{P} enthaltenen maximalen Gebiete Regularitätsgebiete⁴⁾.

Sei nun \mathcal{G} ein Regularitätsgebiet im R^{2n} . Dann ist \mathcal{G} durch analytische Polyeder ausschöpfbar, deren definierende Funktionen f_λ in \mathcal{G} eindeutig und regulär sind. Ist nämlich \mathcal{G}_0 irgendein in bezug auf \mathcal{G} kompaktes Teilgebiet von \mathcal{G} — wir sagen, \mathcal{G}_0 liege ganz im Innern von \mathcal{G} , in Zeichen $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ — so ergibt sich die Existenz eines analytischen Polyeders \mathfrak{P} mit $\mathcal{G}_0 \subset \mathfrak{P} \subset \mathcal{G}$ wie folgt: \mathcal{G} ist regulär-konvex. Also existiert zu \mathcal{G}_0 ein weiteres Gebiet \mathcal{G}_0^* mit $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_0^* \subset \mathcal{G}$, derart, daß es zu jedem Randpunkt P von \mathcal{G}_0^* eine Umgebung $\mathcal{U}(P)$ und eine in \mathcal{G} reguläre eindeutige Funktion $F_P(z_1, \dots, z_n)$ gibt, welche die Ungleichungen

$$|F_P(Q)| > 1 > \max |F_P(\mathcal{G}_0)|$$

für jeden Punkt Q von $\mathcal{U}(P)$ erfüllt. Der Rand von \mathcal{G}_0^* kann mit endlich vielen der $\mathcal{U}(P)$, etwa mit $\mathcal{U}(P_1), \dots, \mathcal{U}(P_l)$, überdeckt werden. Dann ist der in \mathcal{G}_0^* gelegene Teil der Punktmenge

$$|F_{P_\lambda}(z_1, \dots, z_n)| \leq 1 \quad (\lambda = 1, \dots, l),$$

ein gesuchtes analytisches Polyeder. In bekannter Weise läßt sich jetzt auf die Existenz einer Folge analytischer Polyeder \mathfrak{P}_r mit $\mathfrak{P}_r \subset \mathfrak{P}_{r+1} \subset \mathcal{G}$ schließen, deren Vereinigung \mathcal{G} ist.

Für Funktionen in analytischen Polyedern gilt der

Approximationssatz von WEIL-OKA: Jede in einem analytischen Polyeder

$$\mathfrak{P}: |f_\lambda(z_1, \dots, z_n)| \leq K_\lambda \quad (K_\lambda > 0, \lambda = 1, \dots, l),$$

des R^{2n} reguläre eindeutige Funktion $F(z_1, \dots, z_n)$ läßt sich in \mathfrak{P} gleichmäßig approximieren durch Funktionen der Gestalt $G_n(z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_l)$, wo die G_n Polynome in allen ihren Argumenten darstellen.

Dieser Satz ist zuerst von A. WEIL für den Spezialfall ausgesprochen worden, daß alle f_λ Polynome oder rationale Funktionen sind⁵⁾. Der erste

⁴⁾ Zur Theorie der Regularitätsgebiete vgl. H. BEHNKE u. P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math. u. i. Grenzgeb. III, 3 (1934).

⁵⁾ A. WEIL, Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, C. r. 194, 1304 (1932). — L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. 111, 178—182 (1935).

Beweis für den Satz in der oben angegebenen Fassung stammt von K. OKA^{*)}. Weitere Beweise finden sich in Arbeiten von H. CARTAN, auf die hier Bezug genommen werde⁷⁾.

Von Wichtigkeit für die folgenden Abschnitte ist ferner der

Heftungssatz von OKA-CARTAN: Sei \mathfrak{P} ein analytisches Polyeder im R^{2n} ; ferner seien \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 kompakte Polyzylinder, deren Projektionen in den Ebenen der Variablen z_1, \dots, z_n alle bis auf eine übereinstimmen. Der Durchschnitt $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ sei nicht leer. Ist dann $\psi(z_1, \dots, z_n)$ eine in $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ reguläre eindeutige Funktion, so gibt es in $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ je eine reguläre eindeutige Funktion $\Psi_1(z_1, \dots, z_n)$ bzw. $\Psi_2(z_1, \dots, z_n)$, derart, daß in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ gilt

$$\psi(z_1, \dots, z_n) = \Psi_1(z_1, \dots, z_n) - \Psi_2(z_1, \dots, z_n).$$

Zum Beweise sei auf die erste der in ⁷⁾ zitierten Arbeiten von H. CARTAN (S. 188) verwiesen⁸⁾.

2. Ein Satz von K. Oka zum zweiten Cousinschen Problem. — Die Frage nach der Existenz analytischer Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ zu vorgegebenen Nullstellenflächen — zweites Cousinsches Problem genannt⁹⁾ — kann nach P. COUSIN wie folgt formuliert werden: Sei \mathfrak{G} ein Gebiet des R^{2n} . Jedem Punkte P von \mathfrak{G} sei eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und in $\mathfrak{U}(P)$ eine eindeutige reguläre Funktion f_P so zugeordnet, daß für jeden Punkt Q aus $\mathfrak{U}(P)$ der Quotient $\frac{f_P}{f_Q}$ im Durchschnitt $\mathfrak{U}(P) \cap \mathfrak{U}(Q)$ regulär bleibt und dort nicht verschwindet. (f_P und f_Q heißen in $\mathfrak{U}(P) \cap \mathfrak{U}(Q)$ äquivalent in bezug auf Division, kurz D -äquivalent). Gesucht wird eine in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$, die jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ mit f_P D -äquivalent ist, die mithin genau auf den durch das Verschwinden der f_P bestimmten analytischen Flächen in der gleichen Ordnung wie die f_P Null wird. Wir sprechen von einer Cousinschen Verteilung 2. Art V von regulären Ortsfunktionen in \mathfrak{G} ; die gesuchte Funktion f heiße eine zugehörige reguläre Lösungsfunktion. — Es ist wichtig, zu V auch Lösungsfunktionen $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ zu betrachten, von denen nur Stetigkeit, nicht aber Regularität in \mathfrak{G} verlangt wird. Zu einer solchen Funktion φ hat also jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ eine stetige nichtverschwindende Funktion $q_P(z_1, \dots, z_n)$ zu existieren, so daß in $\mathfrak{U}(P)$ $f_P = q_P \cdot \varphi$ gilt. (Wir nennen auch q_P mit f_P D -äquivalent).

Wir beweisen nun

Satz 1: Sei \mathfrak{P} ein analytisches Polyeder im R^{2n} und V eine in einer Umgebung von \mathfrak{P} gegebene Cousinsche Verteilung 2. Art von regulären Ortsfunktionen.

^{*)} K. OKA [I], Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, Ser. A, 6, Nr. 3, 245—255 (1936). — [II] Domaines d'holomorphie, Ser. A, 7, Nr. 2, 115—130 (1937), Beides in Journal of Science of the Hiroshima University.

⁷⁾ H. CARTAN, [I] Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. de l'Ecole Norm., 3. sér., 61, 149—197 (1944) (siehe insbesondere S. 185). — [II] Idéaux et modules de variables complexes, Bull. de la Soc. math. de France, 78, 29—64 (1950) (vgl. insbesondere S. 54: „Corollaire“).

⁸⁾ Wegen einer Neudarstellung der von H. CARTAN verwendeten Hilfsmittel vergleiche man auch CARTAN [II]. Für den Fall, daß die \mathfrak{P} definierenden Funktionen f_i Polynome sind, hat zuerst K. OKA einen Beweis gegeben; siehe ^{*)}, [II].

⁹⁾ P. COUSIN, Sur les fonctions de n variables complexes, Acta math. 19, 1—61 (1895). — Siehe auch: W. F. OSGOOD, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, S. 248 ff. (2. Aufl. 1929); und: H. BRENNKE u. K. STEIN, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen, Jber. d. Deutsch. Math. Vereinigg. 47, 177—192 (1937).

$\varphi(z_1, \dots, z_n)$ sei eine in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P} definierte, zu V gehörige eindeutige stetige Lösungsfunktion. Dann existiert in einer Umgebung von \mathfrak{P} eine eindeutige reguläre Lösungsfunktion $f(z_1, \dots, z_n)$, derart, daß der (nichtverschwindende) Quotient $\frac{f}{\varphi}$ in einer Umgebung von \mathfrak{P} einen eindeutigen Logarithmus besitzt. (Es sei von einem bestimmten Zweige des Logarithmus ausgegangen.)

Insbesondere ist zugelassen, daß die durch V bestimmten Lokalfunktionen keine Nullstellenflächen festlegen — etwa, wenn alle $f_P = 1$ sind; in diesem Falle darf φ irgendeine in einer Umgebung von \mathfrak{P} nichtverschwindende, eindeutige, stetige Funktion sein.

Zum Beweise benötigen wir

Hilfssatz 1: \mathfrak{P} , V , $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ mögen die in Satz 1 angegebenen Bedeutungen besitzen; $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ seien kompakte Polyzylinder, deren Projektionen in den Ebenen der Variablen z_1, \dots, z_n alle bis auf eine übereinstimmen. Der Durchschnitt $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ sei nicht leer. In $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$ existiere eine reguläre eindeutige Funktion $F_1(z_1, \dots, z_n)$, die in einer Nachbarschaft von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$ die Eigenschaften einer im Satz 1 gesuchten Lösungsfunktion hat; eine entsprechende Funktion in $\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ sei $F_2(z_1, \dots, z_n)$. Dann existiert auch in $(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \cap \mathfrak{P}$ eine reguläre eindeutige Funktion $F(z_1, \dots, z_n)$, die in einer Umgebung von $(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \cap \mathfrak{P}$ die Eigenschaften einer regulären Lösungsfunktion des Satzes 1 aufweist.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es in je einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ eindeutige, stetige, nichtverschwindende Funktionen $q_1(z_1, \dots, z_n)$ bzw. $q_2(z_1, \dots, z_n)$, derart, daß

$$F_1 = q_1 \cdot \varphi \quad \text{in einer Umgebung von } \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P},$$

$$F_2 = q_2 \cdot \varphi \quad \text{in einer Umgebung von } \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$$

gilt und daß

$$\chi_1(z_1, \dots, z_n) = \log q_1(z_1, \dots, z_n) \quad \text{bzw.} \quad \chi_2(z_1, \dots, z_n) = \log q_2(z_1, \dots, z_n)$$

jeweils dort eindeutig bleiben; hierbei sei von bestimmten Zweigen des Logarithmus ausgegangen. Die Differenz $\psi(z_1, \dots, z_n) = \chi_1 - \chi_2$ ist dann in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ eindeutig und stellt dort eine sogar reguläre Funktion dar, denn sie stimmt dort mit Zweigen von $\log \frac{F_1}{F_2}$ überein. Nach dem Heftungssatz von OKA-CARTAN gibt es in je einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ eindeutige reguläre Funktionen $\Psi_1(z_1, \dots, z_n)$ bzw. $\Psi_2(z_1, \dots, z_n)$ so daß in einer Nachbarschaft von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$ gilt: $\psi = \Psi_1 - \Psi_2$. Bilden wir nun

$$\psi_1(z_1, \dots, z_n) = \chi_1(z_1, \dots, z_n) - \Psi_1(z_1, \dots, z_n) \quad \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}),$$

$$\psi_2(z_1, \dots, z_n) = \chi_2(z_1, \dots, z_n) - \Psi_2(z_1, \dots, z_n) \quad \text{in } \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}),$$

so ist in $\mathfrak{U}(\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P})$

$$\psi_1 - \psi_2 = (\chi_1 - \Psi_1) - (\chi_2 - \Psi_2) = (\chi_1 - \chi_2) - (\Psi_1 - \Psi_2) = \psi - (\Psi_1 - \Psi_2) = 0.$$

Das bedeutet, daß ψ_1 und ψ_2 Zweige einer einzigen Funktion $\Psi(z_1, \dots, z_n)$ sind, die in $\mathfrak{U}(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P})$ eindeutig und stetig ist. Es sei nun gesetzt

$$q(z_1, \dots, z_n) = e^{\Psi(z_1, \dots, z_n)} \quad \text{und}$$

$$F(z_1, \dots, z_n) = q(z_1, \dots, z_n) \cdot \varphi(z_1, \dots, z_n).$$

Wir behaupten, daß F eine gesuchte Funktion darstellt. Jedenfalls ist F in einer Umgebung von $(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \cap \mathfrak{P}$ eindeutig. F ist dort aber auch regulär, denn es gilt in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{P}$, wie man leicht nachrechnet:

$$F = F_1 \cdot e^{-\varphi_1},$$

und entsprechend in einer Umgebung von $\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{P}$:

$$F = F_2 \cdot e^{-\varphi_2}.$$

Weiter ist q in einer Nachbarschaft von $(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \cap \mathfrak{P}$ stetig, eindeutig und von Null verschieden; jeder Zweig von $\log q$ ist bis auf ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ identisch mit φ , und diese Funktion ist in einer Umgebung von $(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2) \cap \mathfrak{P}$ eindeutig und stetig. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Nun zum Beweise von Satz 1! — Sei \mathfrak{P} ein \mathfrak{P} umfassender kompakter Polyzylinder, dessen Projektionen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sämtlich Quadrate sind. Wir unterteilen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ in Quadrate $\Omega_1^{(o)}, \dots, \Omega_n^{(r)}$ und machen die Teilung so fein, daß folgendes gilt: (1) Jeder nichtleere Durchschnitt

$$\mathfrak{D}_{\sigma, \dots, \tau} = (\Omega_1^{(o)} \times \dots \times \Omega_n^{(r)}) \cap \mathfrak{P}$$

wird von wenigstens einer Umgebung $\mathfrak{U}_{\sigma, \dots, \tau}$ des durch die Cousinsche Verteilung V bestimmten Umgebungssystems überdeckt. (2) Die in $\mathfrak{U}_{\sigma, \dots, \tau}$ gegebene reguläre Lokalfunktion $f_{\sigma, \dots, \tau}(z_1, \dots, z_n)$ ist in einer Umgebung von $\mathfrak{D}_{\sigma, \dots, \tau}$ jeweils D -äquivalent mit $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, derart, daß jeder Zweig von $\log \frac{f_{\sigma, \dots, \tau}}{\varphi}$ dort eindeutig bleibt. In Analogie zu dem beim Beweise der

Cousinschen Sätze benutzten Heftungsprozeß wird jetzt durch sukzessive Anwendung des Hilfssatzes 1 aus den $f_{\sigma, \dots, \tau}$ eine in \mathfrak{P} reguläre eindeutige Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ gewonnen, die in einer Umgebung von \mathfrak{P} die im Satz 1 angegebene Eigenschaft aufweist.

Nun folgt leicht der

Satz von OKA: Existiert zu einer in einem Regularitätsgebiet \mathfrak{G} des R^{2n} vorgegebenen Cousinschen Verteilung 2. Art V von regulären Ortsfunktionen eine eindeutige stetige Lösungsfunktion $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, so existiert auch eine eindeutige reguläre Lösungsfunktion in \mathfrak{G} ¹⁰⁾.

Zum Beweise werde \mathfrak{G} durch eine Folge analytischer Polyeder \mathfrak{P}_r mit $\mathfrak{P}_r \subset \mathfrak{P}_{r+1} \subset \mathfrak{G}$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{P}_r = \mathfrak{G}$ ausgeschöpft, wobei die definierenden Funktionen der \mathfrak{P}_r in \mathfrak{G} regulär und eindeutig seien. Nach Satz 1 existiert jeweils in einer Umgebung jedes \mathfrak{P}_r eine reguläre eindeutige Funktion f_r , die dort mit φ D -äquivalent ist, derart, daß jeder Zweig von $\log \frac{f_r}{\varphi}$ eindeutig bleibt. Wir bilden jeweils in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P}_r ,

$$d_r(z_1, \dots, z_n) = \log \frac{f_{r+1}}{f_r} = \log \frac{f_{r+1}}{\varphi} - \log \frac{f_r}{\varphi},$$

wo bestimmte Zweige des Logarithmus festgelegt seien. d_r ist in \mathfrak{P}_r regulär und eindeutig. Nach dem Approximationssatz von WEIL-OKA gibt es je eine in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktion $h_r(z_1, \dots, z_n)$, so daß in \mathfrak{P}_r

$$|d_r - h_r| < \frac{1}{2^r}$$

¹⁰⁾ Siehe die in ¹⁾ zitierte Arbeit. Der dort gegebene Beweis scheint noch nicht vollständig zu sein.

gilt. Das unendliche Produkt $f_1 \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left(\frac{f_v+1}{f_v} \cdot e^{-\lambda_v} \right)$ konvergiert in jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{G} nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern gleichmäßig; es stellt eine gesuchte reguläre eindeutige Lösungsfunktion in \mathfrak{G} dar.

3. Eigenschaften additiver und multiplikativer automorpher Funktionen. Sei \mathfrak{G} wieder irgendein Gebiet im R^{2n} . Es existiere eine analytische Funktion $A(z_1, \dots, z_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $A(z_1, \dots, z_n)$ läßt sich in \mathfrak{G} uneingeschränkt regulär fortsetzen.

(2) Bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges w in \mathfrak{G} verändert sich $A(z_1, \dots, z_n)$ additiv um eine Größe $a(z_1, \dots, z_n)$, die ihrerseits eine in \mathfrak{G} reguläre, eindeutige Funktion (eventuell eine Konstante) darstellt.

Eine solche Funktion $A(z_1, \dots, z_n)$ heiße eine in \mathfrak{G} reguläre additive automorphe Funktion — abgekürzt a. a. Funktion —; die $a(z_1, \dots, z_n)$ heißen (additive) Periodizitätsmoduln von $A(z_1, \dots, z_n)$.

Es ist leicht zu sehen, daß zu zwei stetig ineinander deformierbaren geschlossenen Wegen in \mathfrak{G} stets derselbe Periodizitätsmodul von $A(z_1, \dots, z_n)$ gehört^{10a}). Wird jedem geschlossenen Wege der zugehörige Periodizitätsmodul zugeordnet, so ist damit insbesondere ein Homomorphismus \mathfrak{h} der Fundamentalgruppe \mathfrak{F} von \mathfrak{G} in die additive Gruppe \mathfrak{A} der in \mathfrak{G} eindeutigen regulären Funktionen bestimmt; zur Bildung von \mathfrak{F} sei in \mathfrak{G} ein Punkt P_0 als Anfangs- und Endpunkt der geschlossenen Wege fest gewählt. \mathfrak{A} ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe; daher gehören zum Kern von \mathfrak{h} die Elemente endlicher Ordnung sowie die Kommutatorgruppe von \mathfrak{F} . Der Homomorphismus \mathfrak{h} legt also zugleich einen Homomorphismus \mathfrak{S} der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathfrak{G} ¹¹⁾ in \mathfrak{A} fest, und dieser Homomorphismus ist unabhängig von der speziellen Wahl von P_0 . Das bedeutet, daß die Periodizitätsmoduln von $A(z_1, \dots, z_n)$ nur von den Divisionshomologieklassen der geschlossenen Wege in \mathfrak{G} abhängen. Durch den Homomorphismus \mathfrak{S} wird das Mehrdeutigkeitsverhalten von $A(z_1, \dots, z_n)$ in \mathfrak{G} vollständig beschrieben.

Wir haben im folgenden auch reguläre multiplikative automorphe Funktionen in \mathfrak{G} zu betrachten. Unter einer solchen m. a. Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ wird eine in \mathfrak{G} uneingeschränkt regulär fortsetzbare Funktion verstanden, die bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges sich bis auf einen Faktor $m(z_1, \dots, z_n)$ reproduziert, der eine in \mathfrak{G} eindeutige reguläre nichtverschwindende Funktion darstellt. $m(z_1, \dots, z_n)$ heißt ein (multiplikativer) Periodizitätsmodul von $M(z_1, \dots, z_n)$. Ordnen wir wiederum den geschlossenen Wegen in \mathfrak{G} die zugehörigen Periodizitätsmoduln von $M(z_1, \dots, z_n)$ zu, so ist jetzt ein Homomorphismus der ersten Homologiegruppe H^1 von \mathfrak{G} in die multiplikative Gruppe \mathfrak{M} der in \mathfrak{G} eindeutigen regulären nichtverschwindenden Funktionen bestimmt. Es ist möglich, daß den Elementen endlicher Ordnung von H^1 von 1 verschiedene Elemente aus \mathfrak{M}

^{10a}) d. h. die gleiche Funktion $a(z_1, \dots, z_n)$.

¹¹) B^1 (oft auch 1. Bettische Gruppe mod 0 oder reduzierte 1. Bettische Gruppe genannt) ist die Gruppe der Divisionshomologieklassen der in \mathfrak{G} gelegenen endlichen, ganzzahligen, singulären, eindimensionalen Zyklen. — Zu den hier und im folgenden benutzten topologischen Begriffen und Sätzen vgl. das Lehrbuch der Topologie von H. SEIFERT u. W. THRELFALE, Leipzig und Berlin 1934; ferner: P. ALEXANDROFF-H. HOPF, Topologie I, Berlin 1935.

(d. h. von 1 verschiedene Einheitswurzeln) entsprechen. Wir werden es jedoch insbesondere mit solchen m. a. Funktionen zu tun haben, deren Periodizitätsmoduln wie bei den a. a. Funktionen nur von den Divisionshomologieklassen der geschlossenen Wege in \mathfrak{G} abhängen. Das Mehrdeutigkeitsverhalten dieser m. a. Funktionen wird also durch einen Homomorphismus von B^1 in \mathfrak{M} eindeutig gekennzeichnet.

In den folgenden Abschnitten gehen wir nun umgekehrt von Homomorphismen von B^1 in \mathfrak{A} bzw. von B^1 in \mathfrak{M} , aus und fragen, ob zu den so vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln additive bzw. multiplikative automorphe Funktionen gehören.

4. Additive automorphe Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln.

Satz 2: Sei \mathfrak{G} ein Regularitätsgebiet im R^n . Es sei ein Homomorphismus \mathfrak{H} der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathfrak{G} in die additive Gruppe der in \mathfrak{G} regulären eindeutigen Funktionen beliebig vorgegeben. Dann existiert in \mathfrak{G} eine zugehörige reguläre additive automorphe Funktion.

Wir benötigen den

Hilfssatz 2: Sei \mathfrak{K} ein endlicher N -dimensionaler simplizialer Komplex ($N \geq 1$) und $\gamma (B^1)$ ein ganzzahliger Charakter¹²⁾ der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathfrak{K} . Dann gibt es eine stetige Abbildung von \mathfrak{K} in die Kreislinie; derart, daß der Abbildungsgrad jedes ganzzahligen eindimensionalen Zyklus Z^1 aus \mathfrak{K} übereinstimmt mit der ganzen Zahl, die der Divisionshomologieklassse von Z^1 durch $\gamma (B^1)$ zugeordnet ist.

Zum Beweise dieser bekannten topologischen Aussage sei verwiesen auf P. ALEXANDROFF — H. HOPF, Topologie, Kap. XIII, § 3, S. 515 — 518, insbesondere Beweis zu Satz VI.

Beweis zu Satz 2: (1) Sei \mathfrak{P} irgendein in \mathfrak{G} enthaltenes analytisches Polyeder. Wir zeigen: Es gibt in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P} eine reguläre a. a. Funktion $A^*(z_1, \dots, z_n)$ mit den richtigen Periodizitätsmoduln. — Wir wählen ein abgeschlossenes Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}_0$, das \mathfrak{P} ganz in seinem Innern enthält, seinerseits in \mathfrak{G} enthalten ist und das eine endliche simpliziale Zerlegung gestattet. Die in $\bar{\mathfrak{G}}_0$ verlaufenden geschlossenen Wege bestimmen eine Untergruppe \bar{B}_0^1 von B^1 . Diese Gruppe \bar{B}_0^1 besitzt sicher eine endliche Basis; eine solche werde etwa festgelegt durch das System geschlossener Wege w_1, \dots, w_s in $\bar{\mathfrak{G}}_0$. Nach Hilfssatz 2 gibt es stetige Abbildungen T_1, \dots, T_s von $\bar{\mathfrak{G}}_0$ in die Kreislinie, so daß jeweils w_τ durch T_τ mit dem Grade 1, jedes w_τ mit $\tau \neq \sigma$ jedoch durch T_σ mit dem Grade 0 abgebildet wird^{12a)}. Als Kreislinie werde der Einheitskreis $|\zeta| = 1$ der komplexen ζ -Ebene gewählt; dann werden T_1, \dots, T_s gegeben durch in $\bar{\mathfrak{G}}_0$ definierte komplexwertige stetige Funktionen $\zeta = \varphi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \zeta = \varphi_s(z_1, \dots, z_n)$. Auf Grund von Satz 1 existieren s in \mathfrak{P} reguläre eindeutige nichtverschwindende Funktionen $f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, f_s(z_1, \dots, z_n)$, derart, daß jeweils $\log \frac{f_\sigma}{\varphi_\sigma}$ in einer Umgebung von \mathfrak{P} eindeutig

¹²⁾ Unter einem ganzzahligen Charakter einer Gruppe B wird ein Homomorphismus von B in die additive Gruppe der ganzen Zahlen verstanden. Entsprechend ist ein rationaler (bzw. zyklischer) Charakter von B erklärt als Homomorphismus von B in die additive Gruppe der rationalen Zahlen (bzw. in die additive Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1). Vgl. hierzu ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, Anhang I: Abelsche Gruppen, § 5.

^{12a)} T_1, \dots, T_s sind ferner so zu wählen, daß jeweils Wege innerhalb $\bar{\mathfrak{G}}_0$, die in \mathfrak{G} divisionshomolog sind, mit dem gleichen Grade abgebildet werden.

bleibt. Sind nun $a_{w_1}(z_1, \dots, z_n), \dots, a_{w_s}(z_1, \dots, z_n)$ die den Divisionshomologieklassen der w_1, \dots, w_s durch den gegebenen Homomorphismus \S zugeordneten regulären Funktionen in \mathcal{G} , so bilden wir

$$A^*(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} [a_{w_1}(z_1, \dots, z_n) \cdot \log f_1(z_1, \dots, z_n) + \dots + a_{w_s}(z_1, \dots, z_n) \cdot \log f_s(z_1, \dots, z_n)];$$

hierbei sei von bestimmten Zweigen des Logarithmus ausgegangen.

$A^*(z_1, \dots, z_n)$ ist eine gesuchte, in einer Umgebung von \mathfrak{P} reguläre a. a. Funktion.

(2) \mathcal{G} werde ausgeschöpft durch eine Folge analytischer Polyeder \mathfrak{P}_v , deren definierende Funktionen in \mathcal{G} regulär und eindeutig sind; es gelte $\mathfrak{P}_v \subseteq \mathfrak{P}_{v+1} \subseteq \mathcal{G}$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathfrak{P}_v = \mathcal{G}$. Zu jedem \mathfrak{P}_v gibt es nach (1) eine in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ reguläre a. a. Funktion $A_v(z_1, \dots, z_n)$ mit den vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln. Wir betrachten in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ die Differenz

$$D_v(z_1, \dots, z_n) = A_{v+1}(z_1, \dots, z_n) - A_v(z_1, \dots, z_n).$$

Dabei sei von einem System von „Anfangszweigen“ der A_v ausgegangen, die in einem bestimmten Punkte von \mathfrak{P}_1 beliebig, aber fest gewählt werden; D_v ist dann jeweils eine in \mathfrak{P}_v eindeutige reguläre Funktion. Nach dem Approximationssatz von WEIL-OKA gibt es in \mathcal{G} reguläre eindeutige Funktionen $H_v(z_1, \dots, z_n)$, so daß jeweils in \mathfrak{P}_v

$$|D_v - H_v| < \frac{1}{2^v}$$

gilt. Bilden wir nun

$$A_1 + \sum_{v=1}^{\infty} (D_v - H_v) = A_1 + \{(A_2 - A_1) - H_1\} + \dots + \{(A_{v+1} - A_v) - H_v\} + \dots,$$

so konvergiert diese Reihe in jedem \mathfrak{P}_v (nach Abtrennung der ersten v Glieder) gleichmäßig und stellt in \mathcal{G} eine gesuchte reguläre additive automorphe Funktion $A(z_1, \dots, z_n)$ dar.

5. Multiplikative automorphe Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur den Fall, daß die vorkommenden multiplikativen Periodizitätsmoduln eindeutige Logarithmen besitzen (nach Festlegung bestimmter Zweige des Logarithmus); diese Voraussetzung werde im folgenden nicht mehr ausdrücklich hervorgehoben. Zunächst wird bewiesen

Satz 3: Sei \mathcal{G} ein Regularitätsgebiet im R^{2n} und $M(z_1, \dots, z_n)$ eine in \mathcal{G} reguläre multiplikative automorphe Funktion. Dann gestattet $M(z_1, \dots, z_n)$ eine Zerlegung

$$M(z_1, \dots, z_n) = e^{A(z_1, \dots, z_n)} \cdot M^*(z_1, \dots, z_n),$$

worin $A(z_1, \dots, z_n)$ eine reguläre additive automorphe Funktion in \mathcal{G} bedeutet und $M^*(z_1, \dots, z_n)$ eine in \mathcal{G} reguläre multiplikative automorphe Funktion, deren sämtliche Periodizitätsmoduln Einheitswurzeln sind.

Besitzt $M(z_1, \dots, z_n)$ in \mathcal{G} keine Nullstellen, so ist $A(z_1, \dots, z_n) = \log M(z_1, \dots, z_n)$ (nach Festlegung eines Zweiges) eine dort reguläre a. a. Funktion und es gilt

$$M(z_1, \dots, z_n) = e^{A(z_1, \dots, z_n)}$$

Weist $M(z_1, \dots, z_n)$ aber Nullstellen auf, so wird wie folgt ein Homomorphismus der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathcal{G} in die additive Gruppe \mathfrak{A} der in \mathcal{G} eindeutigen regulären Funktionen festgelegt: Sei d_1, \dots, d_k, \dots eine Abzählung der Elemente von B^1 . Jedem d_k sind durch M Periodizitätsmoduln zugeordnet, die sich jeweils nur durch Einheitswurzeln als Faktoren unterscheiden. Ist $m_1(z_1, \dots, z_n)$ irgendeiner dieser zu d_1 gehörigen Periodizitätsmoduln, so bilden wir $a_1(z_1, \dots, z_n) = \log m_1(z_1, \dots, z_n)$ (es sei ein bestimmter Zweig des Logarithmus gewählt) und setzen die Zuordnung $d_1 \rightarrow a_1$ fest, wo a_1 als Element der Gruppe \mathfrak{A} betrachtet wird. Angenommen, es seien schon Zuordnungen $d_1 \rightarrow a_1, \dots, d_k \rightarrow a_k$ erklärt; dann ist zugleich ein Homomorphismus der durch d_1, \dots, d_k erzeugten Untergruppe B_k^1 von B^1 in \mathfrak{A} bestimmt. Gehört nun d_{k+1} oder ein Vielfaches von d_{k+1} zu B_k^1 , gilt also etwa

$$\alpha \cdot d_{k+1} = \alpha_1 \cdot d_1 + \dots + \alpha_k \cdot d_k, \quad (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ ganze Zahlen, } \alpha \neq 0)$$

so setzen wir als Zuordnung

$$d_{k+1} \rightarrow \frac{1}{\alpha} (\alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_k \cdot a_k)$$

fest. Sind dagegen d_1, \dots, d_k, d_{k+1} linear unabhängig, so sei $m_{k+1}(z_1, \dots, z_n)$ einer der d_{k+1} zugeordneten Periodizitätsmoduln und $a_{k+1}(z_1, \dots, z_n) = \log m_{k+1}(z_1, \dots, z_n)$, wo irgendein Zweig des Logarithmus gewählt sei; wir setzen sodann fest $d_{k+1} \rightarrow a_{k+1}$. Damit ist ein Homomorphismus von B^1 in \mathfrak{A} induktiv definiert. Nach Satz 2 gibt es eine in \mathcal{G} reguläre additive automorphe Funktion $A(z_1, \dots, z_n)$, deren Periodizitätsmoduln diesen Homomorphismus bewirken. Die Funktion $M^*(z_1, \dots, z_n) = M(z_1, \dots, z_n) e^{-A(z_1, \dots, z_n)}$ ist eine in \mathcal{G} reguläre m. a. Funktion mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln, und es ist wie verlangt

$$M(z_1, \dots, z_n) = e^{A(z_1, \dots, z_n)} \cdot M^*(z_1, \dots, z_n).$$

Diese Überlegung zeigt zugleich, daß zur Herstellung von m. a. Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln die Beschränkung auf den Fall genügt, daß alle Periodizitätsmoduln Einheitswurzeln sind. Solche Periodizitätsmoduln vorschreiben, heißt dann, einen Homomorphismus $\epsilon(H^1)$ der ersten Homologiegruppe H^1 des zu Grunde gelegten Gebietes \mathcal{G} in die Gruppe der Einheitswurzeln vorgeben. Es ist gelegentlich bequemer, an Stelle von $\epsilon(H^1)$ den zyklischen Charakter $\varrho_1(H^1)$ von H^1 zu betrachten, der sich ergibt, wenn die Einheitswurzeln $e^{2\pi i r}$ (r rational) ersetzt werden durch die modulo 1 reduzierten r ($0 \leq r < 1$). Im folgenden werde das Mehrdeutigkeitsverhalten von m. a. Funktionen mit Einheitswurzeln als Multiplikatoren stets auf diese Art durch zyklische Charaktere gekennzeichnet.

Wir wollen nun annehmen, daß die Periodizitätsmoduln nur von den Divisionshomologieklassen der geschlossenen Wege in \mathcal{G} abhängen sollen, daß sie also sogar einen zyklischen Charakter $\varrho_1(B^1)$ der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathcal{G} bestimmen. Unter dieser Voraussetzung können wir die Existenz regulärer m. a. Funktionen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln in Regularitätsgebieten des R^{2n} nachweisen.

Satz 4: Wird in einem Regularitätsgebiet \mathcal{G} des R^{2n} ein zyklischer Charakter der ersten Bettischen Gruppe B^1 von \mathcal{G} beliebig vorgegeben, so existiert stets eine in \mathcal{G} reguläre multiplikative automorphe Funktion mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln, die diesen Charakter bewirkt.

$\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{G}}, \bar{B}_0^1, w_1, \dots, w_s$ mögen die gleiche Bedeutung wie im Beweise zu Satz 2 haben. Wir weisen wiederum zunächst die Existenz einer Funktion mit den richtigen Periodizitätsmoduln in einer Umgebung von \mathfrak{P} nach. Der gegebene zyklische Charakter ordnet den Divisionshomologieklassen $[w_s]$ der w_s gewisse Restklassen rationaler Zahlen modulo 1 zu; diese Zuordnungen seien etwa durch

$$[w_s] \rightarrow r_1, \dots, [w_s] \rightarrow r_s \quad (0 \leq r_s < 1, s = 1, \dots, s)$$

gegeben. Hierdurch ist aber zugleich ein rationaler Charakter von \bar{B}_0^1 festgelegt, und dieser läßt sich nach bekannten Schlußweisen der Gruppentheorie zu einem rationalen Charakter $\varrho(B^1)$ der gesamten Gruppe B^1 erweitern. Nach Satz 2 gibt es zu $\varrho(B^1)$ eine in \mathfrak{G} reguläre additive automorphe Funktion $\tilde{A}(z_1, \dots, z_n)$. Die Funktion $\tilde{M}(z_1, \dots, z_n) = e^{2\pi i \cdot \tilde{A}(z_1, \dots, z_n)}$ ist dann eine in \mathfrak{G} reguläre multiplikative automorphe Funktion, die in $\bar{\mathfrak{G}}$ und damit in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ die richtigen Periodizitätsmoduln besitzt und in \mathfrak{G} nicht verschwindet.

Ist nun wieder $\{\mathfrak{P}_r\}$ eine \mathfrak{G} ausschöpfende Folge von analytischen Polyedern wie im Beweise zu Satz 2, so sei $M_r(z_1, \dots, z_n)$ eine in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_r)$ reguläre m. a. Funktion $\neq 0$ mit den richtigen Periodizitätsmoduln. Wir bilden jeweils in \mathfrak{P}_r :

$$Q_r(z_1, \dots, z_n) = \frac{M_r + 1(z_1, \dots, z_n)}{M_r(z_1, \dots, z_n)},$$

wo von gewissen „Anfangszweigen“ der M_r ausgegangen sei, die in einem bestimmten Punkte von \mathfrak{P}_1 beliebig, aber dann fest gewählt seien; Q_r ist in \mathfrak{P}_r regulär, eindeutig und $\neq 0$. Nach dem Approximationssatz von WEIL-OKA gibt es in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktionen $L_r(z_1, \dots, z_n)$, so daß jeweils in \mathfrak{P}_r gilt:

$$|Q_r \cdot L_r - 1| < \frac{1}{2^r}$$

Das unendliche Produkt

$$M_1 \cdot (Q_1 \cdot L_1) \cdot \dots \cdot (Q_r \cdot L_r) \cdot \dots$$

konvergiert dann (nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern) in jedem \mathfrak{P}_r gleichmäßig und stellt eine in \mathfrak{G} gesuchte reguläre m. a. Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ mit den vorgegebenen Periodizitätsmoduln dar.

Bemerkung: Aus dem vorstehenden Beweise ergibt sich, daß stets nicht-verschwindende reguläre m. a. Funktionen existieren, die in einem ganz im Innern von \mathfrak{G} gelegenen Teilgebiet die vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln besitzen. Dagegen kann die für das Gesamtgebiet \mathfrak{G} konstruierte Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ Nullstellen aufweisen, da die konvergenzerzeugenden Faktoren $L_r(z_1, \dots, z_n)$ in \mathfrak{G} verschwinden können.

6. R-konvexe Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten. — Wir wollen in diesem Abschnitt die Resultate der Abschnitte 4 und 5 von Regularitätsgebieten im \mathbb{R}^{2n} auf gewisse Gebiete in komplexen Mannigfaltigkeiten übertragen. Unter einer $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}^{2n} wird wie üblich eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Topologie verstanden, die mit lokalen Systemen komplexer Koordinaten (z'_1, \dots, z'_n) , $(z''_1, \dots, z''_n), \dots$ überdeckt ist, derart, daß die Transformationen beim Über-einandergreifen zweier solcher Systeme durch n reguläre Funktionen mit nicht-verschwindender Funktionaldeterminante vermittelt werden^{12b)}. Eine Funktion

^{12b)} Es wird ferner vorausgesetzt, daß \mathfrak{M}^{2n} eine abzählbare Basis besitzt.

$f(P)$ heißt in einer Punktmenge \mathcal{G} von \mathbb{M}^{2n} regulär, wenn sie es in jedem Punkte P von \mathcal{G} in bezug auf die dort gegebenen lokalen komplexen Koordinaten ist.

Definition: Ein Gebiet \mathcal{G} in einer komplexen Mannigfaltigkeit \mathbb{M}^{2n} heiße R -konvex, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. (Eigenschaft der Regularitätskonvexität): Zu jeder kompakten Teilmenge \mathcal{G}_0 von \mathcal{G} (in Zeichen $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$) gibt es eine \mathcal{G}_0 umfassende kompakte Teilmenge \mathcal{G}_1 von \mathcal{G} , derart, daß zu jedem Punkte P von \mathcal{G} , der nicht zu \mathcal{G}_1 gehört, eine in \mathcal{G} reguläre eindeutige Funktion f_P existiert, so daß

$$|f_P(P)| > \max |f_P(\mathcal{G}_0)|.$$

2. Zu je zwei verschiedenen Punkten P_1, P_2 von \mathcal{G} gibt es eine in \mathcal{G} reguläre eindeutige Funktion $f_{P_1 P_2}$, die in P_1 und P_2 verschiedene Werte annimmt.

3. Zu jedem Punkte Q von \mathcal{G} gibt es ein System von n in \mathcal{G} regulären eindeutigen Funktionen, deren Funktionaldeterminante (bezogen auf ein lokales Koordinatensystem) in Q von Null verschieden ist.

Es ist klar, daß jedes Regularitätsgebiet des R^{2n} R -konvex ist¹³⁾. Entsprechendes gilt für die dem R^{2n} nichtschlicht überlagerten Regularitätsgebiete, die von H. BEHNKE und dem Verfasser in einer kürzlich erschienenen Arbeit¹²⁾ als fast endlich-blättrig bezeichnet worden sind. Als weitere Beispiele R -konvexer Gebiete seien die direkten Produkte $3^{2n} = \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$ offener Riemannscher Flächen $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ erwähnt, ferner etwa die analytischen Polyeder \mathcal{P} in 3^{2n} (genauer die in \mathcal{P} enthaltenen maximalen Gebiete)¹⁴⁾.

Wir behaupten nun, daß die Sätze der Abschnitte 4 und 5 über die Existenz regulärer additiver automorpher, bzw. multiplikativer automorpher Funktionen auch für R -konvexe Gebiete \mathcal{G} in komplexen Mannigfaltigkeiten gelten¹⁵⁾.

Dies wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß die folgenden, in den Beweisen jener Sätze wesentlich benutzten Aussagen übertragen werden können:

a) Die Ausschöpfbarkeit des betrachteten Gebietes \mathcal{G} durch analytische Polyeder, deren definierende Funktionen in \mathcal{G} regulär und eindeutig sind (der Begriff des analytischen Polyeders sei in komplexen Mannigfaltigkeiten wie im R^{2n} definiert; vgl. Abschnitt 1); b) der Approximationssatz von WEIL-OKA; c) die Aussage von Satz 1 für den Fall, daß die in einer Umgebung des analytischen Polyeders \mathcal{P} vorgegebene stetige Funktion φ dort nicht verschwindet.

a) Der in Abschnitt 1 gegebene Nachweis für Regularitätsgebiete des R^{2n} ist wörtlich auf R -konvexe Gebiete zu übertragen.

b) Es genügt, die folgende Übertragung des Approximationssatzes von WEIL-OKA zur Verfügung zu haben: Sei \mathcal{G} ein R -konvexes Gebiet in einer komplexen Mannigfaltigkeit \mathbb{M}^{2n} und

$$\mathcal{P}: |f_\lambda| \leq K_\lambda \quad (K_\lambda > 0, \lambda = 1, \dots, l)$$

¹³⁾ Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche, *Annali di Mat. pura et appl.*, Ser. IV, 28, 317–326 (1949).

¹⁴⁾ Daß 3^{2n} und \mathcal{P} R -konvex sind, folgt leicht aus den Resultaten der in ³⁾ zitierten Arbeit.

¹⁵⁾ Für direkte Produkte 3^{2n} offener Riemannscher Flächen ist die Voraussetzung, daß die Periodizitätsmoduln der gesuchten m. a. Funktionen eindeutige Logarithmen besitzen sollen, entbehrlich. Vgl. K. STEIN, Primfunktionen und multiplikative automorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen und Zylindergebieten, *Acta math.* 83, 165–196 (1950).

ein in \mathfrak{G} enthaltenes analytisches Polyeder, dessen definierende Funktionen f_λ in \mathfrak{G} regulär und eindeutig seien. Dann ist jede in \mathfrak{P} reguläre eindeutige Funktion F gleichmäßig in \mathfrak{P} approximierbar durch Funktionen, die in \mathfrak{G} regulär und eindeutig sind.

\mathfrak{P} ist kompakt, also auch bikompakt. Daher gibt es wegen der Eigenschaft 2 der R -Konvexität endlich viele in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktionen g_1, \dots, g_k , so daß für jedes Punktepaar in \mathfrak{P} jeweils wenigstens eine dieser Funktionen verschiedene Werte annimmt. Außerdem läßt sich \mathfrak{P} mit gewissen Umgebungen $\mathfrak{U}(P_1), \dots, \mathfrak{U}(P_s)$ endlich vieler Punkte P_1, \dots, P_s überdecken, derart, daß folgendes gilt: Zu jedem $\mathfrak{U}(P_\sigma), \sigma = 1, \dots, s$, gehören n in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktionen $h_1^{(\sigma)}, \dots, h_n^{(\sigma)}$, deren Funktionaldeterminante (bezogen auf lokale Koordinatensysteme) in $\mathfrak{U}(P_\sigma)$ von Null verschieden ist. Wir bilden \mathfrak{P} durch die Transformation

$$(I) \quad \begin{cases} z_\lambda = f_\lambda, & \lambda = 1, \dots, l, \\ z_{l+\kappa} = g_\kappa, & \kappa = 1, \dots, k, \\ \zeta_v^{(\sigma)} = h_v^{(\sigma)}, & v = 1, \dots, n; \sigma = 1, \dots, s, \end{cases}$$

in den $2N$ -dimensionalen Raum R^{2N} , $N = l + k + s \cdot n$, der komplexen Variablen $z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}$ ab. Die Absolutbeträge der Funktionen g_κ und $h_v^{(\sigma)}$ sind in \mathfrak{P} beschränkt; sei etwa K eine gemeinsame Schranke. Dann liegt das durch (I) vermittelte Bild \mathfrak{F} von \mathfrak{P} ganz im Polyzylinder

$$\mathfrak{D}: \quad \begin{cases} |z_\lambda| \leq K_\lambda, & |z_{l+\kappa}| \leq K, & \lambda = 1, \dots, l; \quad \kappa = 1, \dots, k, \\ |\zeta_v^{(\sigma)}| \leq K, & & v = 1, \dots, n; \quad \sigma = 1, \dots, s, \end{cases}$$

und zwar ist \mathfrak{F} ein $2n$ -dimensionales irreduzibles, singularitätenfreies, analytisches Flächenstück, dessen Berandung auf dem Rande von \mathfrak{D} liegt. — Die in \mathfrak{P} vorgegebene Funktion F läßt sich als Funktion auf \mathfrak{F} auffassen und sei hier mit F^* bezeichnet. Zu jedem Punkt P von \mathfrak{F} gibt es eine $2N$ -dimensionale Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, in der jeweils eine reguläre Funktion $H_P(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)})$ existiert, die auf dem in $\mathfrak{U}(P)$ gelegenen Teil von \mathfrak{F} mit F^* übereinstimmt. Eine solche „Fortsetzung“ von F^* ist stets möglich. Denn jeder Punkt von \mathfrak{F} im Innern von \mathfrak{D} ist gewöhnlicher Punkt von \mathfrak{F} ; ferner läßt sich \mathfrak{F} über jeden auf dem Rande von \mathfrak{D} gelegenen Punkt P' ein Stück fortsetzen, derart, daß P' gewöhnlicher Punkt des so ergänzten Flächenstückes ist und daß F^* dort regulär bleibt. Nach einem Satze von H. CARTAN¹⁶⁾ gibt es nun eine im gesamten Polyzylinder \mathfrak{D} reguläre Funktion $H(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)})$, die auf \mathfrak{F} mit F^* übereinstimmt. H kann in einer Umgebung von \mathfrak{D} in eine Potenzreihe entwickelt werden, ist also gleichmäßig in \mathfrak{D} durch Polynome $G_\mu(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)})$ approximierbar:

$$H(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} G_\mu(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}).$$

Werden jetzt $z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}$ gemäß (I) durch die $f_\lambda, g_\kappa, h_v^{(\sigma)}$ ersetzt, so ergibt sich

$$H(f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k, h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(s)}) = F = \lim_{\mu \rightarrow \infty} G_\mu(f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k, h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(s)}),$$

¹⁶⁾ Vgl. die in *) zitierte Arbeit [II], Théorème 9, S. 51.

und damit ist F , wie verlangt, in \mathfrak{P} durch Funktionen gleichmäßig approximiert, die in \mathfrak{G} regulär und eindeutig sind.

c) Wir beweisen: Seien \mathfrak{G} und \mathfrak{P} die in b) angegebenen Punktmengen. In einer Umgebung von \mathfrak{P} sei eine stetige, eindeutige, nichtverschwindende Funktion φ vorgegeben. Dann existiert eine in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P} reguläre, eindeutige, nichtverschwindende Funktion f , so daß jeder Zweig von $\log \frac{f}{\varphi}$ dort eindeutig bleibt.

Es werde zunächst ein $\varepsilon > 0$ mit folgenden Eigenschaften festgelegt: 1) Die \mathfrak{P} umfassende Komponente der Punktmenge $|f_\lambda| \leq K_\lambda + \varepsilon$ ($\lambda = 1, \dots, l$) bildet ein analytisches Polyeder $\tilde{\mathfrak{P}}$ in \mathfrak{G} ; 2) $\tilde{\mathfrak{P}}$ enthält eine Umgebung von \mathfrak{P} und ist seinerseits im Definitionsbereich von φ enthalten. — Wir bestimmen für $\tilde{\mathfrak{P}}$ wie oben Funktionen $\tilde{g}_\kappa, \tilde{h}_\nu^{(\sigma)}$ ($\kappa = 1, \dots, k; \nu = 1, \dots, n; \sigma = 1, \dots, s$); eine gemeinsame Schranke ihrer Absolutbeträge sei \tilde{K} . Durch eine Transformation (I) (vgl. b)) wird nun $\tilde{\mathfrak{P}}$ auf ein analytisches Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}$ des R^{2N} der Variablen $z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}$ abgebildet; $\tilde{\mathfrak{F}}$ liegt singularitätenfrei im Polyzylinder

$$\tilde{\mathfrak{D}}: \begin{cases} |z_\lambda| \leq K_\lambda + \varepsilon, & |z_{l+\kappa}| \leq \tilde{K}, & \lambda = 1, \dots, l; & \kappa = 1, \dots, k, \\ |\zeta_\nu^{(\sigma)}| \leq \tilde{K}, & & \nu = 1, \dots, n; & \sigma = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Nach H. CARTAN¹⁷⁾ gibt es endlich viele in $\tilde{\mathfrak{D}}$ reguläre Funktionen

$$\Psi_1(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}), \dots, \Psi_t(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}),$$

so daß $\tilde{\mathfrak{F}}$ genau mit der gemeinsamen Nullstellenmannigfaltigkeit der Ψ_1, \dots, Ψ_t identisch ist. — Die in $\tilde{\mathfrak{P}}$ vorgegebene stetige Funktion φ wird als Funktion auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ betrachtet und heiße hier $\tilde{\varphi}$. Sie ist nach bekannten topologischen Sätzen in einer Umgebung $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{F}})$ von $\tilde{\mathfrak{F}}$ stetig zu einer Funktion $\tilde{\Phi}(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)})$ fortsetzbar, die in $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{F}})$ ebenfalls nicht verschwindet¹⁸⁾. Es gibt nun ein $\delta > 0$, derart, daß die Ψ_1, \dots, Ψ_t noch im Polyzylinder

$$\mathfrak{D}^*: \begin{cases} |z_\lambda| \leq K_\lambda + \varepsilon + \delta, & |z_{l+\kappa}| \leq \tilde{K} + \delta, & \lambda = 1, \dots, l; & \kappa = 1, \dots, k, \\ |\zeta_\nu^{(\sigma)}| \leq \tilde{K} + \delta, & & \nu = 1, \dots, n; & \sigma = 1, \dots, s, \end{cases}$$

regulär sind und daß das analytische Polyeder

$$\mathfrak{P}^*: \begin{cases} |z_\lambda| \leq K_\lambda + \varepsilon + \delta, & |z_{l+\kappa}| \leq \tilde{K} + \delta, & \lambda = 1, \dots, l; & \kappa = 1, \dots, k, \\ |\zeta_\nu^{(\sigma)}| \leq \tilde{K} + \delta, & & \nu = 1, \dots, n; & \sigma = 1, \dots, s, \\ |\Psi_\tau| \leq \delta, & & \tau = 1, \dots, t \end{cases}$$

in $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{F}})$ enthalten ist. Nach dem für analytische Polyeder des R^{2N} geltenden Satz 1 gibt es in \mathfrak{P}^* eine dort reguläre eindeutige Funktion $\tilde{F}(z_1, \dots, z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)})$, derart, daß in \mathfrak{P}^* jeder Zweig von $\log \frac{\tilde{F}}{\tilde{\Phi}}$ eindeutig und stetig ist. Betrachten wir \tilde{F} nur auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, setzen wir also an Stelle der Variablen $z_1, \dots,$

¹⁷⁾ Siehe CARTAN [II], Théorème 7, S. 51.

¹⁸⁾ Siehe etwa ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, S. 73, Satz VIII (anzuwenden auf Real- und Imaginärteil von φ).

$z_{l+k}, \zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}$ wieder die $f_\lambda, \tilde{g}_\mu, \tilde{h}_\nu^{(s)}$ ein, so erhalten wir mit

$$f = \tilde{F}(f_1, \dots, f_l, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k, \tilde{h}_1^{(1)}, \dots, \tilde{h}_n^{(s)})$$

in $\tilde{\mathfrak{P}}$, und damit in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P} , eine gesuchte reguläre Funktion.

Mit Hilfe der Aussagen a), b), c) können nun die in den Abschnitten 4 und 5 gegebenen Beweise vollständig übertragen werden, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei angemerkt, daß in der Übertragung des Satzes 2 insbesondere die Aussage über die Existenz von Integralen 1. Gattung zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln auf offenen Riemannschen Flächen enthalten ist¹⁹⁾.

7. Multiplikative automorphe Funktionen zur vorgegebenen Nullstellenflächen.

Wir beschränken uns im folgenden wieder auf Punktmengen im R^{2n} . Sei \mathfrak{G} ein Regularitätsgebiet. In \mathfrak{G} sei eine Cousinsche Verteilung 2. Art V von regulären Ortsfunktionen vorgegeben; V legt in \mathfrak{G} eine Menge \mathfrak{R} von mit Orientierung und Ordnungen versehenen Nullstellenflächen fest. Damit zu V in jedem ganz im Innern von \mathfrak{G} gelegenen Teilgebiet eine eindeutige stetige Lösungsfunktion existiert — und damit nach K. OKA auch eine reguläre — ist notwendig und hinreichend, daß die Schnitzzahlen von \mathfrak{R} mit den zweidimensionalen Zyklen in \mathfrak{G} — sie seien als zu V gehörige charakteristische Schnitzzahlen bezeichnet — sämtlich verschwinden²⁰⁾. Wir wollen diese Bedingung als für V erfüllt voraussetzen. Dann braucht es, wie sich zeigen wird, im Gesamtgebiet \mathfrak{G} noch nicht notwendig eine eindeutige Lösungsfunktion zu geben. *Jedoch existiert zu V eine in \mathfrak{G} reguläre multiplikative automorphe Lösungsfunktion $M(z_1, \dots, z_n)$ mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln, die nur von den Divisionshomologieklassen der geschlossenen Wege in \mathfrak{G} abhängen.*

Um dies nachzuweisen, schöpfen wir wie früher \mathfrak{G} durch eine Folge in \mathfrak{G} enthaltener analytischer Polyeder \mathfrak{P}_ν mit $\mathfrak{P}_\nu \subseteq \mathfrak{P}_{\nu+1} \subseteq \mathfrak{G}$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{G}$ aus, so daß die definierenden Funktionen der \mathfrak{P}_ν in \mathfrak{G} regulär und eindeutig sind. Sei $f_\nu(z_1, \dots, z_n)$, $\nu = 1, 2, \dots$, eine in einer Nachbarschaft von \mathfrak{P}_ν reguläre, eindeutige, zu V gehörige Lösungsfunktion. Dann ist $\frac{f_{\nu+1}}{f_\nu}$ jeweils in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\nu)$ regulär und von Null verschieden. Wir betrachten in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\nu)$

$$g_\nu(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \log \frac{f_{\nu+1}(z_1, \dots, z_n)}{f_\nu(z_1, \dots, z_n)},$$

won von je einem bestimmten Zweige des Logarithmus ausgegangen sei; g_ν stellt in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\nu)$ eine reguläre additive automorphe Funktion mit lauter ganzzahligen Periodizitätsmoduln dar. Es werde nun zunächst angenommen, daß zu jedem ν eine in \mathfrak{G} reguläre a. a. Funktion $A_\nu(z_1, \dots, z_n)$ existiere, die in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\nu)$ die gleichen Periodizitätsmoduln wie g_ν aufweist. Unter dieser Voraussetzung läßt sich eine sogar eindeutige reguläre Lösungsfunktion zu V in \mathfrak{G} wie folgt gewinnen: Setzen wir

$$d_\nu(z_1, \dots, z_n) = g_\nu(z_1, \dots, z_n) - A_\nu(z_1, \dots, z_n),$$

¹⁹⁾ Siehe die in ²⁾ zitierte Arbeit, insbesondere Satz 10.

²⁰⁾ Siehe ¹⁾.

nachdem rechts bestimmte Zweige festgelegt sind, so ist d_v in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ eindeutig. Nach dem Approximationssatz von WEIL-OKA gibt es in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktionen $H_v(z_1, \dots, z_n)$, so daß jeweils in \mathfrak{P}_v :

$$|d_v - H_v| < \frac{1}{2^v}.$$

Das unendliche Produkt

$$f_1 \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_v + 1}{f_v} \cdot e^{-2\pi i(A_v + H_v)} \right\}$$

konvergiert dann in jedem \mathfrak{P}_v nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern gleichmäßig und stellt eine zu V gehörige reguläre eindeutige Lösungsfunktion in \mathfrak{G} dar.

Wir haben also zu fragen, ob stets a. a. Funktionen $A_v(z_1, \dots, z_n)$ wie angenommen existieren. Dies ist sicher dann nicht der Fall, wenn es in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ einen geschlossenen Weg gibt, dem ein von Null verschiedener Periodizitätsmodul von $g_v(z_1, \dots, z_n)$ entspricht und der in bezug auf \mathfrak{G} divisionshomolog Null ist. Ein solches Vorkommnis wird aber dadurch vermieden, daß die $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ zugeordnete Lösungsfunktion $f_v(z_1, \dots, z_n)$ von vornherein jeweils so gewählt wird, daß sie auch noch in einem $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_{\mu(v)})$ mit genügend großem $\mu(v) > v$ eine reguläre eindeutige Lösungsfunktion darstellt. Sei nun B^1 die erste Bettische Gruppe von \mathfrak{G} und \tilde{B}_v^1 diejenige Untergruppe von B^1 , die durch die Divisionshomologieklassen der in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ verlaufenden geschlossenen Wege bestimmt wird. g_v legt einen ganzzahligen Charakter $\gamma^{(v)}(\tilde{B}_v^1)$ von \tilde{B}_v^1 fest. Notwendig und nach Satz 2 auch hinreichend für die Existenz eines gesuchten A_v ist dann, daß sich $\gamma^{(v)}(\tilde{B}_v^1)$ zu einem ganzzahligen Charakter $\gamma^{(v)}(B^1)$ der gesamten Gruppe B^1 erweitern läßt. Das aber braucht nicht immer möglich zu sein. Jedoch läßt sich $\gamma^{(v)}(\tilde{B}_v^1)$ nach bekannten Schlußweisen der Gruppentheorie stets zu einem rationalen Charakter $\varrho^{(v)}(B^1)$ von B^1 erweitern. Demnach gibt es auf Grund von Satz 2 immer eine in \mathfrak{G} reguläre a. a. Funktion $A_v^*(z_1, \dots, z_n)$, deren Periodizitätsmoduln in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ zwar mit denen von g_v übereinstimmen, die aber darüber hinaus nichtganzzahlige rationale Periodizitätsmoduln aufweisen kann. Wie oben werden nun jeweils in $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_v)$ die dort eindeutigen Funktionen

$$d_v^*(z_1, \dots, z_n) = g_v(z_1, \dots, z_n) - A_v^*(z_1, \dots, z_n)$$

gebildet und in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Funktionen $H_v^*(z_1, \dots, z_n)$ so bestimmt, daß in \mathfrak{P}_v gilt:

$$|d_v^* - H_v^*| < \frac{1}{2^v}.$$

Betrachten wir nun

$$f_1 \cdot \prod_{v=1}^{\infty} e^{2\pi i(d_v^* - H_v^*)} = f_1 \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_v + 1}{f_v} \cdot e^{-2\pi i(A_v^* + H_v^*)} \right\}.$$

Das unendliche Produkt konvergiert in jedem \mathfrak{P}_v nach Abtrennung von je v Gliedern gleichmäßig. Die Darstellung rechts zeigt, daß es eine in \mathfrak{G} reguläre m. a. Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ liefert, wovon jeder Zweig mit den durch V gegebenen Ortsfunktionen D -äquivalent ist. (Es ist darauf zu achten, daß die richtigen Zweige der A_v^* eingesetzt werden; diese können jeweils aus einem

festen System von „Anfangszweigen“ durch gleichzeitige Fortsetzung gewonnen werden.) Das Mehrdeutigkeitsverhalten von M wird allein durch die A_1^* bestimmt; die Periodizitätsmoduln von M hängen daher nur von den Divisionshomologieklassen der geschlossenen Wege in \mathfrak{G} ab und sind sämtlich Einheitswurzeln. M ist also eine gesuchte Funktion.

Sei $\varrho_1(B^1)$ der durch die Periodizitätsmoduln von $M(z_1, \dots, z_n)$ festgelegte zyklische Charakter. Wir fragen, wie weit $\varrho_1(B^1)$ allein durch die vorgegebene Cousinsche Verteilung V bestimmt ist. — Hierzu werde irgendeine zweite reguläre m. a. Lösungsfunktion $M^*(z_1, \dots, z_n)$ mit lauter Einheitswurzeln als Multiplikatoren betrachtet; der zugehörige zyklische Charakter sei $\varrho_1^*(B^1)$. Der Quotient

$$\tilde{M}(z_1, \dots, z_n) = \frac{M(z_1, \dots, z_n)}{M^*(z_1, \dots, z_n)}$$

bleibt dann in \mathfrak{G} regulär und von Null verschieden und bestimmt den zyklischen Charakter $\tilde{\varrho}_1(B^1) = \varrho_1(B^1) - \varrho_1^*(B^1)$. Bilden wir nun

$$\tilde{A}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \log \tilde{M}(z_1, \dots, z_n),$$

so ist \tilde{A} eine reguläre a. a. Funktion in \mathfrak{G} , und der durch \tilde{A} festgelegte rationale Charakter $\tilde{\varrho}(B^1)$ hat die Eigenschaft, daß er durch Reduktion modulo 1 in den zyklischen Charakter $\tilde{\varrho}_1(B^1)$ übergeht. Das aber bedeutet, wenn B^1 keine freie abelsche Gruppe ist, daß $\tilde{\varrho}_1(B^1)$ von spezieller Struktur ist; denn in diesem Falle besitzt B^1 stets zyklische Charaktere, die nicht aus rationalen Charakteren durch Reduktion modulo 1 erhalten werden können. (Zum Beweise siehe Hilfssatz 3 im Abschnitt 9).

Wir wollen die folgenden Bezeichnungen einführen: Sei $C_1(B^1)$ die Gruppe der zyklischen Charaktere von B^1 , ferner $C_1^{(0)}(B^1)$ die Untergruppe derjenigen zyklischen Charaktere, die durch Reduktion modulo 1 aus rationalen Charakteren von B^1 hervorgehen. Dann können wir sagen: Die zu V in \mathfrak{G} existierenden regulären m. a. Lösungsfunktionen mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln bestimmen durch die zugehörigen zyklischen Charaktere genau eine Restklasse in C_1 modulo $C_1^{(0)}$. Jeder Cousinschen Verteilung 2. Art von regulären Ortsfunktionen in \mathfrak{G} , deren zugehörige charakteristische Schnittzahlen sämtlich verschwinden, ist so ein Element c der Restklassengruppe $\mathfrak{C} = C_1 - C_1^{(0)}$ eindeutig zugeordnet.

8. Ein Kriterium für die Existenz eindeutiger analytischer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenflächen.

Satz 5: Zu einer Cousinschen Verteilung 2. Art V von regulären Ortsfunktionen in einem Regularitätsgebiet \mathfrak{G} des R^{2n} existiert dann und nur dann eine in \mathfrak{G} reguläre eindeutige Lösungsfunktion, wenn

- 1) die zu V gehörigen charakteristischen Schnittzahlen sämtlich verschwinden,
- 2) unter der Voraussetzung 1, das V zugeordnete Element der Gruppe \mathfrak{C} das Nullelement ist²¹⁾.

²¹⁾ Der Satz läßt sich leicht auf fast-endlichblättrige Regularitätsgebiete \mathfrak{G} über dem R^m übertragen. (Siehe ¹⁹⁾ und ²⁾).

Daß die Bedingungen notwendig sind, ergibt sich unmittelbar aus den Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes. Sind andererseits diese Bedingungen erfüllt, so gibt es nach Abschnitt 7 eine reguläre m. a. Lösungsfunktion $M(z_1, \dots, z_n)$ in \mathfrak{G} mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln, derart, daß der durch M festgelegte zyklische Charakter $\varrho_1(B^1)$ durch Reduktion modulo 1 aus einem rationalen Charakter $\varrho(B^1)$ hervorgeht. Nach Satz 2 existiert in \mathfrak{G} eine reguläre a. a. Funktion $A(z_1, \dots, z_n)$, deren Periodizitätsmoduln durch $\varrho(B^1)$ gegeben werden. Bilden wir nun

$$f(z_1, \dots, z_n) = M(z_1, \dots, z_n) \cdot e^{-A(z_1, \dots, z_n)}$$

(wo rechts von bestimmten Zweigen ausgegangen wird), so stellt f eine eindeutige reguläre Lösungsfunktion zu V in \mathfrak{G} dar.

Die folgenden Bemerkungen mögen die Rolle der Bedingung 2) des Satzes beleuchten:

a) Ist die erste Bettische Gruppe B^1 von \mathfrak{G} frei, so besteht die Gruppe \mathfrak{C} nur aus dem Nullelement; in diesem Falle ist die Bedingung 2) trivialerweise erfüllt. Ist B^1 nicht frei, so enthält \mathfrak{C} überabzählbar viele Elemente. (Beweis im folgenden Abschnitt; siehe Hilfssatz 6.)

b) Die erste Bettische Gruppe eines (schlichten oder nichtschlichten) Gebietes über der Ebene einer komplexen Veränderlichen ist stets frei, ebenso die eines direkten Produktes solcher Gebiete²²⁾. Doch gibt es Regularitätsgebiete im R^{2n} ($n > 1$), deren erste Bettische Gruppe nicht frei ist. Ein Beispiel im R^4 erhält man wie folgt: Man nehme aus dem Dizylinder:

$$\mathfrak{D}: \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

die Punktmenge

$$\mathfrak{F}_\infty: \{z_2 = b_1 \cdot z_1^{\frac{1}{2}} + b_2 \cdot z_1^{\frac{1}{4}} + \dots + b_r \cdot z_1^{(\frac{1}{2})^r} + \dots, |z_1| < 1\}$$

heraus; dabei sei stets

$$z_1^{(\frac{1}{2})^{v-1}} = \left(z_1^{(\frac{1}{2})^v}\right)^2$$

Die komplexen Koeffizienten b_v seien so gewählt, daß $\sum_{v=1}^{\infty} |b_v| < 1$ und $b_v \neq 0$ für alle v gilt; darüber hinaus seien sie so festgelegt, daß die Restpunktmenge $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}_\infty$ ein einziges Gebiet \mathfrak{G} bildet. Bezeichnen wir die analytischen Flächenstücke

$$\{z_2 = b_1 \cdot z_1^{\frac{1}{2}} + \dots + b_v \cdot z_1^{(\frac{1}{2})^v}, |z_1| < 1\}$$

mit \mathfrak{F}_v und setzen wir $\mathfrak{G}_v = \mathfrak{D} - \mathfrak{F}_v$, so ist $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathfrak{G}_v = \mathfrak{G}$. Alle \mathfrak{G}_v sind Regularitätsgebiete, daher ist \mathfrak{G} ebenfalls ein Regularitätsgebiet²³⁾. Die erste Bettische Gruppe B^1 von \mathfrak{G} läßt sich, falls die $|b_v|$ genügend klein gewählt sind, durch abzählbar viele Erzeugende $t_1, t_2, \dots, t_r, \dots$, mit den Relationen

²²⁾ In direkten Produkten \mathfrak{G}^m offener Riemannscher Flächen läßt sich ein Cousinsches Problem 2. Art stets durch reguläre m. a. Funktionen $M(z_1, \dots, z_n)$ lösen, auch dann, wenn die charakteristischen Schnittzahlen nicht sämtlich verschwinden. Die Multiplikatoren sind dann reguläre eindeutige nichtverschwindende Funktionen $m(z_1, \dots, z_n)$ mit i. a. mehrdeutigen Logarithmen. Das Mehrdeutigkeitsverhalten von $\log m$ wird durch die charakteristischen Schnittzahlen bestimmt. Vgl. die in ¹⁸⁾ zitierte Arbeit.

²³⁾ Siehe H. BEHNKE u. K. STEIN, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, Math. Ann. 105, 204–216 (1938).

$t_1 = 2t_2, \dots, t_{s-1} = 2t_s, \dots$ geben; B^1 ist also isomorph zur additiven Gruppe der rationalen Zahlen von der Gestalt $\frac{q}{2^\mu}$ (q, μ ganz), und diese Gruppe ist nicht frei²⁴⁾.

In ähnlicher Weise können leicht weitere Beispiele von Regularitätsgebieten gewonnen werden, für die B^1 nicht frei ist. Es läßt sich zeigen, was hier nicht ausgeführt werden soll, daß stets Regularitätsgebiete im R^4 existieren, deren erste Bettische Gruppe eine beliebig vorgegebene abzählbare, torsionsfreie abelsche Gruppe ist.

c) Wird ein Element c der Gruppe \mathfrak{C} beliebig vorgegeben, so existieren stets Cousinsche Verteilungen 2. Art in \mathfrak{G} mit sämtlich verschwindenden charakteristischen Schnittzahlen, denen das Element c zugeordnet ist. Dies folgt leicht aus Satz 4 in Verbindung mit den Ausführungen des Abschnittes 7: Ist $\varrho_1(B^1)$ ein c repräsentierender zyklischer Charakter von B^1 , so gibt es nach Satz 4 eine reguläre m. a. Funktion $M(z_1, \dots, z_n)$ mit lauter Einheitswurzeln als Periodizitätsmoduln, die diesen Charakter bewirkt. Es ist möglich, die Nullstellen von M in \mathfrak{G} durch eine Cousinsche Verteilung 2. Art V von regulären Ortsfunktionen festzulegen. Die zu V gehörigen charakteristischen Schnittzahlen sind sämtlich Null, da in jedem ganz im Innern von \mathfrak{G} gelegenen Teilgebiet \mathfrak{G}^* eine eindeutige Lösungsfunktion gewonnen werden kann, indem die Mehrdeutigkeit von M durch Multiplikation mit einer geeigneten, in \mathfrak{G}^* nichtverschwindenden regulären m. a. Funktion kompensiert wird. (Vgl. die Bemerkung zum Beweise des Satzes 4.) Also hat V die verlangte Eigenschaft.

Ein konkretes Beispiel einer Cousinschen Verteilung 2. Art, die die erste Bedingung des Satzes 5 erfüllt, nicht aber die zweite, ist das folgende: Man schreibe in dem unter b) konstruierten Regularitätsgebiet \mathfrak{G} von den dort benutzten analytischen Flächen \mathfrak{F} , diejenigen mit ungeradem Index als Nullstellenflächen erster Ordnung vor, was sich durch eine geeignete Cousinsche Verteilung 2. Art V bewerkstelligen läßt. — Um zu zeigen, daß V die angegebene Eigenschaft hat, betrachten wir das Gebiet \mathfrak{G}' , welches aus \mathfrak{G} durch Herausnahme der $\mathfrak{F}_{2\mu-1}$, $\mu = 1, 2, \dots$, entsteht. Die erste Bettische Gruppe B^1 von \mathfrak{G}' ist durch Erzeugende $t_1, t_2, \dots, t_\mu, \dots; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2\mu-1}, \dots$ mit den Relationen

$$\begin{aligned} t_1 &= 2t_2 + \tau_1 \\ t_2 &= 2t_3 \\ &\dots \dots \dots \\ t_{2\mu-1} &= 2t_{2\mu} + \tau_{2\mu-1} \\ t_{2\mu} &= 2t_{2\mu+1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1)$$

zu beschreiben. Hierbei werden die $\tau_{2\mu-1}$ repräsentiert durch Zyklen in \mathfrak{G}' , die $\mathfrak{F}_{2\mu-1}$ jeweils in genügender Nähe von $\mathfrak{F}_{2\mu-1}$ einfach positiv umschlingen. Würde nun zu V eine eindeutige reguläre Lösungsfunktion $f(z_1, \dots, z_n)$ in \mathfrak{G} existieren, so bilden wir

²⁴⁾ Zur Konstruktion des angegebenen Beispiels vgl. L. PONTRJAGIN, Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, Math. Ann. 105, (1931), Anhang III: „Beispiel einer Kurve im R^3 , deren Komplementärraum eine beliebige abzählbare abelsche Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung als erste Bettische Gruppe hat“.

$$\tilde{A}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \log f(z_1, \dots, z_n).$$

\tilde{A} ist (nach Festlegung eines „Anfangszweiges“) eine in \mathcal{G} reguläre a. a. Funktion mit lauter ganzzahligen Periodizitätsmodulen, sie legt daher einen ganzzahligen Charakter γ (B^1) fest. Insbesondere ist

$$(2) \quad \gamma(\tau_{2\mu-1}) = 1 \quad \text{für alle } \mu.$$

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich formal

$$(3) \quad t_{2\mu} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-1} \cdot t_1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-1} \cdot \tau_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-3} \cdot \tau_3 + \dots + \frac{1}{2} \cdot \tau_{2\mu-1}\right].$$

Also

$$(4) \quad \gamma(t_{2\mu}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-1} \cdot \gamma(t_1) - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-1} \cdot \gamma(\tau_1) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \gamma(\tau_{2\mu-1})\right],$$

und damit wegen (2):

$$(5) \quad \gamma(t_{2\mu}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-1} \cdot \gamma(t_1) - \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu}\right].$$

$\gamma(t_1)$ und $\gamma(t_{2\mu})$ sind wohlbestimmte ganze Zahlen. Dem widerspricht aber, daß die rechte Seite in (5) für genügend großes μ sicher nicht ganzzahlig ist. Folglich kann f nicht existieren, und unsere Behauptung über V ist bewiesen.

9. Anhang. Hilfssätze über abelsche Gruppen²⁵⁾. Wir tragen hier die Beweise für die in den Abschnitten 7 und 8 benutzten Aussagen über abelsche Gruppen nach²⁶⁾.

Hilfssatz 3: Eine abzählbare abelsche Gruppe B ist dann und nur dann frei, wenn jeder zyklische Charakter von B aus einem rationalen Charakter durch Reduktion modulo 1 hervorgeht.

Die Notwendigkeit der Bedingung ist unmittelbar klar: Ein zyklischer Charakter ϱ_1 von B ordnet den Elementen x_1, \dots, x_n, \dots einer Basis von B gewisse Restklassen rationaler Zahlen modulo 1 zu; diese Zuordnungen seien durch

$$x_1 \rightarrow r_1, \dots, x_n \rightarrow r_n, \dots \quad (r_n \text{ rational})$$

gegeben. Hierdurch ist aber zugleich ein rationaler Charakter ϱ von B festgelegt, der bei Reduktion modulo 1 in ϱ_1 übergeht.

Um zu zeigen, daß die Bedingung auch hinreicht, benötigen wir zwei weitere Hilfssätze.

Hilfssatz 4: Eine abzählbare abelsche Gruppe B unendlichen Ranges ist frei, wenn jede Untergruppe endlichen Ranges von B frei ist²⁷⁾.

Beweis: B enthält sicher keine Elemente endlicher Ordnung außer dem Nullelement. Ist $\{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Elemente in B , so sei jeweils U_n die Untergruppe der mit y_1, \dots, y_n linear abhängigen Elemente. U_n ist nach Voraussetzung frei und vom Range n ,

²⁵⁾ Ich verdanke Herrn H. ULM zu diesem Abschnitt wertvolle Hinweise.

²⁶⁾ Vgl. hierzu ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, Anhang I: Abelsche Gruppen. — Zur Vereinfachung der Sprechweise werde verabredet, daß alle betrachteten Gruppen wenigstens zwei Elemente enthalten.

²⁷⁾ Vgl. hierzu sowie zum Beweise von Hilfssatz 5: L. PONTEJAGIN, Topological Groups, Princeton 1946, S. 168, Aussage E.

ferner ist für $n > 1$ jede Restklassengruppe $H_n = U_n - U_{n-1}$ eine freie zyklische Gruppe. Sei h_n ein Element in U_n , dessen Restklasse modulo U_{n-1} die Gruppe H_n erzeugt, und H_n die von h_n in U_n erzeugte Untergruppe; dann läßt sich U_n als direkte Summe $U_{n-1} + H_n$ darstellen. B ist daher direkte Summe der freien zyklischen Untergruppen $U_1 = H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$, also eine freie abelsche Gruppe.

Hilfssatz 5: *Sei B eine torsionsfreie abelsche Gruppe von endlichem Range $n > 0$. B sei nicht frei. Dann besitzt B überabzählbar viele verschiedene zyklische Charaktere.*

Wir legen in B eine aufsteigende Folge von Untergruppen B_v wie folgt induktiv fest: Sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein System linear unabhängiger Elemente in B und B_0 die von y_1, \dots, y_n erzeugte Untergruppe. Angenommen, B_v sei als eine alle B_μ ($0 \leq \mu \leq v$) umfassende, durch gewisse endlich viele Elemente erzeugte Untergruppe von B erklärt. Da B nicht frei ist, liegen in B außerhalb B_v weitere Elemente; wir wählen ein solches Element x_{v+1} aus. Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $m_{v+1} > 1$, so daß $m_{v+1} \cdot x_{v+1}$ zu B_v gehört, denn B hat den Rang n . Sei nun B_{v+1} die von den Erzeugenden von B_v und x_{v+1} erzeugte Untergruppe von B . Damit ist die Folge $\{B_v\}$ bestimmt, und diese Folge bricht nicht ab. — Die Vereinigung aller B_v ist eine Untergruppe \tilde{B} von B . Wir können die zyklischen Charaktere in \tilde{B} folgendermaßen festlegen: Den y_1, \dots, y_n werden irgendwelche rationalen Zahlen modulo 1 zugeordnet; damit ist ein zyklischer Charakter $\varrho_1(B_0)$ in B_0 bestimmt. Ist dieser schon auf B_v erweitert, so bestehen zur Festlegung der dem Element x_{v+1} zuzuordnenden rationalen Zahl modulo 1 genau $m_{v+1} > 1$ Möglichkeiten, und jede dieser Möglichkeiten führt zu einem zyklischen Charakter von B_{v+1} . Insgesamt ergeben sich so überabzählbar viele Möglichkeiten zur Erweiterung von $\varrho_1(B_0)$ zu einem zyklischen Charakter von \tilde{B} . Da sich jeder zyklische Charakter von \tilde{B} zu einem ebensolchen von B erweitern läßt, besitzt also auch B überabzählbar viele zyklische Charaktere.

Nun zurück zum Beweise von Hilfssatz 3! — B erfülle die angegebene Bedingung. Nach Hilfssatz 4 genügt es anzunehmen, daß B endlichen Rang n hat. B kann keine Elemente endlicher Ordnung außer dem Nullelement enthalten: Wäre x ein solches von der Ordnung $g > 1$, so legen wir in B einen zyklischen Charakter ϱ_1 dadurch fest, daß wir x die Restklasse von $\frac{1}{g}$ modulo 1 zuordnen und diese Zuordnung zu einem Homomorphismus von B in die Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1 erweitern; ϱ_1 geht dann nicht durch Reduktion modulo 1 aus einem rationalen Charakter hervor. — B besitzt nur abzählbar viele rationale Charaktere. Denn ein solcher Charakter läßt sich vorgeben, indem den Elementen eines festen Systems linear unabhängiger Elemente y_1, \dots, y_n von B rationale Zahlen zugeordnet werden, und das ist nur auf abzählbar viele Arten möglich. Demnach läßt B auch nur abzählbar viele zyklische Charaktere zu, und das bedeutet nach Hilfssatz 5, daß B frei sein muß. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Werden $C_1(B)$, $C_1^{(0)}(B)$, $\mathfrak{C}(B)$ in bezug auf eine vorgegebene abzählbare abelsche Gruppe B wie im Abschnitt 7 erklärt, so gilt

Hilfssatz 6: *Die Restklassengruppe $\mathfrak{C}(B) = C_1(B) - C_1^{(0)}(B)$ besteht genau dann allein aus dem Nullelement, wenn B frei ist. Falls B keine Elemente*

endlicher Ordnung außer dem Nullelement enthält und nicht frei ist, liegen in $\mathfrak{C}(B)$ überabzählbar viele Elemente.

Es braucht nur noch die zweite Behauptung nachgewiesen werden. Nach Hilfsatz 4 besitzt B eine Untergruppe U endlichen Ranges $n > 0$, die nicht frei ist. In $\mathfrak{C}(U)$ liegen sicher überabzählbar viele Elemente. Es gibt daher überabzählbar viele zyklische Charaktere von U , die verschiedene Restklassen in $C_1(U)$ modulo $C_1^{(0)}(U)$ repräsentieren. Alle diese Charaktere können zu zyklischen Charakteren von B erweitert werden und repräsentieren dann sämtlich verschiedene Restklassen in $C_1(B)$ modulo $C_1^{(0)}(B)$. Also enthält auch $\mathfrak{C}(B)$ überabzählbar viele Elemente.

(Eingegangen am 25. September 1950.)

Lagerung von Punkten auf der Kugel.

Von

WALTER HABICHT in Heidelberg
und B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Wir werden sagen, daß zwei Punkte sich „stören“, wenn ihre Entfernung kleiner ist als Eins. Wir fragen: wie groß muß eine Kugel­fläche sein, damit N Punkte darauf liegen können, ohne sich zu stören?

Unser erstes Ergebnis lautet:

I. Ist eine derartige Lagerung von N Punkten auf einer Kugel mit der Oberfläche Φ möglich und ist Δ die Fläche des gleichseitigen sphärischen Dreiecks mit geradlinigem Eckenabstand Eins, so gilt

$$(1) \quad \Phi \geq 2(N-2)\Delta.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nur in den Fällen $N = 3, 4, 6$ und 12 stehen. Die Punkte liegen dann in den Ecken eines eingeschriebenen regulären Dreiecks, Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders. In diesen Fällen ist die Kugel­fläche in $2(N-2)$ gleichseitige sphärische Dreiecke vom Flächeninhalt Δ zerlegt. In allen anderen Fällen ist die Kugel­fläche größer als $2(N-2)$ solche Dreiecke.

Dieses Resultat läßt sich mittels sphärischer Trigonometrie umformen in eine Abschätzung für den Kugelradius R :

$$(2) \quad R \geq \left(4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{N}{N-2} \frac{\pi}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieselbe untere Schranke für R hat schon FEJES TÓTH¹⁾ gefunden. Unsere Herleitung, die wir unabhängig von FEJES TÓTH gefunden haben, scheint uns dennoch einer Publikation wert zu sein, weil sie sich auf Sätze über Minmaleigenschaften von ebenen und sphärischen Polygonen stützt, die in einer nachfolgenden Arbeit von SCHÜTTE und v. D. WAERDEN²⁾ benutzt werden. Es handelt sich um die Extrema des Flächeninhalts eines Polygons, dessen Seiten gegebene Längen haben (§ 1 und § 2).

Die Ungleichung (2) ergibt, quadriert und nach absteigenden Potenzen von N entwickelt:

$$(3) \quad \Phi = 4\pi R^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} N + \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) + O(N^{-1}).$$

Andererseits kann man, wie wir in § 5 zeigen werden, eine Kugel­fläche konstruieren, auf der N Punkte tatsächlich ohne Störung Platz haben und für deren Flächeninhalt gilt

$$(4) \quad \Phi = \frac{\sqrt{3}}{2} N + O\left(N^{\frac{2}{3}}\right).$$

¹⁾ FEJES, L. Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf der Kugel­fläche liegenden Punktsystems. Jber. dtsch. Math.-Ver. 53, 66 (1943).

²⁾ Erscheint im selben Bande der Math. Annalen.

Die dichteste Lagerung von Punkten im Mindestabstand Eins auf einer großen Kugel hat also asymptotisch die Dichte $2/\sqrt{3}$, wie zu erwarten war.

Analog gilt für die Mindestzahl m der Kreise vom Radius Eins, die nötig sind, um eine Kugel vom Radius R zu überdecken:

$$(5) \quad m = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot 4\pi R^2 + O\left(R^{\frac{4}{3}}\right).$$

Die Konstruktion eines Punktsystems auf der Kugel, die zum Beweis von (4) führt, beruht darauf, daß die große Kugeloberfläche in kleinere Teilstücke zerlegt wird, die sich fast ohne Verzerrung auf Ebenenstücke abbilden lassen. In der Ebene nimmt man dann jeweils ein Dreiecksnetz und überträgt es rückwärts auf die Kugel. Analog für (5). Das wird in § 5 ausgeführt.

Die Beweisgedanken in § 3 und § 5 rühren vom ersten Verfasser her, die in § 1, § 2 und § 4 vom zweiten.

§ 1. Flächeninhalt eines Stangenvierecks.

Hält man in einem ebenen Stangenviereck $ABCD$, in dem die Seiten AB , BC und CD die Länge Eins haben und AD

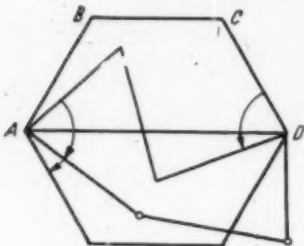


Fig. 1.

eine Länge größer oder gleich Eins, die Punkte A und D fest, während die übrigen Stangen beliebig gedreht werden können, so gibt es zwei symmetrische Lagen, in denen das Viereck ein gleichschenkeliges Trapez ist. Von der oberen symmetrischen Lage kann man, wie die Figur 1 zeigt, durch stetige Änderung zur unteren übergehen, sogar auf zwei Wegen: man kann nämlich B oder C nach innen drücken. In der Figur wurde C gewählt.

Wir rechnen den Flächeninhalt des Vierecks positiv, wenn $ABCD$ im Uhrzeigersinn herumläuft, sonst negativ. Überschneidet das Viereck sich selbst, so rechnen wir den im Uhrzeigersinn umfahrenden Teil positiv, den anderen negativ.

Wir behaupten nun:

II. *Außer den beiden symmetrischen Lagen gibt es kein Extremum des Flächeninhaltes F .*

Daraus folgt: Beim Übergang von der oberen symmetrischen Lage zur unteren nimmt der Flächeninhalt dauernd ab.

Es ist leicht, II durch Rechnung zu beweisen, aber das läßt sich schwer auf die Kugel übertragen. Wir geben daher lieber einen *mechanischen Beweis*.

Unter der inneren Normalen von AB (oder BC , usw.) verstehen wir diejenige Normale, die aus AB durch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn entsteht.

Wir denken uns nun auf alle vier Stangen einen konstanten Druck nach innen ausgeübt, d. h. auf jedes Längenelement dl eine Kraft pdl in der Richtung der inneren Normalen. Wir können etwa $p = 1$ annehmen, dann ist die Gesamtkraft auf jede Stange gleich ihrer Länge. Dieser Druck neigt offenbar dazu, die Fläche des Vierecks zu verkleinern, und zwar ist die bei einer Deformation geleistete Arbeit gleich der Verkleinerung des Flächeninhaltes F , wie man leicht nachrechnet.

Gesetzt nun, es gäbe außer den beiden symmetrischen Lagen noch ein Extremum des Flächeninhaltes, so würde das heißen, daß bei einer virtuellen (unendlich kleinen) Deformation die geleistete Arbeit Null ist. (Dabei ist es gleichgültig, ob man die Stange AD mit Gewalt festhält oder frei in der Ebene bewegen läßt, denn bei einer starren Bewegung des ganzen Vierecks ist die von dem Druck geleistete Arbeit sowieso Null.)

Wenn aber bei jeder virtuellen Deformation die geleistete Arbeit Null ist, und wenn das System zur Zeit $t = 0$ als ruhend in dieser Lage angenommen wird, so folgt aus den Bewegungsgleichungen, daß alle Beschleunigungen auch Null sind, und daraus folgt weiter, daß alle Kräfte sich im Gleichgewicht halten.

Betrachten wir nun die Kräfte, die auf eine Stange AB wirken! Die Druckkräfte können durch eine Resultante R ersetzt werden, die in der Mitte angreift, die Länge Eins hat und die Richtung der inneren Normale hat. Außerdem üben die benachbarten Stangen BC und DA in A und B Kräfte auf die Stange AB aus. Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewicht halten. Sie müssen also durch einen Punkt S gehen. Da S auf dem Mittellot von AB liegt, ist das Dreieck SAB gleichschenkelig, und die Winkel α und β bei A und B sind gleich. Also schließen die Gelenkkräfte bei A und B gleiche Winkel mit der Kraft R ein. Man erhält diese Kräfte K_A und K_B , indem man den Vektor $-R$ vom Punkt S aus abträgt und ihn in zwei Komponenten mit den Richtungen AS und BS zerlegt. Da die Winkel gleich sind, sind auch die Komponenten gleich:

$$K_A = K_B = K.$$

Weiter folgt

$$\sin \alpha = \sin \beta = \frac{R}{2K},$$

und da die Winkel α und β beide spitz sind, sind sie durch ihre Sinus eindeutig bestimmt.

Machen wir nun dasselbe mit der Stange BC , so erhalten wir wieder zwei gleiche Gelenkkräfte K' , und da Wirkung gleich Gegenwirkung ist, ist $K = K'$. Wegen $AB = BC$ ist weiter $R = R'$, also auch

$$\sin \beta' = \sin \gamma' = \frac{R'}{2K'} = \frac{R}{2K},$$

mithin

$$\alpha = \beta = \beta' = \gamma'.$$

Bei der dritten Stange ergeben sich wieder gleiche Winkel:

$$\gamma' = \gamma = \delta.$$

Nunmehr folgt

$$180^\circ - \beta - \beta' = 180^\circ - \gamma - \gamma',$$

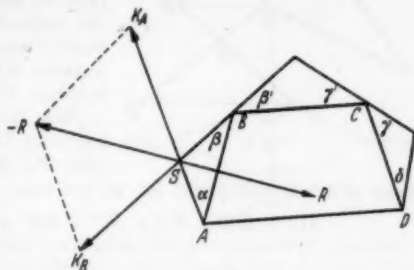


Fig. 2.

d. h. die Winkel bei B und C sind gleich. Somit ist das Viereck symmetrisch, was wir beweisen wollten.

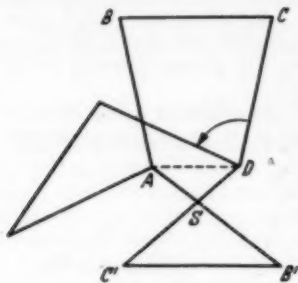


Fig. 3.

Ist $AD < 1$, so ist die Sache etwas komplizierter. Es gibt dann außer den 2 normalen symmetrischen Lagen zwei überkreuzte symmetrische Lagen: eine obere und eine untere. Die normale obere symmetrische Lage kann stetig in die überkreuzte untere übergehen (Fig. 3), und ebenso die überkreuzte obere in die normale untere. Die oberen symmetrischen Lagen sind die einzigen Maxima, die unteren die einzigen Minima des Flächeninhaltes. Der Beweis ist derselbe.

Wir bemerken noch, daß bei den überkreuzten Lagen sicher eine Diagonale AC' oder $B'D$ kleiner als Eins sein muß. Denn

wenn S der Schnittpunkt ist, so hat man

$$AC' + B'D < SA + SC' + SB' + SD = AB' + C'D = 2.$$

§ 2. Stangenvierecke auf der Kugel.

Genau so wie in der Ebene können wir auch auf der Kugel ein Viereck aus Großkreisbogen annehmen. Bei der mechanischen Betrachtung denken wir uns die vier Bogen als starre gebogene Stangen, die wir außerdem noch durch je zwei gerade Stangen mit dem Mittelpunkt verbunden denken. Die so entstehenden starren Sektoren werden im Mittelpunkt festgehalten, damit die Kreisbogen immer auf der Kugeloberfläche bleiben.

Wenn A und D festgehalten werden, gibt es wieder je eine oder zwei obere und untere symmetrische Lagen, zwischen denen stetige Übergänge möglich sind. Wir können wieder den Flächeninhalt F mit einem Vorzeichen versehen und behaupten:

III. *Außer den symmetrischen Lagen gibt es keine Extrema des Flächeninhaltes F .*

Zum Beweis lassen wir wieder auf jede der vier Stangen einen Druck $p = 1$ in Richtung der inneren Normalen (tangential zur Kugelfläche) wirken. Der Druck will die Fläche verringern, und die geleistete Arbeit ist gleich der Verringerung des Flächeninhaltes. Hat dieser einen Extremwert, so ist die Arbeit bei einer virtuellen Deformation Null, und die Kräfte halten sich an jeder Stange das Gleichgewicht.

Die Druckkräfte auf einer Stange haben alle dieselbe Richtung (nämlich senkrecht zur Ebene des Großkreises) und lassen sich daher zu einer Resultante R vereinigen, die im Schwerpunkt des Kreisbogens angreift. Außerdem wirken auf die Stange AB zwei Kräfte in den Enden A und B und eine Kraft im Mittelpunkt M . Diese vier Kräfte müssen sich im Gleichgewicht halten. Um das bequem geometrisch auszudrücken, bilden wir die Drehmomente der vier Kräfte in bezug auf M . Die im Mittelpunkt angreifende Kraft hat das Moment Null und interessiert uns weiter nicht. Die Momente der übrigen drei Kräfte, als Vektoren im Mittelpunkt M angebracht, müssen die Summe Null haben.

Jede Kraft in irgendeiner Ebene durch M kann durch eine an der Kugeloberfläche angreifende Tangentialkraft mit dem gleichen Moment ersetzt werden. In der Ebene liegt jeweils ein Großkreis, und der Angriffspunkt der Tangentialkraft kann längs des Großkreises verschoben werden, ohne daß das

Moment sich ändert. So können wir die auf AB wirkende Druckkraft durch eine im Mittelpunkt N des Bogens AB an-

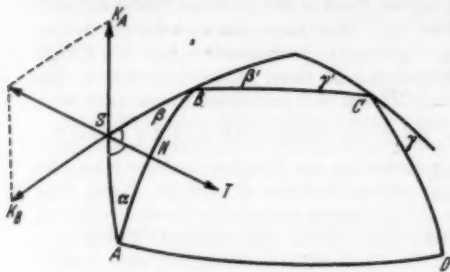


Fig. 4.

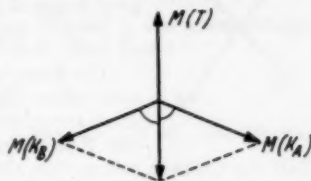


Fig. 5.

greifende nach der inneren Normalen gerichtete Tangentialkraft T ersetzen; ebenso können die in A und B angreifenden Reaktionskräfte K_A und K_B tangential zur Kugel angenommen werden und längs ihrer Großkreise verschoben werden (Fig. 4).

Die drei Momentenvektoren stehen senkrecht zu den drei Ebenen durch M und die drei Kräfte. Da die Momente sich aufheben, müssen die drei Momentenvektoren in einer Ebene liegen, also müssen die drei Ebenen durch eine Gerade MS gehen, also die drei Großkreise durch einen Punkt S . Wiederum ist $SA = SB$, also $\alpha = \beta$, und auch die Winkel NSA und NSB sind gleich, d. h. die Ebenen MSA und MSB machen gleiche Winkel mit der Ebene MSN der Kraft T . Daraus folgt, daß auch die Normalen jener Ebenen mit der Normalen zur Mittelebene gleiche Winkel einschließen, anders ausgedrückt: der Momentenvektor der Kraft T macht gleiche Winkel mit den Momentenvektoren der Kräfte K_A und K_B . Ein Blick auf die Ebene dieser drei Momentenvektoren $M(T)$, $M(K_A)$ und $M(K_B)$ (Fig. 5) lehrt nun, daß die beiden letzteren gleich lang sind und daß die Winkel durch das Längenverhältnis der Momentenvektoren eindeutig bestimmt sind. Geht man wieder zur Figur 4 zurück, so folgt, daß auch die Winkel α und β durch dasselbe Momentenverhältnis eindeutig bestimmt sind. Wie in § 2 folgt nun $\beta = \beta' = \gamma' = \gamma$, woraus die Gleichheit der Winkel bei B und C und die Symmetrie des Stangenvierecks folgt.

§ 3. Beweis des Satzes I.

Ein System von $N > 2$ Punkten auf der Kugel mit Abständen ≥ 1 sei gegeben. Je zwei Punkte, die einen Abstand 1 haben, mögen durch einen Großkreisbogen verbunden werden. Diese Bogen bilden mit den N Punkten einen Graph.

Wenn der Graph in zwei Teile zerfällt, die keinen Punkt gemeinsam haben, so kann man einen dieser Teilgraphen so lange verschieben, bis ein Punkt des einen Teiles sich einem Punkt des anderen Teiles bis zum Abstand 1 genähert hat. In diesem Augenblick kommt ein neuer Verbindungsbogen hinzu, der

den Zusammenhang der beiden Teile herstellt. Das Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis der Graph *zusammenhängend* geworden ist.

Wenn der Graph in zwei Teilgraphen zerfällt, die nur einen Punkt gemeinsam haben, so kann man den einen Teil um diesen Punkt so lange drehen, bis ein Punkt des einen Teiles sich einem Punkte des anderen Teiles bis zum Abstand 1 genähert hat. Man kann also annehmen, daß so etwas nicht mehr vorkommt. Insbesondere hat der Graph dann keine Endstrecken. Es kann nicht vorkommen, daß zwei Bögen AB und CD sich in S schneiden. Denn dann wäre

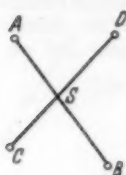


Fig. 6.

$$2 \leq AC + BD < SA + SC + SB + SD = AB + CD = 2.$$

Die Komplementärmenge des Graphen auf der Kugel ist eine offene Menge, die in Gebiete G zerfällt. Nach dem ALEXANDERSCHEN Dualitätssatz ist die erste BETTISCHE Zahl p_1 der Komplementärmenge gleich der nullten BETTISCHEN Zahl des Graphen minus Eins, also Null. Das heißt, alle Gebiete G sind einfach zusammenhängend³⁾. Der Rand eines Gebietes G ist also ein einziger geschlossener Polygonzug. Die Seiten gehören zum Graph, haben also alle die Länge 1.

Ein solches Gebiet G möge von n -Kreisbogen berandet werden. Es kann also in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt werden. Wir behaupten nun:

IV. Der Flächeninhalt von G ist mindestens $(n-2)$ mal der Flächeninhalt Δ eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks mit Seitenlänge 1.

Wenn IV einmal bewiesen ist, ist der Beweis des Hauptsatzes I sehr leicht. Aus IV folgt nämlich, daß die gesamte Kugelfläche mindestens

$$\Sigma (n-2) \Delta$$

beträgt, summiert über alle Polygonegebiete G . Die Zahl $\Sigma (n-2)$ kann aber aus der EULERSCHEN Polyederformel leicht berechnet werden. Jedes Polygon hat nämlich n Kanten und jede Kante kommt in 2 Polygonen vor; die Zahl der Kanten ist also

$$\frac{1}{2} \Sigma n.$$

Die Zahl der Flächen G ist $\Sigma 1$, die Zahl der Ecken N . Die EULERSCHE Polyederformel ergibt also

$$N - \frac{1}{2} \Sigma n + \Sigma 1 = 2$$

oder

$$2N - 4 = \Sigma n - 2 \Sigma 1$$

oder

$$\Sigma (n-2) = 2N - 4.$$

Die gesamte Kugelfläche ist also

$$(6) \quad \Phi \geq (2N - 4) \Delta,$$

womit I bewiesen ist.

³⁾ Das kann man auch leicht direkt einsehen, ohne den Dualitätssatz zu benutzen. Denn wenn W ein geschlossener Streckenzug im Gebiet G ist, so ist W der gemeinsame Rand von zwei komplementären Polygonegebieten auf der Kugel, A und B . Da der Graph zusammenhängend ist und W nicht trifft, muß er ganz zu A oder B gehören, sagen wir etwa zu A . Dann berandet W ein Gebiet B , das den Rand von G nicht trifft, also ganz in G enthalten ist. Also berandet jeder geschlossene Streckenzug in G ein Polygonegebiet, d. h. G ist einfach zusammenhängend.

Ist α der Winkel des Dreiecks Δ , so gilt

$$\Delta = R^2 (3\alpha - \pi)$$

$$\Phi = 4\pi R^2,$$

also ergibt (6)

$$2\pi \geq (N-2)(3\alpha - \pi)$$

oder

$$(7) \quad \alpha \leq \frac{N}{N-2} \frac{\pi}{3}.$$

Mit Hilfe der Cosinusregel kann man den Winkel α des gleichseitigen sphärischen Dreiecks durch die Seite a ausdrücken; man findet

$$(8) \quad \cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

Weiter kann man den Bogen a durch die Sehne, die $= 1$ ist, und den Radius R ausdrücken:

$$(9) \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^{-2}.$$

Mittels (8) und (9) formt man die Ungleichung (7) leicht um zu (2).

§ 4. Beweis des Hilfssatzes IV.

Beim Hilfssatz IV handelt es sich um ein Gebiet G auf der Kugel, begrenzt von einem n -Eck, dessen Seiten alle die Länge 1 haben, während die Abstände zwischen je zwei verschiedenen Ecken alle ≥ 1 sind.

Wir wollen den Satz durch vollständige Induktion nach n beweisen, müssen ihn aber vorher zum Zwecke der Induktion verallgemeinern. Wir müssen nämlich auch solche Gebiete mit heranziehen, die nicht schlicht sind, sondern sich selbst überschneiden, wie es in der Fig. 7 angegeben ist, und wir müssen auch die Voraussetzung über die Entfernungen der Ecken abschwächen.

Wir zeichnen die Figuren in der Ebene; der Beweis gilt genau so auf der Kugel. Wir können G in Dreiecke zerlegen, die wir uns etwa aus Papier ausgeschnitten und längs der gemeinsamen Seiten aneinander geklebt denken. So entsteht ein Komplex im Sinne der kombinatorischen Topologie. Der Rand ist ein einfaches geschlossenes Polygon. Dieser Komplex erscheint nun in bestimmter Weise über die Ebene (oder Kugel) ausgebreitet, wobei Teile der Ebene auch mehrfach überdeckt werden können und das Randpolygon in der Ebene nicht mehr einfach zu sein braucht. Die mehrfach überdeckten Teile werden aber nicht aufeinander geklebt, sondern bleiben als Blätter übereinander liegen.

In diesem Komplex können wir nun Streckenzüge betrachten, die aus geradlinigen Strecken bzw. Großkreisbogen in den einzelnen Dreiecken des Komplexes bestehen. Die Länge eines solchen Streckenzuges messen wir aber in der Ebene (bzw. auf der Kugel), und ein Streckenzug heißt geradlinig, wenn seine Spur in der Ebene geradlinig ist.



Fig. 7.

Wenn nun ein solcher geradliniger Streckenzug zwei Ecken des Polygons verbindet, so möge er eine *innere Diagonale* heißen. Sie sind zu unterscheiden von äußeren Diagonalen, die man zwar in der Ebene zeichnen kann, die aber aus dem Komplex heraustreten.

Wir legen nun unserem Komplex G die folgenden Bedingungen auf:

1. Alle Seiten sind Eins (bzw. auf der Kugel: Bogen mit Sehne 1).
2. Alle inneren Diagonalen sind ≥ 1 (bzw. auf der Kugel: größer oder gleich dem kleinsten Bogen mit Sehne 1).
3. Alle Winkel sind $\leq 2\pi$.

Unter diesen Bedingungen soll bewiesen werden, daß der Flächeninhalt $F \geq (n-2) \Delta$ ist, wo n die Seitenzahl und Δ die Fläche des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 ist.

Für $n = 3$ ist die Behauptung klar; F ist dann eben das gleichseitige Dreieck. Die Behauptung kann also für kleinere n als richtig angenommen werden.

Wenn eine innere Diagonale $= 1$ ist, so wird der Komplex durch diese innere Diagonale in zwei Teilkomplexe mit kleinerer Seitenzahl zerlegt, die wieder die Voraussetzungen 1., 2., 3. erfüllen. Sind h und k die Seitenzahlen dieser Teilkomplexe, so ist

$$n - 2 = (h - 2) + (k - 2)$$

und F ist die Summe der Flächeninhalte der Teilkomplexe, also

$$F \geq (h - 2) \Delta + (k - 2) \Delta = (n - 2) \Delta.$$

Damit ist dieser Fall erledigt.

Wenn ein Winkel $= 2\pi$ wird, so bedeutet das, daß eine freie Kante nach innen ragt, die auf dem Komplex doppelt zählt. In diesem Fall kann man, ohne den Flächeninhalt zu ändern, das freie Ende herumdrehen, bis eine innere Diagonale $= 1$ wird. Spätestens geschieht das dann, wenn das freie Ende sich einer unmittelbar benachbarten Ecke im Abstände 1 genähert hat, so daß ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Damit ist dieser Fall auf den schon erledigten zurückgeführt.

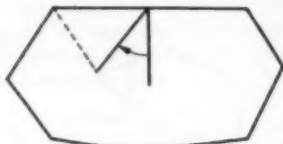


Fig. 8.

Nun möge also in 2. und 3. überall das Zeichen $>$ bzw. $<$ gelten. Wir wollen zeigen, daß dann der Flächeninhalt F immer verkleinert werden kann, ohne die Bedingungen 1., 2., 3. zu verletzen.

Es seien A, B, C, D vier im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgende Ecken. Sollten B und C zwei gleich große einspringende oder gestreckte Winkel sein:

$$B = C \geq 180^\circ,$$

so nehmen wir an Stelle von B und C zwei andere benachbarte Ecken. Den Ausnahmefall, daß *alle* Winkel untereinander gleich und $\geq 180^\circ$ sind, behandeln wir nachher gesondert.

Nun betrachten wir das Stangenviereck $ABCD$. Nach § 2 kann der Flächeninhalt dieses Stangenvierecks immer durch stetige Änderung der Winkel verkleinert werden, außer in dem einen Fall der „unteren symmetrischen Lage“, wo die Winkel B und C beide einspringend und beide gleich sind (Fig. 9). Die „überkreuzte untere Lage“ kann nicht vorkommen, da dann eine innere Diagonale (AC oder BD) kleiner als Eins ist.

Ein anderer Ausnahmefall entsteht, wenn die Winkel B und C beide gestreckt sind, da dann überhaupt keine stetige Änderung des Stangenpolygons möglich ist. Gerade diese beiden Ausnahmefälle haben wir aber eben angenommen. In allen anderen Fällen läßt sich also das Stangenviereck verkleinern.

Nun ist der Flächeninhalt des ganzen Komplexes $ABCDE \dots$ gleich der Summe des Flächeninhaltes des Vierecks $ABCD$ und des Restes $ADE \dots$, wenn beide mit dem richtigen Vorzeichen genommen werden, nämlich positiv, wenn das Polygon $ABCD$ oder $ADE \dots$ im Uhrzeigersinn herumläuft, negativ im anderen Fall.

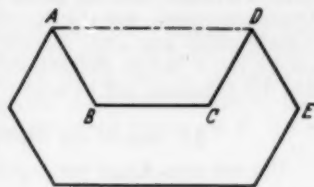


Fig. 9.

Wenn also der Flächeninhalt von $ABCD$ verkleinert werden kann, während A und D fest bleiben, so wird auch der gesamte Flächeninhalt F verkleinert. Dabei kann die Deformation immer auf einen so kleinen Betrag beschränkt werden, daß die Bedingungen 2. und 3. nicht verletzt werden.

Es ist klar, daß der Flächeninhalt F unter den Bedingungen 1., 2., 3. ein absolutes Minimum hat. Denn der Komplex ist durch seine Seiten und Winkel eindeutig bestimmt, alle Winkel sind beschränkt, und eine stetige Funktion hat auf einer abgeschlossenen Menge stets ein Minimum. Jede Fläche F ist größer oder gleich dem Minimum von F . Wenn beim Minimum eine innere Diagonale $= 1$ oder ein Winkel $= 2\pi$ ist, so sind wir nach dem Obigen schon fertig. Sind aber alle inneren Diagonalen > 1 und alle Winkel $< 2\pi$, so läßt F sich noch verkleinern, also haben wir dann noch nicht das Minimum, außer vielleicht in dem einen Ausnahmefall, wo das Randpolygon lauter gleiche auspringende oder gestreckte Winkel hat. Diesen Fall müssen wir jetzt noch erledigen.

Sind alle Winkel gestreckt, so ist der Rand ein Großkreis, und G ist das Innere eines Großkreises. Im Fall $n = 3$ liefert ein solcher Großkreis, in 3 Bogen mit Sehnen 1 eingeteilt, in der Tat das Minimum $F = \Delta = (n-2) \Delta$. Ist aber $n \geq 4$, so sind die Teilbogen des Großkreises je höchstens gleich einem Viertelkreis. Verbindet man nun alle diese Teilbogen mit dem Mittelpunkt, so erhält man n Dreiecke, von denen jedes mindestens gleich dem gleichseitigen Dreieck Δ ist, also findet man dann sogar

$$F \geq n \Delta.$$

Es bleibt der Fall, wo alle Winkel gleich und einspringend sind. Das Randpolygon von G ist dann ein reguläres Kreisbogenpolygon auf der Kugel, und G selbst ist das größere der zwei Gebiete, in die dieses Polygon die Kugeloberfläche zerlegt. Die Diagonalen eines solchen Polygons sind immer größer als die Seiten. Ersetzt man also G durch das Komplementärgebiet (das „Innere“ des Polygons), so wird G verkleinert, ohne die Bedingungen 1., 2., 3. zu verletzen, also kann G wieder nicht das Minimum sein.

Damit haben wir alle Fälle berücksichtigt und den Hilfssatz IV bewiesen.

Aus dem Beweis ergibt sich gleichzeitig, daß das Minimum $(n-2) \Delta$ nur dann angenommen werden kann, wenn das Gebiet G durch eine innere Diagonale in zwei Teilgebiete mit kleinerer Seitenzahl zerlegt werden kann, für die wieder das Gleichheitszeichen gilt. So weiterschließend findet man, daß G in diesem Fall aus lauter gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 aufgebaut ist.

In der Formel (1) kann also das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn die ganze Kugelfläche in lauter gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge 1 zerfällt. Verbindet man die Ecken dieser Dreiecke gradlinig, so erhält man ein Dreieckspolyeder, das der Kugelfläche einbeschrieben ist und in dem alle Kanten gleich lang sind. Solcher Polyeder gibt es aber nur vier, nämlich das Dieder mit 3 Ecken, das Tetraeder mit 4 Ecken, das Oktaeder mit 6 Ecken und das Ikosaeder mit 12 Ecken.

§ 5. Beweis der asymptotischen Formeln (4) und (5).

Um auf einer Kugel mit gegebenem, großem Radius R eine Lagerung von möglichst vielen Punkten im Mindestabstand 1 zu konstruieren, beschreiben wir zunächst um die Kugel einen Würfel und zerlegen jede der 6 Seiten des Würfels in k^2 gleiche Quadrate. Die Seite eines solchen Quadrates ist $2R/k$, der Radius seines Umkreises

$$(10) \quad \varrho = \frac{R}{k} \sqrt{2}.$$

Dabei sei k groß gegen 1, aber klein gegen R . Der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen Quadrates sei M .

Projizieren wir nun ein beliebiges der $6k^2$ Quadrate zentral vom Kugelmittelpunkt aus auf die Kugel, so entsteht ein sphärisches Viereck $A'B'C'D'$. Bei der Projektion werden alle Entfernungen verkleinert. Ist also M' die Projektion von M , und P' die Projektion eines beliebigen Punktes P im Quadrat oder auf dessen Rand, so ist

$$(11) \quad M'P' < MP \leq \varrho.$$

Das Viereck $A'B'C'D'$ ist also enthalten in einem Kreis mit Radius ϱ um M' .

Nun projizieren wir das sphärische Viereck $A'B'C'D'$ stereographisch vom Gegenpunkte von M' aus auf die Ebene des Kreises mit Radius ϱ , der das ganze Viereck umschließt. Die Abbildung ist konform. Das lineare Vergrößerungsverhältnis ist am Rande gleich 1 und nimmt nach der Mitte hin ab bis zum Minimum

$$1 - \frac{\varrho^2}{4R^2} = 1 - \frac{1}{2k^2}.$$

Daher werden alle Entfernungen durch die Projektion verkleinert.

Das Flächenvergrößerungsverhältnis ist das Quadrat des linearen Vergrößerungsverhältnisses. Ist also F' der Flächeninhalt von $A'B'C'D'$ und F der Flächeninhalt der Projektion $ABCD$, so ist

$$(12) \quad F = F' (1 - O(k^{-2})).$$

Nun überdecken wir die Ebene, in der das Viereck $ABCD$ liegt, mit einem Bienenwabennetz von regulären Sechsecken, deren Mittelpunkte alle den Mindestabstand 1 haben. Der Flächeninhalt eines solchen Sechsecks ist $\frac{1}{2} \sqrt{3}$.

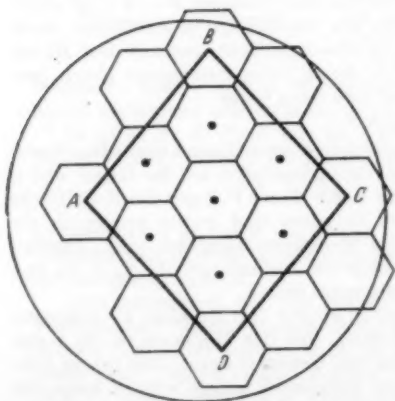


Fig. 10.

Die Anzahl der Sechsecke, die innerhalb $ABCD$ liegen, ist

$$(13) \quad n = \frac{2F}{\sqrt{3}} + O(\rho).$$

Das Korrekturglied $O(\rho)$ rührt vom Rand her. Der Umfang des Kreisbogenvierecks ist nämlich kleiner als der Umfang des Umkreises, also kleiner als $2\pi\rho$. Die Anzahl der Sechsecke, die den Rand treffen, ist also $O(\rho)$. Läßt man diese weg, so wird die Gesamtfläche der Sechsecke kleiner als F , nimmt man sie aber hinzu, so wird die Gesamtfläche größer als F . Daraus folgt (13).

Aus (12) und (13) folgt

$$n = \frac{2F'}{\sqrt{3}} - F' O(k^{-2}) + O(Rk^{-1})$$

oder, da F' kleiner als $4R^2k^{-2}$ ist,

$$(14) \quad n = \frac{2F'}{\sqrt{3}} - O(R^2k^{-4}) + O(Rk^{-1}).$$

Wir wählen nun die ganze Zahl k so, daß die beiden Korrekturglieder gleiche Größenordnungen haben:

$$k = R^{\frac{1}{3}} + \theta \quad (0 \leq \theta < 1).$$

Dann wird (14)

$$(15) \quad n = \frac{2F'}{\sqrt{3}} - O\left(R^{\frac{2}{3}}\right).$$

An dieser Formel ändert sich nichts, wenn als Mindestabstand der Punkte nicht 1, sondern δ gewählt wird, wo

$$\delta = 1 + O(R^{-2})$$

die Bogenlänge ist, die auf einem Kreis vom Radius R zu einer Sehne von der Länge 1 gehört.

Wenn nun die n Punkte, die voneinander alle den Mindestabstand δ , vom Rande aber den Mindestabstand $\frac{1}{2}\delta$ haben, auf die Kugel zurückprojiziert werden, so werden alle Abstände, auf der Kugel gemessen, größer als δ , da das Vergrößerungsverhältnis der inversen Abbildung > 1 ist. Ebenso werden die Abstände vom Rand $> \frac{1}{2}\delta$.

Das gilt für jedes der $6k^2$ Vierecke $A'B'C'D'$, in die die Kugelfläche zerlegt war. Somit erhalten wir insgesamt

$$N = \Sigma n = \frac{2}{\sqrt{3}} \Sigma F' - 6k^2 O\left(R^{\frac{2}{3}}\right)$$

oder

$$(16) \quad N = \frac{2}{\sqrt{3}} \Phi - O\left(R^{\frac{4}{3}}\right)$$

Punkte auf der Kugel, deren gegenseitige Abstände, auf der Kugel gemessen, größer als δ , und deren lineare Abstände daher sämtlich größer als Eins sind.

Genau so konstruiert man auch eine Überdeckung der Kugel mit Kreisen vom Radius Eins. Man muß nur das Bienenwabennetz so wählen, daß der Umkreisradius der Sechsecke 1 ist, und man muß diesmal stereographisch

auf die Tangentialebene im Punkt M projizieren, damit das Vergrößerungsverhältnis ≥ 1 wird. Das Ergebnis ist die Formel (5). Mit weniger als

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot 4\pi R^2 + O(1)$$

Kreisen kommt man nicht aus; das hat FEJES TÓTH⁴⁾ bewiesen.

Um die Formel (16) nach R aufzulösen, dividieren wir zunächst beide Seiten durch $\Phi = 4\pi R^2$:

$$\frac{N}{\Phi} = \frac{2}{\sqrt{3}} - O\left(R^{-\frac{2}{3}}\right)$$

und ersetzen im O -Glied R^{-2} durch N^{-1} , was erlaubt ist, da nach (3) $R^{-2} \leq cN^{-1}$ ist.

So erhalten wir

$$\frac{\Phi}{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right),$$

was mit (4) gleichbedeutend ist.

Die Vierecke, die in diesem Beweis benutzt wurden, geben natürlich nicht die schärfstmögliche Schätzung. Durch Benutzung von Zonen, durch äquidistante Parallelkreise begrenzt, und von einer Kegelprojektion anstelle der stereographischen, haben wir folgende Abschätzung erhalten:

$$(17) \quad 4R^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} N + \frac{3}{4} (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (\pi N)^{\frac{2}{3}} + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)$$

oder

$$4R^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} N + 3,871 N^{\frac{2}{3}} + c N^{\frac{1}{2}}.$$

Das letzte Glied ist numerisch nicht sehr groß, wir haben es nicht genau ausgewertet. In den numerischen Beispielen mit $N \leq 16$, die in der nachfolgenden Arbeit von SCHÜTTE und VAN DER WAERDEN behandelt werden, genügt ein viel kleinerer Koeffizient als 3,871.

⁴⁾ FEJES TÓTH, L.: Mat. Fiz. Lapok 50, 40 (1943).

(Eingegangen am 2. Oktober 1950.)

Die Potentiale einfacher und mehrfacher Flächenbelegungen.

Von
CLAUS MÜLLER in Bonn.

§ 1. Einleitung

Es stehe (x) und (ξ) zur Abkürzung für die kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und (ξ^1, ξ^2, ξ^3) des Raumes. F sei ein analytisches, orientierbares Flächenstück und σ eine auf F definierte Funktion. Bezeichnet $r_{x\xi}$ mit

$$(1) \quad r_{x\xi}^2 = (x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 + (x^3 - \xi^3)^2$$

den Abstand der Punkte (x) und (ξ) , so stellt

$$(2) \quad U_{(1)}(x) = \int_F \sigma(\xi) \cdot \frac{1}{r_{x\xi}} dF_\xi$$

in bekannter Weise das Potential der einfachen Belegung σ dar. Wird mit $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ die Ableitung in Normalenrichtung bezüglich der Koordinaten des Punktes (ξ) bezeichnet, so nennen wir

$$(3) \quad U_{(K)}(x) = \int_F \sigma(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \right)^{K-1} \frac{1}{r_{x\xi}} dF_\xi$$

das Potential einer K -fachen Belegung¹⁾.

Diese Potentiale sind in der Umgebung aller Punkte (x) analytisch, die nicht auf F liegen. Bei Annäherung von (x) an F können sie singulär werden, und beim Durchgang durch F erleiden sie gewisse Sprünge, die von LIAPOUNOFF und POINCARÉ zuerst untersucht wurden²⁾.

In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren entwickelt, die es gestatten, diese Sprungrelationen für die genannten Potentiale und ihre Ableitungen beliebig hoher Ordnung zu berechnen. Die Existenz der Grenzwerte der Ableitungen der Potentiale einfacher und doppelter Belegungen bei einseitiger Annäherung wurde bereits von E. SCHMIDT vollständig behandelt³⁾. Die dort benutzten Gedanken werden nun mit Hilfe differentialgeometrischer Begriffe so erweitert, daß die Sprungrelationen explizit angebar sind.

Als Korollar ergibt sich eine Reihe von Integralsätzen über Potentialfunktionen, die in dieser Form noch nicht bekannt zu sein scheinen.

§ 2. Die Koordinatensysteme.

Das Flächenstück F sei orientierbar und besitze die folgende Eigenschaft:

Zu jedem inneren Punkt P von F kann ein kartesisches Koordinatensystem x^i folgendermaßen gefunden werden:

¹⁾ Diese Bezeichnungsweise entspricht nicht der physikalischen Anschauung, wie das Beispiel der dreifachen Belegung zeigt, deren Potential physikalisch als von Quadrupolen erzeugt aufgefaßt werden muß.

²⁾ POINCARÉ, H.: *Théorie du Potentiel Newtonien*, S. 92 ff. 1899.

³⁾ SCHMIDT, E.: *Math. Ann.* 68, 107—118 (1910).

⁴⁾ SCHMIDT, E.: *Math. Abh. H. A. SCHWARZ* gewidmet, 1914, 365.

1. P ist Ursprung des Systems.
2. Es gibt ein $c > 0$ so, daß der im Inneren der Kugel

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq c$$

gelegene Teil von F in der Form $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$ dargestellt werden kann, wobei $\varphi(x^1, x^2)$ für $(x^1)^2 + (x^2)^2 < c$ analytisch ist.

3. Die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2}$ verschwinden im Ursprung. Dieses Koordinatensystem, das wir im folgenden kurz als x -System bezeichnen, kann geometrisch so gekennzeichnet werden, daß die (x^1, x^2) -Ebene Tangentialebene und die x^3 -Achse Normale in P ist. Die Richtungen der x^1 -Achse und der x^2 -Achse stimmen mit den Hauptkrümmungsrichtungen überein. Dieses System wird daher auch Tangenten-Normalen-System genannt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir noch folgende Abkürzungen zusammenstellen:

Die Ableitungen werden durch abgetrennte Indizes bezeichnet, z. B.

$$(1) \quad U_{;1} = \frac{\partial}{\partial x^1} U; \quad U_{|1|2} = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} U.$$

Durch das Zeichen \doteq wollen wir andeuten, daß es sich um eine Aussage an der Stelle $(0, 0, 0)$ — im Punkte P — handelt. So werden die unter (3) genannten Bedingungen für φ in der Form

$$(2) \quad \varphi_{;1} \doteq 0; \quad \varphi_{;2} \doteq 0; \quad \varphi_{|1|2} \doteq 0$$

geschrieben.

Weiterhin wollen wir festsetzen, daß griechische Indizes für 1, 2 und lateinische Indizes für 1, 2, 3 stehen. Im Rahmen tensorieller Formulierungen soll über gleiche „obere“ und „untere“ Indizes summiert werden, und zwar von 1 bis 2, wenn sie griechisch, und von 1 bis 3, wenn sie lateinisch geschrieben sind.

Bezeichnen wir mit e_i die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen und setzen

$$(3) \quad \varphi(x^1, x^2) e_3 + x^\mu e_\mu = \tilde{\Gamma}(x^1, x^2),$$

so wird

$$(4) \quad \tilde{\Gamma}_{;\mu} \doteq e_\mu; \quad \tilde{\Gamma}_{|1|2} \doteq \varphi_{|1|2} e_3 = 0.$$

Den Normalenvektor n können wir so festlegen, daß

$$(5) \quad n \doteq e_3$$

ist.

Wir wollen nun ein neues Koordinatensystem u^i durch

$$(6) \quad \tilde{\Gamma} = x^i e_i = \tilde{\Gamma}(u^1, u^2) + u^3 n(u^1, u^2)$$

einführen. Dann ist wegen (4) und (5)

$$(7) \quad \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \doteq \delta_k^i,$$

so daß das u -System in einer Umgebung von P umkehrbar eindeutig durch das x -System ausgedrückt werden kann.

Es ist mit den bekannten Bezeichnungen der Differentialgeometrie

$$(8) \quad n_{|\mu} = -L_\mu^\sigma \tilde{\Gamma}_{|\sigma},$$

so daß

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi_{,\mu} \cdot \xi_{,\nu} &= g_{\mu\nu} = (\tilde{f}_{1\mu} - u^3 L_{\mu}^{\sigma} \tilde{f}_{1\sigma}) (\tilde{f}_{1\nu} - u^3 L_{\nu}^{\sigma} \tilde{f}_{1\sigma}) \\ &= \gamma_{\mu\nu} - 2 u^3 L_{\mu\nu} + (u^3)^2 L_{\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu} \end{aligned}$$

wird, wobei

$$(10) \quad \gamma_{\mu\nu} = \tilde{f}_{1\mu} \cdot \tilde{f}_{1\nu}$$

gesetzt wurde. Weiterhin ist wegen (4)

$$(11) \quad \gamma_{\mu\nu} \doteq \delta_{\mu\nu}; \quad L_{11} \doteq 0,$$

so daß

$$(12) \quad L_{11} \doteq k_{(1)}; \quad L_{22} \doteq k_{(2)}$$

wird und $k_{(1)}$ und $k_{(2)}$ die Hauptkrümmungen in P sind.

Setzen wir

$$(13) \quad 2H = k_{(1)} + k_{(2)}; \quad T^{\mu\nu} = 2H \gamma^{\mu\nu} - L^{\mu\nu},$$

so ist

$$(14) \quad T^{12} \doteq 0; \quad T^{11} \doteq k_{(2)}; \quad T^{22} \doteq k_{(1)}.$$

Daraus folgt mit

$$(15) \quad K = k_{(1)} \cdot k_{(2)}$$

$$(16) \quad T_{\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu} \doteq K \delta_{\mu\nu} \doteq K \gamma_{\mu\nu}$$

und nach (13)

$$(17) \quad L_{\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu} = L_{\sigma\nu} (2H \delta_{\mu}^{\sigma} - T_{\mu}^{\sigma}) = 2H L_{\mu\nu} - L_{\sigma\nu} T_{\mu}^{\sigma}.$$

Nach (16) ergibt sich

$$(18) \quad L_{\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu} \doteq 2H L_{\mu\nu} - K \gamma_{\mu\nu}.$$

Nun stellen (16) und (18) Beziehungen zwischen Tensoren dar, die in P gelten. Der Punkt P ist auf der Fläche in keiner Weise ausgezeichnet, und es gibt nach Voraussetzung zu jedem Punkt von F ein Tangenten-Normalsystem und somit zu diesem Punkt ein u -System, in dem dort die Relationen (11) und (12) gelten. Wir können also (16) und (18) auch als Relationen zwischen Tensoren auffassen, die in einem bestimmten Koordinatensystem bewiesen wurden. Dann gelten sie aber allgemein, und wir erhalten

$$(19) \quad L_{\sigma\nu} T_{\mu}^{\sigma} = K \gamma_{\mu\nu}; \quad L_{\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu} = 2H L_{\mu\nu} - K \gamma_{\mu\nu}$$

sowie nach (9)

$$(20) \quad g_{\mu\nu} = (1 - (u^3)^2 K) \gamma_{\mu\nu} - 2u^3 (1 - u^3 H) L_{\mu\nu}.$$

Es ist weiterhin

$$(21) \quad \xi_{13} \cdot \xi_{13} = g_{33} = n^2 = 1; \quad \xi_{13} \xi_{1\mu} = g_{3\mu} = n \cdot \tilde{f}_{1\mu} = 0.$$

Setzen wir

$$(22) \quad g = \det |g_{ik}| = \det |g_{\mu\nu}|; \quad \gamma = \det |\gamma_{\mu\nu}|$$

und halten u^3 fest, so ist g/γ eine Invariante der Fläche. Wegen

$$(23) \quad g_{11} \doteq (1 - u^3 k_{(1)})^2; \quad g_{22} \doteq (1 - u^3 k_{(2)})^2; \quad g_{12} \doteq 0$$

ist

$$(24) \quad \frac{g}{\gamma} \doteq (1 - 2u^3 H + (u^3)^2 K)^2.$$

Auf Grund der Invarianteneigenschaft ist daher

$$(25) \quad g = (1 - 2u^3 H + (u^3)^2 K) \gamma.$$

§ 3. Einige Integralsätze.

Bevor wir die Rechnungen im u -System fortsetzen, wollen wir als Korollar eine Reihe von Integralrelationen beweisen. Wir setzen dazu $u^3 = \lambda$ und nehmen an, daß F analytisch und geschlossen ist. Die Normale weise ins Äußere des von F berandeten Gebietes. Dann können wir zu F durch

$$(1) \quad \xi = f(u^1, u^2) + \lambda n(u^1, u^2)$$

für $\lambda = \text{const}$ ein System von Parallelf lächen einführen, solange für alle Punkte von F

$$(2) \quad (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)^2 > 0$$

ist. Dies ist der Fall für

$$(3) \quad |\lambda| < m = \text{Min}_F \left(\frac{1}{k_{(1)}}, \frac{1}{k_{(2)}} \right)$$

Bezeichnen wir mit F_λ die Parallelf läche im Abstand λ , so ist nach (2, 25)

$$(4) \quad dF_\lambda = (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K) dF,$$

und es ergibt sich in diesen Koordinaten für das Volumenelement

$$(5) \quad dV = (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K) dF d\lambda.$$

Es seien nun $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ zwei reelle Zahlen mit $|\lambda_n| < m$ und U, W zwei Funktionen des Ortes, die in allen Punkten mit $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ stetig differenzierbar sind und für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ der Differentialgleichung

$$(6) \quad \Delta U = 0; \quad \Delta W = 0$$

genügen. Bezeichnen wir mit G_{λ_1, λ_2} die Menge der Punkte zwischen F_{λ_1} und F_{λ_2} , so ist

$$(7) \quad \int_{G_{\lambda_1, \lambda_2}} \nabla U \cdot \nabla W dV = \int_{F_\lambda} W \frac{\partial U}{\partial n} dF_\lambda + \int_{F_{\lambda_1}} W \frac{\partial U}{\partial n} dF_{\lambda_1}.$$

Eshängen U, W samt ihren Ableitungen analytisch von λ ab. Differenzieren wir daher nach λ und setzen nach der Differentiation $\lambda = 0$, so ergibt sich wegen (4)

$$(8) \quad \int_F \nabla U \cdot \nabla W dF = \int_F \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} + W \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial n} - 2H \cdot W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF.$$

Die Ableitungen nach λ sind gleich den Ableitungen in Normalenrichtung, die wir mit $\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnen. Wir erhalten daher

$$(9) \quad \int_F \left(\nabla U \cdot \nabla W - \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \frac{\partial W}{\partial n} \right) dF = \int_F W \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2H \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF.$$

Setzen wir

$$(10) \quad \nabla_F = \nabla - n \frac{\partial}{\partial n},$$

so wird aus (9)

$$(11) \quad \int_F \nabla_F U \cdot \nabla_F W dF = \int_F W \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2H \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF.$$

Durch Vertauschung von U und W folgt

$$(12) \quad \int_F W \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF = \int_F U \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial W}{\partial n} \right) dF.$$

Für $U = W$ ergibt sich

$$(13) \quad \int_F (\nabla_F U)^2 dF = \int_F U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF.$$

Nun ist $\nabla_F U$ ein von den Koordinaten der Fläche unabhängiger Vektor, und es ist in P

$$(14) \quad \nabla_F U \doteq U_{,1} e_1 + U_{,2} e_2.$$

Andererseits ist auch

$$(15) \quad \gamma^{\mu\nu} U_{, \nu} \hat{f}_{1\mu} \doteq U_{,1} e_1 + U_{,2} e_2$$

ein invarianter Vektor, so daß

$$(16) \quad \nabla_F U = \gamma^{\mu\nu} U_{, \nu} \hat{f}_{1\mu}$$

wird.

Aus (13) erhalten wir

Korollar 1: Die geschlossene analytische Fläche F sei Randfläche des regulären Gebietes*) G und U sei eine im abgeschlossenen Gebiet G^* harmonische Funktion, wobei G^* das Gebiet G echt enthält. Ist dann auf F

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

so ist U konstant.

Dann gibt es nämlich ein $c > 0$ so, daß die Parallellflächen mit $|\lambda| < c$ in G^* enthalten sind, und wir erhalten aus (13)

$$(17) \quad \nabla_F U = 0.$$

Dann folgt aber aus (16)

$$(18) \quad U_{,\mu} = 0,$$

woraus sich $U = \text{const}$ auf F ergibt. Dann ist U auch in G konstant und wegen des analytischen Verhaltens der harmonischen Funktionen auch in G^* . Setzen wir nach der Differentiation von (7) nicht $\lambda = 0$, so ergibt sich wegen

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial n}$$

$$(19) \quad \int_F \nabla U \nabla W dF_\lambda = \int_F \left(\frac{\partial W}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial n} + W \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right) dF_\lambda - 2 \int_F (H - \lambda K) W \frac{\partial U}{\partial n} dF,$$

wenn wir berücksichtigen, daß die Integration über F_λ als Integration über F mit

$$(20) \quad dF_\lambda = (1 - 2 \lambda H + \lambda^2 K) dF$$

aufgefaßt werden kann.

*) Es wird hier die Definition von O. D. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, 1929. S. 112—113 übernommen.

Durch Differentiation von (19) ergibt sich für $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \int_F \left[\nabla \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \nabla W + \nabla \frac{\partial W}{\partial n} \cdot \nabla U - 2 H \nabla U \cdot \nabla W \right] dF \\
 &= \int_F \left[W \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} W + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - 2 H \left(\frac{\partial W}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial n} + W \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right) \right] dF \\
 &= \int_F \left[2 H \left(\frac{\partial W}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial n} + W \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right) - 2 K W \frac{\partial U}{\partial n} \right] dF.
 \end{aligned}$$

Wegen (10) ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \int_F \left[\nabla_F \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \nabla_F W + \nabla_F \frac{\partial W}{\partial n} \cdot \nabla_F U - 2 H \nabla_F U \cdot \nabla_F W \right] dF \\
 &= \int_F \left[W \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 4 H \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + 2 K \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF + \int_F \frac{\partial W}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial U}{\partial n} \right) dF \right].
 \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von U und W erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \int_F \left[W \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 4 H \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + 2 K \frac{\partial U}{\partial n} \right) - U \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - 4 H \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + 2 K \frac{\partial W}{\partial n} \right) \right] dF \\
 &= \int_F \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \frac{\partial W}{\partial n} \right) dF.
 \end{aligned}$$

Diese Formel hätte sich auch durch Differentiation von

$$(24) \quad \int_{F_\lambda} \left(W \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial W}{\partial n} \right) dF_\lambda = \int_F \left(W \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial W}{\partial n} \right) (1 - 2 \lambda H + \lambda^2 K) dF$$

ergeben. Durch weitere Differentiation lassen sich Relationen der Form (23) für beliebig hohe Ableitungen herleiten.

Setzen wir in (7) $W = 1$, so ergibt sich

$$(25) \quad \int_{F_\lambda} \frac{\partial U}{\partial n} dF_\lambda = - \int_{F_\lambda} \frac{\partial U}{\partial n} dF_\lambda = \text{const},$$

wobei sich „const“ auf die Abhängigkeit von λ bezieht.

Durch Differentiation nach λ erhalten wir hieraus

Korollar 2: Die Funktion U sei in dem Parallelstreifen $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ der geschlossenen analytischen Fläche F harmonisch. Dann ist für alle $N \geq 2$

$$\int_F \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N - 2 H \binom{N-1}{1} \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^{N-1} + 2 K \binom{N-1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^{N-2} \right] U dF = 0.$$

§ 4. Der Δ -Operator im u -System.

Wir kehren nun zurück zur Berechnung der Fundamentalgrößen des u -Systems. Dort war (2, 20)

$$(1) \quad g_{\mu\nu} = (1 - (u^2)^2 K) \gamma_{\mu\nu} - 2 u^3 (1 - u^2 H) L_{\mu\nu}.$$

Es ist

$$(2) \quad g_{11} \doteq (1 - u^2 k_{(1)})^2; \quad g_{22} \doteq (1 - u^2 k_{(2)})^2; \quad g_{12} \doteq 0.$$

Bilden wir den Tensor

$$(3) \quad h^{\mu\nu} = (1 - (u^3)^2 K) \gamma^{\mu\nu} - 2 u^3 (1 - u^3 H) T^{\mu\nu},$$

so wird

$$(4) \quad h^{11} \doteq (1 - u^3 k_{(2)})^2; \quad h^{22} \doteq (1 - u^3 k_{(1)})^2; \quad h^{12} \doteq 0,$$

so daß

$$(5) \quad g_{\mu\epsilon} h^{\epsilon\nu} \doteq (1 - 2 u^3 H + (u^3)^2 K)^2 \delta_\mu^\nu$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$(6) \quad G = (1 - 2 u^3 H + (u^3)^2 K),$$

so ist also

$$(7) \quad \frac{1}{G^2} g_{\mu\epsilon} h^{\epsilon\nu} = \delta_\mu^\nu.$$

Definieren wir, wie üblich, g^{jk} durch

$$(8) \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k,$$

so wird

$$(9) \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{G^2} h^{\mu\nu}; \quad g^{3\mu} = 0; \quad g^{33} = 1.$$

Für den Operator

$$(10) \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2$$

liefert die Tensoranalysis

$$(11) \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Mit (2, 25) und (9) ergibt sich somit

$$(12) \quad \Delta = \frac{1}{G} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} G \sqrt{\gamma} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial u^3} G \frac{\partial}{\partial u^3},$$

und wir erhalten

Lemma 1: Ist U eine in einer Umgebung von P harmonische Funktion, so genügt sie der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{\gamma} \frac{h^{\mu\nu}}{G} \frac{\partial}{\partial u^\nu} U + \frac{\partial}{\partial u^3} G \frac{\partial}{\partial u^3} U = 0.$$

Für $|u^3| < m$ können wir

$$(13) \quad \frac{h^{\mu\nu}}{G} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u^3)^j}{j!} S_{(j)}^{\mu\nu}$$

in eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe nach u^3 entwickeln. Wegen⁵⁾

$$(14) \quad \frac{h^{11}}{G} \doteq \frac{1 - u^3 k_{(2)}}{1 - u^3 k_{(1)}}; \quad \frac{h^{22}}{G} \doteq \frac{1 - u^3 k_{(1)}}{1 - u^3 k_{(2)}}; \quad \frac{h^{12}}{G} \doteq 0$$

ist für $j \geq 1$

$$(15) \quad \frac{1}{j!} S_{(j)}^{11} \doteq (k_{(1)} - k_{(2)}) k_{(1)}^{j-1}; \quad \frac{1}{j!} S_{(j)}^{22} \doteq (k_{(2)} - k_{(1)}) k_{(2)}^{j-1}; \quad S_{(j)}^{12} = 0,$$

⁵⁾ Wir benutzen hier das Zeichen \doteq für eine Aussage auf der Geraden $u^\mu = 0$.

während

$$(16) \quad S_{(0)}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} \doteq \delta^{\mu\nu}$$

ist. Aus (15) folgt

$$(17) \quad \left(\frac{1}{j!}\right)^2 \det |S_{(j)}^{\mu\nu}| = - (k_{(1)} - k_{(2)})^2 K^{j-1}.$$

Wir führen die Invarianten

$$(18) \quad I_{(j)} = (k_{(1)})^j + (k_{(2)})^j$$

ein und bilden den Tensor

$$(19) \quad I_{(j)} \gamma^{\mu\nu} - I_{(j-1)} T^{\mu\nu}.$$

Es ist für $j \geq 1$

$$(20) \quad \begin{aligned} I_{(j)} \gamma^{11} - I_{(j-1)} T^{11} &\doteq (k_{(1)} - k_{(2)}) (k_{(1)})^{j-1} \\ I_{(j)} \gamma^{22} - I_{(j-1)} T^{22} &\doteq (k_{(2)} - k_{(1)}) (k_{(2)})^{j-1}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$(21) \quad \frac{1}{j!} S_{(j)}^{\mu\nu} = I_{(j)} \gamma^{\mu\nu} - I_{(j-1)} T^{\mu\nu},$$

so daß sich speziell

$$(22) \quad S_{(0)}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}; \quad S_{(1)}^{\mu\nu} = 2 H \gamma^{\mu\nu} - 2 T^{\mu\nu}$$

ergibt. Wir setzen nun

$$(23) \quad \Delta_{(j)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{\gamma} S_{(j)}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^\nu}$$

und bemerken, daß für alle positiv ganzzahligen $N \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right)^N = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N$ ist.

Dann ergibt sich aus Lemma 1 für $u^3 = 0$

$$(24) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - 2 H \frac{\partial}{\partial n}\right) U + \Delta_{(0)} U = 0,$$

wobei $\Delta_{(0)}$ mit dem BELTRAMI-Operator zweiter Ordnung identisch ist. Aus Lemma 1 erhalten wir durch Differentiation nach u^3

Lemma 2: Ist U eine in einer Umgebung von P harmonische Funktion, so genügen ihre Ableitungen den Rekursionsbeziehungen

$$0 = \left\{ \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Delta_{(N-j)} \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j + \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+2} - 2 H \binom{N+1}{1} \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1} + 2 K \binom{N+1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \right\} U.$$

Für $N = 1$ ergibt sich

$$(25) \quad \Delta_{(1)} U + \Delta_{(0)} \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - 4 H \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + 2 K \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

und in Verbindung mit (24)

$$(26) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = (8 H^2 - 2 K - \Delta_{(0)}) \frac{\partial U}{\partial n} - (4 H \Delta_{(0)} + \Delta_{(1)}) U.$$

Zur Vereinfachung dieses Rekursionsverfahrens führen wir zwei Systeme von Operatoren $\Omega_{(j)}^{(1)}$ und $\Omega_{(j)}^{(2)}$ ein, die beide der Rekursion

$$(27) \quad 0 = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Delta_{(N-j)} \Omega_{(j)}^{(\mu)} + \Omega_{(N+2)}^{(\mu)} - 2 H \binom{N+1}{1} \Omega_{(N+1)}^{(\mu)} + 2 K \binom{N+1}{2} \Omega_{(N)}^{(\mu)}$$

genügen und durch die Anfangsbedingungen

$$(28) \quad \begin{aligned} \Omega_{(0)}^{(1)} &= 1; \quad \Omega_{(1)}^{(1)} = 0 \\ \Omega_{(0)}^{(2)} &= 0; \quad \Omega_{(1)}^{(2)} = 1 \end{aligned}$$

unterschieden werden, wobei 1 für „Multiplikation mit Eins“ steht. Dann ist nach (27)

$$(29) \quad \begin{aligned} \Omega_{(2)}^{(1)} &= -\Delta_{(0)}; \quad \Omega_{(2)}^{(2)} = 2H \\ \Omega_{(3)}^{(1)} &= -4H \Delta_{(0)} - \Delta_{(1)}; \quad \Omega_{(3)}^{(2)} = 8H^2 - 2K - \Delta_{(0)}, \end{aligned}$$

und es folgt aus Lemma 2:

Lemma 3: Ist U eine in einer Umgebung von P harmonische Funktion, so gilt für ihre Ableitungen in Normalenrichtung

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N U = \Omega_{(N)}^{(1)} U + \Omega_{(N)}^{(2)} \frac{\partial U}{\partial n},$$

wobei die Operatoren $\Omega_{(N)}^{(\mu)}$ durch die Rekursion (27) und die Anfangsbedingungen (28) bestimmt sind.

§ 5. Die Sprungrelationen der Potentiale einfacher und doppelter Belegungen.

Es sei F ein analytisches, orientierbares Flächenstück, das in einer Umgebung des Punktes P durch die Parameter u^μ beschrieben wird. Die Belegung σ sei eine in der Umgebung von P analytische Funktion von u^μ .

Dann gibt es nach dem Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI eine Kugel \mathfrak{K}_c vom Radius c um P und eine Funktion Φ so, daß in \mathfrak{K}_c

$$(1) \quad \Delta \Phi = 0$$

und auf F_c , dem in \mathfrak{K}_c gelegenen Teil von F ,

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sigma; \quad \Phi = 0$$

ist.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist dann in P

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \Phi = \Omega_{(N)}^{(2)} \sigma.$$

Mit Hilfe der Funktion Φ können die Sprungrelationen der Potentiale einfacher Belegungen nach einem Gedanken von BRUNS und E. SCHMIDT⁴⁾ dargestellt werden. Wählen wir den Radius c der Kugel \mathfrak{K}_c klein genug, so wird \mathfrak{K}_c von F in zwei getrennte Teile zerlegt. Es sei \mathfrak{K}'_c eines der Teilgebiete, und die Normale auf F sei so gewählt, daß sie ins Äußere von \mathfrak{K}'_c weist. Es bezeichne F'_c die kugelförmige Randfläche von \mathfrak{K}'_c . Dann ist nach dem GREENSchen Satz

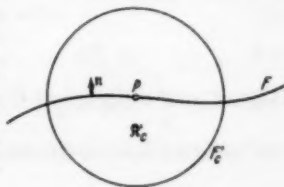


Fig. 1.

$$(4) \quad 4\pi \Phi(x) = \int_{F'_c + F''_c} \left(\frac{1}{r_{xz}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_z} - \Phi \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{1}{r_{xz}} \right) dF_z,$$

⁴⁾ SCHMIDT, E.: Math. Ann. 68, 107—118 (1910).

wobei (x) ein innerer Punkt von \mathfrak{R}'_c ist und die Integration über die Randflächen F_c und F'_c zu erstrecken ist. Liegt (x) außerhalb \mathfrak{R}'_c , so gilt statt (4)

$$(5) \quad 0 = \int_{F_c + F'_c} \left(\frac{1}{r_{x\xi}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_\xi} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{x\xi}} \right) dF_\xi.$$

Wir setzen nun

$$(6) \quad \int_F \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF = \int_{F_c} \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF + \int_{F - F_c} \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF.$$

Liegt (x) innerhalb \mathfrak{R}'_c , so folgt aus (2) und (4)

$$(7) \quad \int_F \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF = \int_{F - F_c} \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF - \int_{F'_c} \left(\frac{1}{r_{x\xi}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{x\xi}} \right) dF + 4\pi \Phi(x).$$

Hier sind die beiden Integrale der rechten Seite, als Funktionen von (x) betrachtet, in der Umgebung von P analytisch, so daß wir für (7)

$$(8) \quad \int_F \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF (=) 4\pi \Phi(x)$$

schreiben, wobei wir durch $(=)$ ausdrücken wollen, daß es sich um eine Übereinstimmung bis auf in der Umgebung von P analytische Funktionen handelt. Da (7) nur gilt, wenn (x) in \mathfrak{R}'_c liegt, erhalten wir mit (5)

$$(9) \quad \int_F \sigma \frac{1}{r_{x\xi}} dF (=) \begin{cases} 4\pi \Phi(x) & \text{für } (x) \text{ in } \mathfrak{R}'_c \\ 0 & \text{für } (x) \text{ außerhalb } \mathfrak{R}'_c. \end{cases}$$

In analoger Weise können wir nach dem Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI eine Funktion ψ so bestimmen, daß in \mathfrak{R}'_c

$$(10) \quad \Delta \psi = 0$$

und auf F_c

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0; \quad \psi = \sigma$$

ist. Dann ergibt sich

$$(12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \psi = \Omega_{(N)}^{(1)} \sigma$$

und

$$(13) \quad \int_F \sigma \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{r_{x\xi}} dF (=) \begin{cases} -4\pi \psi & \text{für } (x) \text{ in } \mathfrak{R}'_c \\ 0 & \text{für } (x) \text{ außerhalb } \mathfrak{R}'_c. \end{cases}$$

Wir benutzen nun die Abkürzungen

$$(14) \quad U_{(K)} = \int_F \sigma \frac{\partial^{K-1}}{\partial n_\xi^{K-1}} \frac{1}{r_{x\xi}} dF_\xi$$

und setzen

$$(15) \quad [U_{(K)}]_{i_1 \dots i_r} = \lim_{\substack{u^2 \rightarrow -0 \\ u^\mu = 0}} U_{(K)}|_{i_1 \dots i_r} - \lim_{\substack{u^2 \rightarrow +0 \\ u^\mu = 0}} U_{(K)}|_{i_1 \dots i_r}.$$

Wir bilden also die Ableitungen auf der Normalen und betrachten die Differenz ihrer Grenzwerte bei Annäherung von der negativen und positiven Seite her. Aus (9) und (12) entnehmen wir, daß diese Grenzwerte existieren und erhalten

$$(16) \quad \begin{aligned} [U_{(1)}]_{i_1 \dots i_r} &= 4 \pi \Phi_{i_1 \dots i_r} \\ [U_{(2)}]_{i_1 \dots i_r} &= -4 \pi \psi_{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse sind die Sprungrelationen der Ableitungen in Normalenrichtung. So wird

$$(17) \quad [U_{(1)}]_{j \text{ mal } i_3 \dots i_3} = 4 \pi \Omega_{(j)}^{(2)} \sigma$$

und entsprechend

$$(18) \quad [U_{(2)}]_{j \text{ mal } i_3 \dots i_3} = -4 \pi \Omega_{(j)}^{(1)} \sigma,$$

so daß wir, wenn die Ableitungen im u -System ausgedrückt werden,

$$(19) \quad [U_{(1)}]_{j \text{ mal } i_3 \dots i_3 \mid \mu_1 \dots \mu_s} = 4 \pi (\Omega_{(j)}^{(2)} \sigma)_{\mid \mu_1 \dots \mu_s}$$

und

$$(20) \quad [U_{(2)}]_{j \text{ mal } i_3 \dots i_3 \mid \mu_1 \dots \mu_s} = -4 \pi (\Omega_{(j)}^{(1)} \sigma)_{\mid \mu_1 \dots \mu_s}$$

erhalten. Speziell ergeben sich daraus die bekannten Relationen

$$(21) \quad \begin{aligned} [U_{(1)}] &= 0; & [U_{(2)}] &= -4 \pi \sigma \\ [U_{(1)}]_{i_3} &= 4 \pi \sigma & [U_{(2)}]_{i_3} &= 0 \\ [U_{(1)}]_{i_\mu} &= 0 & [U_{(2)}]_{i_\mu} &= -4 \pi \sigma_{i_\mu}. \end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen erhalten wir

$$(22) \quad \begin{aligned} [U_{(1)}]_{i_3 i_3} &= 8 \pi H \sigma; & [U_{(1)}]_{i_3 i_\mu} &= 4 \pi \sigma_{i_\mu}; & [U_{(1)}]_{i_\mu i_\nu} &= 0 \\ [U_{(2)}]_{i_3 i_3} &= -4 \pi \Delta_{(0)} \sigma; & [U_{(2)}]_{i_3 i_\mu} &= 0; & [U_{(2)}]_{i_\mu i_\nu} &= -4 \pi \sigma_{i_\mu i_\nu}. \end{aligned}$$

§ 6. Die Sprungrelationen im x -System.

Von H. POINCARÉ⁷⁾ und E. SCHMIDT⁸⁾ wurden Sprungrelationen für die zweiten Ableitungen im Tangenten-Normalen-System angegeben.

Wir wollen daher jetzt eine Methode zur Umrechnung der Sprungrelationen ins x -System entwickeln. Wir benutzen dazu den Gedanken der kovarianten Ableitung. Ist $A_{i_1 \dots i_j}$ ein Tensor der Stufe j , so stellt

$$(1) \quad A_{i_1 \dots i_j \mid i} = A_{i_1 \dots i_j i} - \Gamma_{i i_1}^k A_{k i_2 \dots i_j} - \dots - \Gamma_{i i_j}^k A_{i_1 \dots i_{j-1} k}$$

wiederum einen Tensor dar, wenn $\Gamma_{i i_1}^k$ die CHRISTOFFEL'schen Drei-Indizes-Symbole bezeichnen.

Ist W irgendeine in einer Umgebung von P genügend oft differenzierbare Funktion, so stellt

$$(2) \quad W_{\mid i_1 \mid i_2 \dots i_j}$$

einen Tensor dar. Setzen wir

$$(3) \quad W(u^1, u^2, u^3) = Z(x^1, x^2, x^3),$$

⁷⁾ POINCARÉ, H.: (I. c.), S. 252.

⁸⁾ SCHMIDT, E.: Math. Abh. H. A. SCHWARZ gewidmet, 1914, 381.

so wird die kovariante Ableitung nach den x^i

$$(4) \quad Z_{||i_1 \dots ||i_j} = W_{||i_1 \dots ||i_j} \frac{\partial u^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial u^{k_j}}{\partial x^{i_j}}.$$

Es verschwinden aber im kartesischen x -System sämtliche Drei-Indizes-Symbole, so daß

$$(5) \quad Z_{||i_1 \dots ||i_j} = Z_{||i_1 \dots ||i_j}$$

ist und die gewöhnliche Ableitung mit der kovarianten Ableitung übereinstimmt. Andererseits ist nach (2, 7)

$$(6) \quad \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \triangleq \delta_i^k,$$

so daß

$$(7) \quad Z_{||i_1 \dots ||i_j} \triangleq W_{||i_1 \dots ||i_j}$$

wird und in P die Ableitungen nach den x^i gleich den kovarianten Ableitungen nach den u^i sind.

Zur Durchführung dieses Gedankens müssen nun die Γ_{ki}^i des u -Systems ausgerechnet werden. Wir gehen dazu von der Differentialgleichung der Geraden im u -System aus. Bezeichnen wir durch Punkte die Ableitung nach der Bogenlänge, so wird

$$(8) \quad 0 = \ddot{x} = (\dot{f}_{|\mu} + u^3 n_{|\mu}) \ddot{u}^\mu + (\dot{f}_{|\mu|v} + u^3 n_{|\mu|v}) \dot{u}^\mu \dot{u}^v + 2 n_{|\mu} \dot{u}^3 \dot{u}^\mu + n \ddot{u}^3$$

gleichbedeutend mit

$$(9) \quad \ddot{u}^i + \Gamma_{ki}^i \dot{u}^k \dot{u}^l = 0.$$

Durch Multiplikation von (8) mit n erhalten wir

$$(10) \quad \ddot{u}^3 + n (\dot{f}_{|\mu|v} + u^3 n_{|\mu|v}) \dot{u}^\mu \dot{u}^v = 0.$$

Es ist also

$$(11) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^3 &= n \dot{f}_{|\mu|v} - u^3 n (L_\mu^e \dot{f}_{|e|v} + L_\nu^e \dot{f}_{|\mu|e}) \\ &= L_{\mu\nu} - u^3 L_\mu^e L_{e\nu} = u^3 K \gamma_{\mu\nu} + (1 - 2 u^3 H) L_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von (8) mit

$$(12) \quad g^{ve} (\dot{f}_{|e} + u^3 n_{|e})$$

erhalten wir, wenn $A_{\mu\nu}^r$ die Drei-Indizes-Symbole der Fläche F darstellen,

$$(13) \quad \begin{aligned} \ddot{u}^v + g^{ve} (\dot{f}_{|e} - u^3 L_e^r \dot{f}_{|r}) (A_{\mu\tau}^r \dot{f}_{|r} - u^3 L_\mu^r \dot{f}_{|r|a} - u^3 L_{\mu|a} \dot{f}_{|r}) \dot{u}^\mu \dot{u}^\tau \\ - g^{ve} (\dot{f}_{|e} - u^3 L_e^r \dot{f}_{|r}) L_\mu^r \dot{f}_{|r} \dot{u}^3 \dot{u}^\mu = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(14) \quad \Gamma_{3\mu}^v = -g^{ve} (L_\mu^r \gamma_{e\tau} - u^3 L_e^r L_\mu^r \gamma_{\tau e}).$$

Hinsichtlich der Flächenkoordinaten u^μ ist dies ein Tensor, und es wird

$$(15) \quad \Gamma_{31}^1 \triangleq -\frac{k_{(1)}(1 - u^3 k_{(2)})}{G}; \quad \Gamma_{32}^2 \triangleq -\frac{k_{(2)}(1 - u^3 k_{(1)})}{G}; \quad \Gamma_{32}^1 \triangleq \Gamma_{31}^2 \triangleq 0,$$

so daß wir

$$(16) \quad \Gamma_{3,}^{\mu} = \frac{1}{G} (u^3 K \delta_{\nu}^{\mu} - L_{\nu}^{\mu})$$

erhalten.

Es sind

$$(17) \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = g^{\nu\epsilon} (\bar{f}_{|\epsilon} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma} \bar{f}_{|\sigma}) (\Lambda_{\mu\alpha}^{\tau} \bar{f}_{|\tau} - u^3 (L_{\mu|\alpha}^{\tau} \bar{f}_{|\tau} + L_{\mu}^{\tau} \bar{f}_{|\tau|\alpha}))$$

die Drei-Indizes-Symbole auf der Fläche $u^3 = \text{const.}$ Führen wir neue Koordinaten v^{μ} ein, so transformieren sich die $\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}$ und $\Lambda_{\mu\alpha}^{\nu}$ in der Form

$$(18) \quad \bar{\Lambda}_{\mu\alpha}^{\nu} = \Lambda_{\sigma\tau}^{\nu} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial v^{\mu}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial v^{\alpha}} + \frac{\partial v^{\nu}}{\partial u^{\epsilon}} \frac{\partial^3 u^{\epsilon}}{\partial v^{\mu} \partial v^{\alpha}}$$

$$(19) \quad \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\nu} = \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial v^{\mu}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial v^{\alpha}} + \frac{\partial v^{\nu}}{\partial u^{\epsilon}} \frac{\partial^3 u^{\epsilon}}{\partial v^{\mu} \partial v^{\alpha}},$$

wenn $\bar{\Lambda}_{\mu\alpha}^{\nu}$ und $\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\nu}$ die CHRISTOFFEL-Symbole im v -System sind. Es ergibt sich aus (18) und (19), daß

$$(20) \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \Lambda_{\mu\alpha}^{\nu}$$

einen Tensor darstellt. Aus

$$(21) \quad \bar{f}_{|\mu|\nu} = \Lambda_{\mu\nu}^{\epsilon} \bar{f}_{|\epsilon} + L_{\mu\nu} n$$

entnehmen wir wegen (2, 3) und (2, 4)

$$(22) \quad \Lambda_{\mu\nu}^{\epsilon} \doteq 0,$$

so daß wir aus (17)

$$(23) \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \Lambda_{\mu\alpha}^{\nu} \doteq \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} \doteq -u^3 g^{\nu\epsilon} (L_{\epsilon\mu|\alpha} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma} L_{\sigma\mu|\alpha})$$

erhalten. Auf Grund der Gleichungen von CODAZZI-MAINARDI ist aber

$$(24) \quad L_{\epsilon\mu|\alpha} \doteq L_{\mu\epsilon|\alpha} \doteq L_{\mu\alpha|\epsilon}.$$

Setzen wir noch

$$(25) \quad L_{\mu\alpha;\epsilon} = L_{\mu\alpha|\epsilon} - \Lambda_{\epsilon\mu}^{\tau} L_{\tau\alpha} - \Lambda_{\epsilon\alpha}^{\tau} L_{\tau\mu},$$

so stellt (25) die kovariante Ableitung von $L_{\mu\alpha}$ dar. Wir erhalten wegen (22)

$$(26) \quad L_{\mu\alpha;\epsilon} \doteq L_{\mu\alpha|\epsilon},$$

und es wird

$$(27) \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} \doteq -u^3 g^{\nu\epsilon} (L_{\mu\alpha;\epsilon} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma} L_{\mu\alpha;\sigma}).$$

Auf Grund des Tensorcharakters von (20) ergibt sich daher

$$(28) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} &= \Lambda_{\mu\alpha}^{\nu} - u^3 g^{\nu\epsilon} (L_{\mu\alpha;\epsilon} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma} L_{\mu\alpha;\sigma}) \\ &= \Lambda_{\mu\alpha}^{\nu} - u^3 g^{\nu\epsilon} (\delta_{\epsilon}^{\nu} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma}) L_{\mu\alpha;\sigma}. \end{aligned}$$

Es ist

$$(29) \quad g^{\nu\epsilon} (\delta_{\epsilon}^{\nu} - u^3 L_{\epsilon}^{\sigma}) \doteq \frac{1}{G} (\gamma^{\nu\sigma} - u^3 T^{\nu\sigma}),$$

und aus (28) wird

$$(30) \quad \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} = \Lambda_{\mu\alpha}^{\nu} - \frac{u^3}{G} (\gamma^{\nu\sigma} - u^3 T^{\nu\sigma}) L_{\mu\alpha;\sigma}.$$

Wegen (22) ist daher

$$(31) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} &\doteq 0; \Gamma_{31}^1 \doteq -k_{(1)}; \Gamma_{32}^2 \doteq -k_{(2)}; \Gamma_{32}^1 \doteq \Gamma_{31}^2 \doteq 0; \\ \Gamma_{11}^3 &\doteq k_{(1)}; \Gamma_{22}^3 \doteq k_{(2)}; \Gamma_{12}^3 \doteq \Gamma_{3\mu}^3 \doteq \Gamma_{33}^3 \doteq 0. \end{aligned}$$

Es ist somit nach (5, 1) und (5, 11) wegen (7)

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Phi &\doteq -\sigma L_{\mu\nu}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^\nu} \Phi \doteq \sigma_{|\mu} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \Phi &\doteq \Phi_{|3;3} \doteq 2 H \sigma \end{aligned}$$

sowie

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Psi &\doteq \sigma_{|\mu;\nu}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^3 \partial x^\mu} \doteq k_{(\mu)} \sigma_{|\mu} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \Psi &\doteq \Psi_{|3;3} \doteq -\Delta_{(0)} \sigma. \end{aligned}$$

Nach dem Vorgang des § 5 stellen daher, vom Faktor 4π abgesehen, die Gleichungen (32) die von POINCARÉ angegebenen Sprungrelationen der zweiten Ableitungen des Potentials einer einfachen Flächenbelegung dar. Entsprechend sind die Gleichungen (33), vom Faktor -4π abgesehen, die Sprungrelationen der zweiten Ableitungen des Potentials einer Doppelbelegung, ausgedrückt im x -System.

§ 7. Die Sprungrelationen mehrfacher Flächenbelegungen.

Wir wollen uns nun den mehrfachen Flächenbelegungen zuwenden, deren Potentiale durch

$$(1) \quad U_{(K+1)} = \int \sigma \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \right)^K \frac{1}{r_{x\xi}} dF_\xi$$

dargestellt werden. Auf Grund von Lemma 3 ist, falls der Aufpunkt (x) nicht auf F liegt,

$$(2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \right)^K \frac{1}{r_{x\xi}} = \Omega_{(K)}^{(1)} \frac{1}{r_{x\xi}} + \Omega_{(K)}^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{r_{x\xi}},$$

wobei die Operatoren $\Omega_{(K)}^{(\mu)}$ hinsichtlich der (ξ) angewandt werden. Da die $\Omega_{(K)}^{(\mu)}$ lineare Differentialoperatoren sind, können wir in üblicher Weise adjungierte Operatoren $\Phi_{(K)}^{(\mu)}$ definieren. Ist dann F^* irgendein von einer stückweise analytischen Kurve begrenztes Teilgebiet von F und sind V und W zwei dort genügend oft differenzierbare Funktionen, so ist

$$(3) \quad \int_{F^*} V \Omega_{(K)}^{(\mu)} W dF [=] \int_{F^*} W \Phi_{(K)}^{(\mu)} V dF,$$

wobei wir durch $[=]$ ausdrücken, daß die beiden Seiten bis auf Integrale über den Rand von F^* übereinstimmen. Aus (4, 27) ergibt sich dann die Rekursionsbeziehung

$$(4) \quad 0 = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Phi_{(j)}^{(\mu)} \triangle_{(N-j)} + \Phi_{(N+1)}^{(\mu)} - \binom{N+1}{1} \Phi_{(N+1)}^{(\mu)} \cdot 2H + \binom{N+1}{2} \Phi_{(N)}^{(\mu)} \cdot 2K$$

mit

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi_{(0)}^{(1)} &= 1; \quad \Phi_{(1)}^{(1)} = 0 \\ \Phi_{(0)}^{(2)} &= 0; \quad \Phi_{(1)}^{(2)} = 1, \end{aligned}$$

so daß wir speziell

$$(6) \quad \begin{aligned} \Phi_{(2)}^{(1)} &= -\Delta_{(0)}; \quad \Phi_{(2)}^{(2)} = 2H \\ \Phi_{(3)}^{(1)} &= -\Delta_{(0)} 4H - \Delta_{(1)}; \quad \Phi_{(3)}^{(2)} = 8H^2 - 2K - \Delta_{(0)} \end{aligned}$$

erhalten.

Daraus ergibt sich nun

$$(7) \quad U_{(K+1)} = \int_F \sigma \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \right)^K \frac{1}{r_{x\xi}} dF (=) \int_F \left[\frac{1}{r_{x\xi}} (\Phi_{(K)}^{(1)} \sigma) + \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{r_{x\xi}} \right) (\Phi_{(K)}^{(2)} \sigma) \right] dF,$$

wobei für geschlossene Flächen F

$$(8) \quad U_{(K+1)} = \int_F \left[\frac{1}{r_{x\xi}} (\Phi_{(K)}^{(1)} \sigma) + \left(\frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{r_{x\xi}} \right) (\Phi_{(K)}^{(2)} \sigma) \right] dF$$

gilt. Ist P ein innerer Punkt von F , so folgt für die Unstetigkeiten mit der Bezeichnungsweise des § 5 wegen (5, 19) und (5, 20)

$$(9) \quad \begin{aligned} & [U_{(K+1)}]_{j, \text{mal}} = \dots \dots \dots | \mu_1 \dots \dots | \mu_s \\ & = 4\pi (\Omega_{(j)}^{(2)} \Phi_{(K)}^{(1)} - \Omega_{(j)}^{(1)} \Phi_{(K)}^{(2)}) \sigma_{|\mu_1 \dots \dots | \mu_s}. \end{aligned}$$

Es ist beispielsweise für $K=2$

$$(10) \quad U_3 = \int_F \sigma \frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{1}{r} dF [=] \int_F \left(-\frac{1}{r} \Delta_{(0)} \sigma + 2H \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF$$

$$(11) \quad \begin{aligned} [U_3] &= -8\pi H \sigma; \quad [U_3]_3 = -4\pi \Delta_{(0)} \sigma; \quad [U_3]_{i,\mu} = -8\pi (H \sigma)_{i,\mu} \\ [U_3]_{3,3} &= 4\pi (\Delta_{(0)} 2H \sigma - 2H \Delta_{(0)} \sigma). \end{aligned}$$

Als Korollar folgt für geschlossene Flächen eine Integralrelation, die wir folgendermaßen herleiten:

Es sei Q ein beliebiger endlicher Punkt. Wir wählen ihn als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems y^i mit den Einheitsvektoren e_i und setzen (vgl. Abb. 2)

$$(12) \quad y^i e_i = R r_{0y}; \quad \xi^i e_i = \varrho r_{0\xi},$$

wobei $r_{0\xi}$ und r_{0y} Einheitsvektoren sind, die von P zu (ξ) und (y) hinweisen. Dann ist für $R > \varrho$

$$(13) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho(r_{0y} \cdot r_{0\xi})}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varrho^l}{R^{l+1}} P_l(r_{0y} \cdot r_{0\xi}),$$

wo $P_l(r_{0y} \cdot r_{0\xi})$ die LEGENDRESCHEN Polynome mit dem Argument $(r_{0y} \cdot r_{0\xi})$ sind. Ist D der Radius der kleinsten Kugel um Q , die F noch enthält, so ergibt sich für $R > D$

$$(14) \quad \frac{\partial^N}{\partial n_\xi^N} \frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{N+l+1}} \frac{\partial^N}{\partial n_\xi^N} \varrho^{N+l} P_{l+N}(r_{0y} \cdot r_{0\xi}).$$

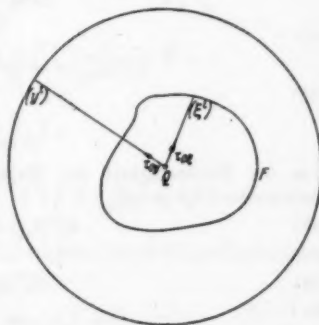


Fig. 2.

Bei festem r_{0y} ist nämlich

$$(15) \quad \varrho^l P_l(r_{0y} \cdot r_{0z})$$

ein homogenes Polynom vom Grade l in den ξ^i . In der Umgebung eines Punktes P von F führen wir das Tangenten-Normalen-System x^i ein. Dann ist (15) ein Polynom vom Grade l in den x^i .

Aus (6, 10) und (6, 13) entnehmen wir aber

$$(16) \quad \Gamma_{33}^w = \Gamma_{33}^3 = 0,$$

so daß

$$(17) \quad \frac{\partial^N}{\partial n_i^N} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^N = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^N$$

ist und für $l < N$

$$(18) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \varrho^l P_l(r_{0y} \cdot r_{0z}) = 0$$

wird. Es ist daher für $R > D$

$$(19) \quad \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n^N} \frac{1}{r} dF = \sum_{l=N}^{\infty} \frac{K_l(r_{0y})}{R^{l+1}} = O\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right),$$

wobei $K_l(r_{0y})$ die Kugelfunktion

$$(20) \quad K_l(r_{0y}) = \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n_i^N} \varrho^l P_l(r_{0y} \cdot r_{0z}) dF_i$$

ist. Entwickeln wir (8) in analoger Weise, so ergibt sich für $R > D$

$$(21) \quad \int_F \left[\frac{1}{r} (\Phi_{(N)}^{(1)} \sigma) + \left(\frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{r} \right) (\Phi_{(N)}^{(2)} \sigma) \right] dF = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_l^*(r_{0y})}{R^{l+1}}$$

mit

$$(22) \quad K_l^*(r_{0y}) = \int_F \left[\varrho^l P_l(r_{0y} \cdot r_{0z}) (\Phi_{(N)}^{(1)} \sigma) + \left(\frac{\partial}{\partial n_i} \varrho^l P_l(r_{0y} \cdot r_{0z}) \right) (\Phi_{(N)}^{(2)} \sigma) \right] dF_i.$$

Aus der Eindeutigkeit der Entwicklung des Potentials nach den Kugelfunktionen folgt somit

$$(23) \quad K_l^*(r_{0y}) = 0 \quad \text{für } l < N$$

und

$$(24) \quad K_l^*(r_{0y}) = K_N(r_{0y})$$

für $l = N$.

Wir führen nun noch die harmonischen Polynome H_l ein und verstehen darunter eine Funktion, die in einem kartesischen Koordinatensystem als Polynom vom Grade l der Koordinaten dargestellt wird und der Differentialgleichung

$$(25) \quad \Delta H_l = 0$$

genügt.

Dann ist (23) gleichbedeutend mit

Korollar 3: Werden mit einer beliebigen, auf F analytischen Funktion σ die Funktionen

$$V_N = \Phi_{(N)}^{(1)} \sigma; \quad W_N = -\Phi_{(N)}^{(2)} \sigma$$

definiert, so ist für alle harmonischen Polynome H_l vom Grade $l < K$

$$\int_F \left(V_N H_l - W_N \frac{\partial H_l}{\partial n} \right) dF = 0.$$

Zum Beweise benutzen wir ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem $K_{l,j}(\tau_0)$ von Kugelfunktionen. Dann ist

$$(26) \quad P_l(\tau_{0y} \cdot \tau_{0z}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{j=1}^{2l+1} K_{l,j}(\tau_{0y}) \cdot K_{l,j}(\tau_{0z}),$$

und es folgt aus (22) und (23) mit den Bezeichnungen des Korollars 3

$$(27) \quad \int_F \left[V_N \varrho^l K_{l,j}(\tau_{0z}) - W_N \frac{\partial}{\partial n} \varrho^l K_{l,j}(\tau_{0z}) \right] dF = 0.$$

Da sich jedes H_l als Linearkombination

$$(28) \quad H_l = \sum_{m=0}^l \sum_{j=1}^{2m+1} C_{mj} \varrho^m K_{m,j}(\tau_{0z})$$

darstellen läßt, ergibt sich die Behauptung. Korollar 3 kann noch in anderer Form ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$(29) \quad 0 = \int_F \left(V_N H_l - W_N \frac{\partial H_l}{\partial n} \right) dF = \int_F \sigma \left(\Omega_{(N)}^{(1)} H_l + \Omega_{(N)}^{(2)} \frac{\partial}{\partial n} H_l \right) dF.$$

Da dies für alle σ gelten muß, ergibt sich für $l < N$

$$(30) \quad \left(\Omega_{(N)}^{(1)} + \Omega_{(N)}^{(2)} \frac{\partial}{\partial n} \right) H_l = 0$$

Setzen wir speziell $\sigma = 1$, so folgt aus (4)

$$(31) \quad \Phi_{(N+2)}^{(N)} \cdot 1 - \binom{N+1}{1} \Phi_{(N+1)}^{(N)} \cdot 2H + \binom{N+1}{2} \Phi_{(N)}^{(N)} \cdot 2K = 0,$$

und das ist nach (8) gleichbedeutend mit

$$(32) \quad \int_F \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^{N+2} \frac{1}{r} dF - 2 \binom{N+1}{1} \int_F H \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^{N+1} \frac{1}{r} dF + 2 \binom{N+1}{2} \int_F K \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \frac{1}{r} dF = 0.$$

Daraus folgt für $N > 0$ durch Vergleich der Entwicklung nach Kugelfunktionen nach (14) und (19)

$$(33) \quad \int_F K \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \varrho^N P_N(\tau_{0y} \cdot \tau_{0z}) dF = 0$$

sowie

$$(34) \quad 2 \int_F H \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^{N+1} \varrho^{N+1} P_{N+1}(\tau_{0y} \cdot \tau_{0z}) dF - N \int_F \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \varrho^N P_N(\tau_{0y} \cdot \tau_{0z}) dF$$

und für $N = 0$

$$(35) \quad \int_F H \frac{\partial}{\partial n} \varrho P_1(\tau_{0z} \cdot \tau_{0y}) dF = 0.$$

Es ist

$$(36) \quad \varrho P_1(\mathbf{r}_{0\xi} \cdot \mathbf{r}_{0\eta}) = (\xi \mathbf{r}_{0\eta}),$$

wenn wir $\xi = \varrho \mathbf{r}_{0\xi}$ setzen. Aus (2, 6) entnehmen wir

$$(37) \quad \xi = \bar{\xi}(u^1, u^2) + u^3 n(u^1, u^2),$$

so daß wegen $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial u^3}$

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial n} \varrho P_1(\mathbf{r}_{0\xi} \cdot \mathbf{r}_{0\eta}) = n \mathbf{r}_{0\eta}$$

wird, und es ist (35) gleichbedeutend mit

$$(39) \quad \int H n dF = 0.$$

Aus (33) ergibt sich für $N = 1$ entsprechend

$$(40) \quad \int K n dF = 0.$$

§ 8. Der Gradient im u -System.

Wir wollen uns nun der Berechnung der Gradienten der Potentiale $U_{(\mathbf{K})}$ zuwenden und benötigen dazu eine Reihe von Hilfssätzen über die Darstellung des Gradienten.

Ist U eine differenzierbare Funktion, so ist bekanntlich

$$(1) \quad \nabla U = g^{\mu\nu} (\bar{f}_{1\nu} + u^3 n_{1\nu}) U_{|\mu} + U_{|3} n.$$

Es ist aber

$$(2) \quad g^{\mu\nu} (\bar{f}_{1\nu} + u^3 n_{1\nu}) = g^{\mu\nu} (\delta_{\nu}^0 - u^3 L_{\nu}^0) \bar{f}_{10},$$

und nach (6, 29) wird

$$(3) \quad g^{\mu\nu} (\delta_{\nu}^0 - u^3 L_{\nu}^0) = \frac{1}{G} (\gamma^{\mu\nu} - u^3 T^{\mu\nu}).$$

Für $|u^3| < m$ läßt sich hier die rechte Seite nach Potenzen von u^3 entwickeln, und wir setzen

$$(4) \quad \frac{1}{G} (\gamma^{\mu\nu} - u^3 T^{\mu\nu}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u^3)^j}{j!} Q_{(j)}^{\mu\nu}.$$

Wegen

$$(5) \quad \frac{1}{G} (\gamma^{11} - u^3 T^{11}) \doteq \frac{1}{1 - u^3 k_{(1)}}; \quad \frac{1}{G} (\gamma^{22} - u^3 T^{22}) \doteq \frac{1}{1 - u^3 k_{(2)}} \\ \gamma^{12} - u^3 T^{12} \doteq 0$$

ergibt sich

$$(6) \quad Q_{(j)}^{11} \doteq j! (k_{(1)})^j; \quad Q_{(j)}^{22} \doteq j! (k_{(2)})^j; \quad Q_{(j)}^{12} \doteq 0.$$

Führen wir die Invarianten

$$(7) \quad J_{(-1)} = 0; \quad J_{(0)} = 1; \quad J_{(j)} = \sum_{i=0}^j (k_{(1)})^{j-i} (k_{(2)})^i$$

ein, so erhalten wir für $j \geq 0$

$$(8) \quad \frac{1}{j!} Q_{(j)}^{\mu\nu} = J_{(j)} \gamma^{\mu\nu} - J_{(j-1)} T^{\mu\nu}.$$

Aus (6) folgern wir in üblicher Weise

$$(9) \quad \binom{n}{j} Q_{(j) \varepsilon}^{\mu} Q_{(n-j) \varepsilon}^{\varepsilon} = Q_{(n)}^{\mu}.$$

Wir benötigen noch einige Integralrelationen und beweisen zunächst

Lemma 4: Ist

$$\nabla_F U = \gamma^{\mu \nu} \bar{f}_{|\nu} U_{|\mu} \quad \text{und} \quad \nabla_F^2 U = T^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu} U_{|\nu},$$

so wird

$$\begin{aligned} \int_F \nabla_F U \, dF [=] &= \int_F U \cdot 2 H \cdot n \, dF \\ \int_F \nabla_F^2 U \, dF [=] &= \int_F U \cdot 2 K \cdot n \, dF. \end{aligned}$$

Zum Beweise betrachten wir ein kleines Teilflächenstück F' von F , das umkehrbar eindeutiges analytisches Bild eines Parameterbereiches B' ist und von einer stückweise analytischen Kurve berandet wird. Dann ist nach dem Gaußschen Integralsatz

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_{F'} \nabla_F U \, dF &= \int_{B'} \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu} U_{|\nu} \, du^1 du^2 \\ [=] &= \int_{B'} U (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu})_{|\nu} \, du^1 du^2 = - \int_{B'} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu})_{|\nu} \cdot U \, dF. \end{aligned}$$

Wegen der bekannten Relationen

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu \nu})_{|\nu} = - \Lambda_{\varepsilon}^{\mu} \gamma^{\varepsilon \nu}$$

und

$$(12) \quad \bar{f}_{|\mu|\nu} = \Lambda_{\mu}^{\varepsilon} \bar{f}_{|\varepsilon} + L_{\mu \nu} n$$

ergibt sich

$$(13) \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \gamma^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu})_{|\nu} = \Delta_{(0)} \bar{f} = \gamma^{\mu \nu} L_{\mu \nu} n = 2 H n,$$

so daß wir

$$(14) \quad \int_{F'} \nabla_F U \, dF [=] = \int_{F'} U \cdot 2 H n \, dF$$

erhalten.

Da wir F in endlich viele Flächenstücke von der Art F' aufteilen können, ergibt sich der erste Teil von Lemma 4 nach dem üblichen Beweis des Gaußschen Integralsatzes.

Entsprechend erhalten wir

$$(15) \quad \int_F \nabla_F^2 U \, dF [=] = \int_F U \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} T^{\mu \nu} \bar{f}_{|\mu})_{|\nu} \, dF.$$

Nun ist

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} T^{\mu \nu})_{|\nu} = T^{\mu \nu}_{|\nu} + T^{\mu \nu} \Lambda_{\varepsilon}^{\varepsilon}.$$

Bilden wir die Divergenz

$$(17) \quad T^{\mu \nu}_{|\nu} = T^{\mu \nu}_{|\nu} + \Lambda_{\varepsilon}^{\mu} T^{\varepsilon \nu} + \Lambda_{\varepsilon}^{\nu} T^{\mu \varepsilon}$$

von $T^{\mu \nu}$, so folgt nach der Definition (2, 13)

$$(18) \quad T^{\mu \nu}_{|\nu} \doteq T^{\mu \nu}_{|\nu} \doteq 2 H_{|\nu} \gamma^{\mu \nu} - L^{\mu}_{\varepsilon|\nu} \doteq L^{\varepsilon}_{\varepsilon|\mu} - L^{\varepsilon}_{\mu|\varepsilon},$$

da

$$(19) \quad 2H = L^e_e; \quad L^{\mu\nu} = \gamma^{\mu e} L^e_e$$

und wegen $L^e_{\mu\sigma} \doteq 0$ auch $\gamma^{\mu e}{}_{,\sigma} \doteq 0$ ist. Aus den Gleichungen von CODAZZI-MAINARDI folgt aber

$$(20) \quad L^e_{e|\mu} \doteq L^e_{\mu|e},$$

so daß $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \doteq 0$ wird und somit die Divergenz von $T^{\mu\nu}$ verschwindet. Aus

$$(21) \quad T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Lambda^{\mu}_{\nu e} T^{e\nu} + \Lambda^e_{\nu e} T^{\mu\nu} = 0$$

erhalten wir nach (16)

$$(22) \quad \frac{1}{|\gamma|} (|\gamma| T^{\mu\nu})_{,\nu} = -\Lambda^{\mu}_{\nu e} T^{e\nu},$$

so daß wegen (12) und (22)

$$(23) \quad \frac{1}{|\gamma|} (|\gamma| T^{\mu\nu} f_{|\mu|,\nu}) = T^{\mu\nu} f_{|\mu|,\nu} - \Lambda^{\mu}_{\nu e} T^{e\nu} f_{|\mu|} = T^{\mu\nu} L_{\mu\nu} n$$

ist. Aus (15) ergibt sich daher mit

$$(24) \quad T^{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 2K$$

$$(25) \quad \int_F \nabla_F^* U dF [=] - \int_F U \cdot 2K \cdot n dF,$$

und der zweite Teil von Lemma 4 folgt in üblicher Weise.

Speziell liefert Lemma 4 für $U = 1$ und geschlossene Flächen die Beziehungen (7, 39) und (7, 40).

Wir wollen nun die Bezeichnung

$$(26) \quad \nabla_{(0)} U = \gamma^{\mu\nu} f_{|\nu|,\mu} U_{|\mu|}; \quad \nabla_{(1)} U = L^{\mu\nu} f_{|\nu|,\mu} U_{|\mu|}; \quad \nabla_{(j)} U = Q^{(\mu\nu)}_{(j)} f_{|\nu|,\mu} U_{|\mu|}$$

einführen und erhalten dann nach Lemma 4

Lemma 5: Mit den Invarianten

$$I_{(j)} = (k_{(1)})^j + (k_{(2)})^j; \quad J_{(j)} = \sum_{i=0}^j (k_{(1)})^{j-i} (k_{(2)})^i$$

und den Vektoren

$$\frac{1}{j!} t_{(j)} = \nabla_F J_{(j)} - \nabla_F^* J_{(j-1)}$$

ist

$$\int_F \nabla_{(j)} U dF [=] - \int_F U (t_{(j)} + I_{(j+1)} n) dF.$$

Nach (8) und (26) ergibt sich nämlich

$$(27) \quad \nabla_{(j)} U = J_{(j)} \nabla_F U - J_{(j-1)} \nabla_F^* U$$

sowie

$$(28) \quad \nabla_{(j)} U = \nabla_F (J_{(j)} U) - \nabla_F^* (J_{(j-1)} U) - U (\nabla_F J_{(j)} - \nabla_F^* J_{(j-1)}).$$

Da

$$(29) \quad 2H J_{(j)} - 2K J_{(j-1)} = (k_{(1)})^{j+1} + (k_{(2)})^{j+1} = I_{(j+1)}$$

ist, folgt Lemma 5 durch Integration von (28) und Anwendung von Lemma 4.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Gradienten unserer Potentiale berechnen. Ist ∇_x der dreidimensionale, bezüglich der Koordinaten x^i

des Aufpunktes angewandte, und ∇_t der bezüglich der Quellpunktkoordinaten ξ^t angewandte ∇ -Operator, so wird für $(x) \neq (\xi)$

$$(30) \quad \nabla_x \frac{1}{r_{x\xi}} = -\nabla_\xi \frac{1}{r_{x\xi}},$$

und wir erhalten, wenn (x) nicht auf F liegt,

$$(31) \quad \nabla_x \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n^N} \frac{1}{r_{x\xi}} dF = \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n^N} \nabla_x \frac{1}{r_{x\xi}} dF = - \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n^N} \nabla_t \frac{1}{r_{x\xi}} dF.$$

Nach (1), (4) und (26) ist

$$(32) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \nabla_t \frac{1}{r_{x\xi}} = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \nabla_{(N-j)} \frac{\partial^j}{\partial n^j} \frac{1}{r_{x\xi}} + \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1} \frac{1}{r_{x\xi}} n.$$

Andererseits wird nach Lemma 5

$$(33) \quad \int_F \sigma \nabla_{(N-j)} \frac{\partial^j}{\partial n^j} \frac{1}{r} dF + \int_F \left(\frac{\partial^j}{\partial n^j} \frac{1}{r}\right) \nabla_{(N-j)} \sigma dF \\ [=] - \int_F \sigma \frac{\partial^j}{\partial n^j} \frac{1}{r} (t_{(N-j)} + I_{(N+1-j)} n) dF,$$

und es ergibt sich

Satz I: Ist mit analytischer Belegung σ der analytischen, orientierbaren Fläche F

$$U_{(N+1)} = \int_F \sigma \frac{\partial^N}{\partial n^N} \frac{1}{r_{x\xi}} dF,$$

so wird

$$\nabla_x U_{(N+1)} [=] - \int_F \sigma n \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1} \frac{1}{r} dF \\ + \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \int_F \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j \frac{1}{r} (\nabla_{(N-j)} \sigma + \sigma (t_{(N-j)} + I_{(N+1-j)} n)) dF$$

oder

$$\nabla_x U_{(N+1)} [=] \int_F \left(\frac{1}{r} (v_{(N+1)}^{(1)} \sigma) + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} (v_{(N+1)}^{(2)} \sigma) \right) dF$$

mit

$$v_{(N+1)}^{(1)} \sigma = -\Phi_{(N+1)}^{(n)} \sigma n + \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Phi_{(j)}^{(n)} (\nabla_{(N-j)} \sigma + \sigma (t_{(N-j)} + I_{(N+1-j)} n)).$$

Der Beweis ergibt sich aus (30) – (32) durch Benutzung der in § 7 eingeführten Operatoren. Für die Sprungrelationen des Gradienten erhalten wir nach (5, 21)

$$(34) \quad [\nabla_x U_{(N+1)}] = -4\pi v_{(N+1)}^{(2)} \sigma.$$

Andererseits ist aber

$$(35) \quad [\nabla_x U_{(N+1)}] = e_t \delta^{tk} [U_{(N+1)}]_{,k},$$

und daraus wird nach (7, 9)

$$(36) \quad [\nabla_x U_{(N+1)}] = 4\pi (n \Phi_{(N)}^{(1)} \sigma - \nabla_{(0)} \Phi_{(N)}^{(2)} \sigma).$$

Es folgt daher aus (34) und (36)

Lemma 6:

$$\begin{aligned} n \Phi_{(N)}^{(1)} \sigma - \nabla_{(0)}^4 \Phi_{(N)}^{(2)} \sigma &= -v_{(N+1)}^{(2)} \sigma \\ &= \Phi_{(N+1)}^{(2)} n \sigma - \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Phi_{(j)}^{(2)} (\nabla_{(N-j)} \sigma + \sigma (t_{(N-j)} + I_{(N+1-j)} n)). \end{aligned}$$

Für $\sigma = 1$ wird daraus

Lemma 7:

$$\begin{aligned} n K_{(N)}^{(1)} - \nabla_{(0)} K_{(N)}^{(2)} \\ = \Phi_{(N+1)}^{(2)} n - \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Phi_{(j)}^{(2)} (t_{(N-j)} + I_{(N+1-j)} n), \end{aligned}$$

wobei

$$K_{(N)}^{(\mu)} = \Phi_{(N)}^{(\mu)} \cdot 1$$

Invarianten der Fläche F darstellen.

Für $N = 2$ erhalten wir beispielsweise $K_{(2)}^{(1)} = 0$ und $K_{(2)}^{(2)} = 2H$ sowie aus Lemma 7 wegen

$$(37) \quad t_{(1)} = \nabla_{(0)} 2H; \quad \Phi_{(3)}^{(2)} = 8H^2 - 2K - \Delta_{(0)}$$

$$(38) \quad \Delta_{(0)} n + 2 \nabla_{(0)} H = -I_2 n$$

§ 9. Abschwächung der Voraussetzungen.

In § 7 hatten wir gesehen, daß sich die Potentiale mehrfacher Belegungen durch Prozesse partieller Integration in der Fläche F bis auf Randintegrale in Ausdrücke der Form

$$(1) \quad \int_F \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF$$

umformen lassen. Dabei benutzen wir von der Belegung σ und der Fläche F lediglich die Differenzierbarkeit endlich hoher Ordnung, machen also von dem bislang stets vorausgesetzten analytischen Verhalten keinen Gebrauch. Mit Hilfe der Entwicklungen des § 8 können wir nun auch die Differentiation nach den Aufpunktskoordinaten durch Prozesse, die nur auf partieller Integration beruhen, umformen. Es ist nach Satz 1

$$(2) \quad \nabla_x \int_F \alpha \frac{1}{r} dF [=] \int_F \left[\frac{1}{r} (\nabla_{(0)} \alpha + 2 \alpha H n) - \alpha n \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right] dF$$

und

$$\begin{aligned} (3) \quad & \nabla_x \int_F \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF [=] \int_F \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) (\nabla_{(0)} \beta + 2 \beta H n) dF \\ & + \int_F \frac{1}{r} [\nabla_{(1)} \beta + \beta (\nabla_{(0)} 2H + I_2 n)] dF - \int_F \beta n \frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{1}{r} dF. \end{aligned}$$

Nach (7, 10) ist aber

$$(4) \quad \int_F \beta n \frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{1}{r} dF [=] - \int_F \frac{1}{r} \Delta_{(0)} \beta n dF + \int_F 2H \beta n \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF.$$

Es wird

$$(5) \quad \Delta_{(0)} \beta n \doteq n \Delta_{(0)} \beta + \beta \Delta_{(0)} n + 2 \beta_{1\mu} n_{,\mu} \gamma^{\mu\nu}.$$

Nach (8, 38) ist

$$(6) \quad \Delta_{(0)} n = -2 \nabla_{(0)} H \cdot I_2 n$$

und mit (9, 26)

$$(7) \quad \beta_{1\sigma} n_{1\mu} \gamma^{\mu\sigma} = -\beta_{1\sigma} L_{\mu}^{\sigma} \tilde{f}_{1\sigma} \gamma^{\mu\sigma} = -\beta_{1\sigma} L^{\sigma\sigma} \tilde{f}_{1\sigma} = -\nabla_{(1)} \beta.$$

Es wird daher

$$(8) \quad \Delta_{(0)} \beta n = n \Delta_{(0)} \beta - \beta (\nabla_{(0)} 2H + I_2 n) - 2 \nabla_{(1)} \beta,$$

und wir erhalten

$$(9) \quad \begin{aligned} & \nabla_x \int \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF \\ [=] & \int \frac{1}{r} (\nabla_{(0)} \alpha + 2H n \cdot \alpha - \nabla_{(1)} \beta - n \Delta_{(0)} \beta) dF \\ & + \int \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) (-\alpha n + \nabla_{(0)} \beta) dF. \end{aligned}$$

Drücken wir ∇ im x -System aus, so wird also

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \int \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF [=] \int \left(\alpha_{(i)} \frac{1}{r} + \beta_{(i)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF$$

mit

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha_{(i)} &= e_i (\nabla_{(0)} \alpha + 2H \alpha n - \nabla_{(1)} \beta - n \Delta_{(0)} \beta) \\ \beta_{(i)} &= e_i (-\alpha n + \nabla_{(0)} \beta), \end{aligned}$$

wobei e_i den Einheitsvektor in Richtung der x^i -Achse darstellt. Entsprechend erhalten wir

$$(12) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \int \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF [=] \int \left(\alpha_{(i)(k)} \frac{1}{r} + \beta_{(i)(k)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF$$

mit

$$(13) \quad \begin{aligned} \alpha_{(i)(k)} &= e_i (\nabla_{(0)} \alpha_{(k)} + 2H n \alpha_{(k)} - \nabla_{(1)} \beta_{(k)} - n \Delta_{(0)} \beta_{(k)}) \\ \beta_{(i)(k)} &= e_i (-\alpha_{(k)} n + \nabla_{(0)} \beta_{(k)}). \end{aligned}$$

Es ist dabei offenbar $\alpha_{(i)(k)} = \alpha_{(k)(i)}$; $\beta_{(i)(k)} = \beta_{(k)(i)}$.

Nehmen wir zunächst noch an, daß sowohl die Fläche als auch die Belegungen analytisch sind, so ergibt sich aus (12) für die Sprungrelationen der zweiten Ableitungen im x -System

$$(14) \quad \left[\int \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF \right]_{i,k} = -4\pi \beta_{(i)(k)}.$$

Diese müssen aber mit den in (6, 32) und (6, 33) ausgerechneten Werten übereinstimmen, so daß

$$(15) \quad \begin{aligned} \beta_{(\mu)(\nu)} &\doteq 4\pi (\alpha L_{\mu\nu} + \beta_{1(\mu\nu)}) \\ \beta_{(3)(\nu)} &\doteq 4\pi (-\alpha_{1\nu} + k_{(\nu)} \beta_{1\nu}) \\ \beta_{(3)(3)} &\doteq 4\pi (-2H\alpha - \Delta_{(0)} \beta) \end{aligned}$$

wird. Die Rekursion (13) können wir beliebig fortsetzen und die Sprungrelationen vermittle (14) ausdrücken. Die auf diese Weise gebildeten Größen müssen dann mit den nach dem Verfahren des § 6 berechneten Sprüngen übereinstimmen.

Um möglichst schwache Voraussetzungen für die Existenz der Ableitungen zu entwickeln, benutzen wir

Lemma 8: Ist F ein zweimal stetig differenzierbares Flächenstück und sind α und β auf F stetige Funktionen, so ist

$$\int_{F \rightarrow +0} \frac{1}{r_{st}} \alpha dF = \int_{F \rightarrow -0} \frac{1}{r_{st}} \alpha dF = \int_F \frac{1}{r_{st}} \alpha dF$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{F \rightarrow -0} \beta \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{1}{r_{st}} dF &= -2\pi\beta + \int_F \beta \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{1}{r_{st}} dF \\ \int_{F \rightarrow +0} \beta \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{1}{r_{st}} dF &= 2\pi\beta + \int_F \beta \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{1}{r_{st}} dF, \end{aligned}$$

wobei durch die Symbole $\int_{F \rightarrow -0}$ und $\int_{F \rightarrow +0}$ die Grenzwerte der Integrale bei Annäherung

des Aufpunktes entlang der positiven bzw. negativen Normalen an den inneren Punkt P von F bezeichnet werden. Das Symbol \int_F besagt, daß der Aufpunkt (x) auf F liegt.

Einen Beweis dieses bekannten Satzes gibt O. D. KELLOGG⁹⁾. Mit Hilfe von (10) und (11) ergibt sich

Lemma 9: Ist F dreimal stetig differenzierbar, und α einmal, β aber zweimal stetig differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} \int_{F \rightarrow -0} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF & (=) -2\pi\beta_{(i)} + \int_F \left(\alpha_{(i)} \frac{1}{r} + \beta_{(i)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF \\ \int_{F \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF & (=) +2\pi\beta_{(i)} + \int_F \left(\alpha_{(i)} \frac{1}{r} + \beta_{(i)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF, \end{aligned}$$

wobei (=) andeutet, daß es sich um eine Übereinstimmung bis auf in der Umgebung des inneren Punktes P von F analytische Funktionen handelt.

Zum Beweise bemerken wir, daß die Umformung (10) wegen des Gliedes $\Delta_{(0)} n$ in (5) die dreimalige Differenzierbarkeit der Fläche benötigt. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so folgt Lemma 9 aus Lemma 8, da die $\alpha_{(i)}$ und $\beta_{(i)}$ unter den genannten Bedingungen stetig sind.

Wir wollen Lemma 9 auf höhere Ableitungen ausdehnen und halten dazu fest, daß die Umformung (10) die dreimalige Differenzierbarkeit von F und die Stetigkeit von $\alpha_{(i)}$ und $\beta_{(i)}$ verlangt. Es muß also α einmal und β zweimal stetig differenzierbar sein. Für (12) benötigen wir daher analog die stetige Differenzierbarkeit von $\alpha_{(i)}$, während $\beta_{(i)}$ zweimal stetig differenzierbar sein muß. Für α und β folgt daraus zweimalige bzw. dreimalige stetige Differenzierbarkeit.

Durch induktive Fortsetzung dieser Abzählung ergibt sich

Lemma 10: Ist F $(K+1)$ mal, α K mal und β $(K+1)$ mal stetig differenzierbar, so ist für $K \geq 2$

⁹⁾ O. D. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, 1929, S. 160 ff.

$$\frac{\partial^K}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_K}} \int_F \left(\alpha \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF (=) \int_F \left(\alpha_{(i_1) \dots (i_K)} \frac{1}{r} + \beta_{(i_1) \dots (i_K)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dF$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{(i_1) \dots (i_K)} &= c_{i_K} [(\nabla(0) + 2Hn) \alpha_{(i_1) \dots (i_{K-1})} - (\nabla(1) + n \Delta(0)) \beta_{(i_1) \dots (i_{K-1})}] \\ \beta_{(i_1) \dots (i_K)} &= c_{i_K} [-n \alpha_{(i_1) \dots (i_{K-1})} + \nabla(0) \beta_{(i_1) \dots (i_{K-1})}] \end{aligned}$$

Es enthält nämlich $\alpha_{(i_1) \dots (i_K)}$ höchstensdie $(K-1)$ ten Ableitungen von α die K ten Ableitungen von β die K ten Ableitungen der Flächeund $\beta_{(i_1) \dots (i_K)}$ höchstensdie $(K-2)$ ten Ableitungen von α die $(K-1)$ ten Ableitungen von β die $(K-1)$ ten Ableitungen der Fläche.

Für $K=2$ entnimmt man diese Relationen aus (11) und folgert sie dann in vollständiger Induktion. Es kann daher die Umformung (10) K -mal angewandt werden, da $\alpha_{(i_1) \dots (i_K)}$ und $\beta_{(i_1) \dots (i_K)}$ auf Grund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gebildet werden können.

Es lassen sich somit die K -ten Ableitungen der Potentiale einfacher und doppelter Belegungen unter den genannten Bedingungen einseitig stetig ergänzen.

Wir wollen Lemma 10 weiter verschärfen und führen dazu den Begriff der HÖLDERBEDINGUNG höherer Ordnung ein. Denken wir uns in P zu F das x -System eingeführt, so werden wir sagen, die Funktion $f(x^1, x^2)$ genügt in P einer HÖLDERBEDINGUNG der Ordnung K , wenn es ein positives c und eine in

$$(16) \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = \varrho^2 \leq c^2$$

K mal stetig differenzierbare Funktion $f_0(x^1, x^2)$ und zwei positive Konstanten A und α so gibt, daß in (16)

$$(17) \quad |f(x^1, x^2) - f_0(x^1, x^2)| \leq A \varrho^{K+\alpha}$$

ist. Wir beweisen zunächst

Lemma 11: Genügt die Belegung σ für $\varrho < c$ der Bedingung

$$|\sigma| \leq A \varrho^{K+\alpha},$$

so sind die $(K+1)$ ten Ableitungen von

$$\int_F \sigma \frac{1}{r} dF$$

und die K -ten Ableitungen von

$$\int_F \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF$$

auf der x^3 -Achse stetig.

Zum Beweise teilen wir die Fläche F in F_r und $F - F_r$ auf, wobei F_r der in

$$(18) \quad \varrho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq r^2 < c^2$$

gelegene Teil von F ist. Dann wird mit den Bezeichnungen von § 2

$$(19) \quad \int_{F_r} \sigma \frac{1}{r} dF = \int_{F_r} \sigma \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} [(x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 + (x^3 - \varphi)^2]^{-\frac{1}{2}} d\xi^1 d\xi^2.$$

$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leq r^2$

Auf $x^1 = x^2 = 0$ ist daher

$$(20) \quad \left| \frac{\partial^{K+1}}{\partial x^1 \dots \partial x^{K+1}} \int_P \sigma \frac{1}{r} dF \right| \leq B \int |\sigma| [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (x^3 - \varphi)^2]^{-\frac{K+2}{2}} d\xi^1 d\xi^2,$$

$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leq r^2$

woraus sich wegen

$$(21) \quad \left| \frac{\partial^{K+1}}{\partial x^1 \dots \partial x^{K+1}} \int_P \sigma \frac{1}{r} dF \right| \leq B' \tau^2$$

ergibt. Entsprechend folgt

$$(22) \quad \left| \frac{\partial^K}{\partial x^1 \dots \partial x^K} \int_P \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF \right| \leq B'' \tau^2,$$

da die K -ten Ableitungen von $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$ absolut genommen kleiner als $\frac{D}{r^{K+1}}$ sind.

Wir denken uns nun zwei Punkte $(0, 0, x_1^2)$ und $(0, 0, x_2^2)$ auf der x^3 -Achse, die nicht mit P zusammenfallen, und setzen zur Abkürzung

$$(23) \quad \frac{\partial^{K+1}}{\partial x^1 \dots \partial x^{K+1}} \int_{P-P_\tau} \sigma \frac{1}{r} dF = U(x^1, x^2, x^3; \tau).$$

Dann ist

$$(24) \quad |U(0, 0, x_1^2; \tau) - U(0, 0, x_2^2; \tau)| \leq \frac{C|x_1^2 - x_2^2|}{\tau^{K+3}},$$

wie man durch Anwendung des Mittelwertsatzes leicht erkennt. Setzen wir

$$(25) \quad |x_1^2 - x_2^2| = \tau^{K+4},$$

so wird mit Hilfe von (21)

$$(26) \quad |U(0, 0, x_1^2; 0) - U(0, 0, x_2^2; 0)| \leq C' |x_1^2 - x_2^2|^{\frac{n}{K+4}}.$$

Mit

$$(27) \quad V(x^1, x^2, x^3; \tau) = \frac{\partial^K}{\partial x^1 \dots \partial x^K} \int_{P-P_\tau} \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF$$

wird entsprechend

$$(28) \quad |V(0, 0, x_1^2; \tau) - V(0, 0, x_2^2; \tau)| \leq \frac{C|x_1^2 - x_2^2|}{\tau^{K+3}}$$

und nach (22) mit (25)

$$(29) \quad |V(0, 0, x_1^2; 0) - V(0, 0, x_2^2; 0)| \leq C' |x_1^2 - x_2^2|^{\frac{n}{K+4}}.$$

Damit erhalten wir

Satz 2: Ist F $(K+1)$ mal stetig differenzierbar und genügt σ in P einer HÖLDER-Bedingung K -ter Ordnung, gibt es also eine in einer Umgebung von P K mal stetig differenzierbare Funktion σ^* so, daß für $\varrho < c$

$$|\sigma - \sigma^*| \leq A \varrho^{K+2}$$

ist, so lassen sich die K -ten Ableitungen von

$$\int_P \sigma \frac{1}{r} dF = U_{(1)}$$

und die $(K-1)$ -ten Ableitungen von

$$\int_P \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF = U_{(2)}$$

auf der Normalen durch P einseitig stetig ergänzen. Werden die Ableitungen im u -System ausgedrückt, so ergibt sich für die Sprungrelationen

$$[U_{(1)}]_{j \text{ mal}}^{3 \dots 3 | \mu_1 \dots | \mu_s} = 4 \pi (\Omega_{(j)}^{(2)} \sigma^*)_{|\mu_1 \dots | \mu_s}; j + s \leq K$$

$$[U_{(2)}]_{j \text{ mal}}^{3 \dots 3 | \mu_1 \dots | \mu_s} = -4 \pi (\Omega_{(j)}^{(1)} \sigma^*)_{|\mu_1 \dots | \mu_s}; j + s \leq K - 1.$$

Wir setzen nämlich

$$(30) \quad U_1 = \int_P \sigma^* \frac{1}{r} dF + \int_P (\sigma - \sigma^*) \frac{1}{r} dF$$

und

$$(31) \quad U_2 = \int_P \sigma^* \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF + \int_P (\sigma - \sigma^*) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dF.$$

Dann sind nach Lemma 4 die K -ten bzw. $(K-1)$ -ten Ableitungen der zweiten Integrale in (29) und (30) auf der Normalen stetig, während die entsprechenden Ableitungen der ersten Integrale nach Lemma 3 einseitig stetig ergänzt werden können. Die Sprungrelationen lassen sich durch die $\beta_{(i_1) \dots (i_s)}$ ausdrücken, wobei höchstens die K -ten Ableitungen von σ^* auftreten. Für analytische Belegungen und analytische Flächen hatten wir einfachere Ausdrücke für die Sprungrelationen entwickelt. Da beide Ausdrücke als lineare Differentialoperatoren höchstens K -ter Ordnung dargestellt werden können, müssen sie übereinstimmen.

Wir wollen noch die Differenzierbarkeitsbedingungen für die (einseitige) Stetigkeit der Potentiale von Belegungen höherer Vielfachheit entwickeln. Dazu bestimmen wir zunächst die Ordnung der Operatoren $\Phi_{(j)}^{(\mu)}$.

Lemma 12: Es ist $\Phi_{(N)}^{(1)}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ und $\Phi_{(N)}^{(2)}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2 \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$.

Wir bezeichnen hier mit $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Zum Beweise gehen wir auf die Rekursionsformel

$$(32) \quad \begin{aligned} \Phi_{(N+2)}^{(\mu)} &= \binom{N+1}{1} \Phi_{(N+1)}^{(\mu)} 2H - \binom{N+1}{2} \Phi_{(N)}^{(\mu)} 2K \\ &\quad - \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \Phi_{(j)}^{(\mu)} \Delta_{(N-j)} \end{aligned}$$

zurück und erhalten in vollständiger Induktion, daß die Ordnung von $\Phi_{(N+2)}^{(1)}$ höchstens gleich dem Maximum von $2 \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$ und $2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 2$ ist, da die Glieder $\Phi_{(N+1)}^{(1)}$ und $\Phi_{(N)}^{(1)} \Delta_{(0)}$ die Differentiationen höchster Ordnung enthalten. Damit ist aber die Ordnung von $\Phi_{(N+2)}^{(1)}$ höchstens gleich $2 \left\lfloor \frac{N+2}{2} \right\rfloor$. Entsprechend wird die Behauptung für die Operatoren $\Phi_{(N)}^{(2)}$ bewiesen.

Die in § 4, Lemma 2 formulierte Beziehung bleibt gültig, wenn die Fläche F mindestens $(N + 2)$ mal differenzierbar ist. Es ergibt sich daher

Satz 3: Ist F ein N mal stetig differenzierbares Flächenstück und σ eine $2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ mal stetig differenzierbare Belegung, so ist für $N \geq 2$

$$U_{(N+1)} = \int_F \sigma \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^N \frac{1}{r} dF$$

einseitig stetig, und es gilt die Sprungrelation

$$[U_{(N+1)}] = -4\pi \Phi_{(N)}^{(2)} \sigma.$$

§ 10. Zusammenfassung.

Die Behandlung der Singularitäten der Potentiale einfacher und mehrfacher Flächenbelegungen wurde von mehreren Gesichtspunkten aus durchgeführt, die durch die Stichworte „Formalismus“, „Koordinatensystem“ und „Differenzierbarkeitsbedingungen“ gekennzeichnet werden können. Das Ziel wurde weiter gesteckt als in den genannten Arbeiten von E. SCHMIDT, da nicht nur die Existenz der Grenzwerte der Ableitungen der Potentiale einfacher und doppelter Belegungen, sondern auch die explizite Angabe der Sprungrelationen von Potentialen der Belegungen beliebig hoher Vielfachheit angestrebt wurde.

Dieses Ziel führte notwendig zu einem eingehenden Studium der formalen Seite des Fragenkreises, bei dem zweckmäßigerweise Fläche und Belegung als analytisch vorausgesetzt wurden. Die Berechnung vereinfacht sich wesentlich, wenn statt des bisher benutzten Tangenten-Normalensystems ein krummliniges Koordinatensystem – das u -System – benutzt wird, das die Geometrie der Fläche und ihre Beziehung zu den Sprungrelationen besser zum Ausdruck bringt. Zur Formulierung der Sprungrelationen werden zwei Systeme von Operatoren eingeführt, die mit Hilfe der Beltramischen Differentiation invariant formuliert werden können. Durch die Benutzung des genannten Koordinatensystems ergeben sich Integralsätze und differentialgeometrische Identitäten als Spezialfälle allgemeinerer Beziehungen für Potentialfunktionen. Die Verknüpfung der differentialgeometrisch definierten Operatoren und der Sprungrelationen wird durch den Existenzsatz von CAUCHY-KOWALEWSKI erreicht.

Durch ein System in § 9 entwickelter Identitäten wird dann die Differentiation der Potentiale durch Prozesse partieller Integration in der Fläche auf die Diskussion der Potentiale einfacher und doppelter Flächenbelegungen zurückgeführt. Damit kann die Forderung des analytischen Verhaltens von Fläche und Belegung durch Differenzierbarkeitsbedingungen ersetzt werden. Durch die genauere Beschreibung dieser Prozesse gelingt es, die Untersuchungen von E. SCHMIDT zu erweitern und die Formulierung der Sprungrelationen für beliebig hohe Ableitungen durch übersichtliche Rekursionsbeziehungen explizit zu ermöglichen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1950.)

Über die Homotopietypen gewisser Polyeder.

Von

E. BURGER in Frankfurt/Main.

Einleitung.

Während die Aufzählung der Homotopietypen der asphärischen Räume, d. h. derjenigen Räume, für die alle Homotopiegruppen außer der ersten, der Fundamentalgruppe, verschwinden, durch HUREWICZ in seiner grundlegenden Arbeit [13] heute bereits zu den klassischen Resultaten der Homotopietheorie gehört, ist die entsprechende nächst einfache Frage in dieser Richtung, nämlich die Frage nach den Homotopietypen derjenigen Räume, für die außer der Fundamentalgruppe noch eine weitere Homotopiegruppe nicht verschwindet, lange Zeit unbeantwortet geblieben. Erst vor kurzer Zeit gelang hier ein wesentlicher Fortschritt. EILENBERG und MACLANE [7] entdeckten nämlich eine neue Homotopieinvariante, die für das genannte Problem wesentlich ist. Die Fragestellung, die zu dieser Invarianten führte, war folgende.

Aus der oben genannten HUREWICZschen Klassifikation der asphärischen Polyeder (nämlich vermöge ihrer Fundamentalgruppe) folgt insbesondere, daß die Fundamentalgruppe eines asphärischen Polyeders sämtliche Homologiegruppen bestimmt. Es entstand so die Aufgabe, ein rein algebraisches Verfahren zur Berechnung der Homologiegruppen aus der Fundamentalgruppe anzugeben. Diese Aufgabe wurde fast gleichzeitig von HOFF [10], EILENBERG-MACLANE [5] und ECKMANN [1] gelöst. HOFF ([9] Nachtrag) hatte schon vorher bemerkt, daß die HUREWICZschen Methoden auch noch unter der allgemeineren Voraussetzung erfolgreich bleiben, daß für das vorgelegte Polyeder \bar{K} die Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{K})$ nur für $1 < i < n$ verschwinden. Dann bestimmt wieder die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{K})$ die Homologiegruppen $H_i(\bar{K})$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ sowie eine gewisse Faktorgruppe der n -ten Homologiegruppe $H_n(\bar{K})$. Im Anschluß an diese Untersuchungen stellten nun EILENBERG und MACLANE in [7] die Frage, ob im letzten Falle die ganze n -te Homologiegruppe $H_n(\bar{K})$ durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{K})$, die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(\bar{K})$ und die Operationsweise von $\pi_1(\bar{K})$ auf $\pi_n(\bar{K})$ bestimmt ist. Es zeigt sich, daß das nicht der Fall ist. Vielmehr ist hierzu eine weitere Homotopievariante von \bar{K} notwendig, eben jene oben erwähnte Invariante. Sie ist eine gewisse charakteristische Kohomologiekategorie k^{n+1} aus der $(n+1)$ -ten Kohomologiegruppe $H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}), \pi_n(\bar{K}))$ der Gruppe $\pi_1(\bar{K})$ über der Koeffizientengruppe $\pi_n(\bar{K})$ ¹⁾. Diese Untersuchung von EILENBERG-MACLANE verläuft zunächst vollkommen homologiethoretisch: Seien \tilde{K} und \tilde{K}' zwei Komplexe mit der gleichen Automorphismengruppe W . Seien \tilde{K} und \tilde{K}' azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$. Für diese Komplexe

¹⁾ Über die Kohomologiegruppen von Gruppen vgl. insbesondere EILENBERG-MACLANE [6] sowie allgemein EILENBERG [4].

werden ebenfalls (kombinatorische) charakteristische Kohomologieklassen aus $H^{n+1}(W, H_n(\tilde{K}))$ bzw. $H^{n+1}(W, H_n(\tilde{K}'))$ eingeführt. Seien für \tilde{K} und \tilde{K}' die n -ten Homologiegruppen H_n und die charakteristischen Kohomologieklassen (aus $H^{n+1}(W, H_n)$) einander gleich. Dann wird gezeigt, daß es Kettentransformationen (d. h. W -treue, randtreue Homomorphismen der Kettengruppen) $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts \tilde{K}^{n+1} von \tilde{K} in \tilde{K}'^{n+1} und $k': \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$ gibt, so daß die zusammengesetzten Transformationen k' und kk' beide in den Dimensionen $\leq n$ zur identischen Kettentransformation kettenhomotop sind (d. h. es gibt W -treue Homomorphismen D der i -ten Kettengruppe von \tilde{K} in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von \tilde{K} ($i = 0, 1, \dots, n$), so daß $\partial D = k'k - 1 - D\partial$ ist, wobei 1 die identische Kettentransformation und ∂ den Randoperator bedeutet). Kurz gesagt: \tilde{K} und \tilde{K}' sind in den Dimensionen $\leq n$ vom selben „Kettenhomotopietyp“. Insbesondere sind also ihre n -ten äquivarianten Kohomologiegruppen¹⁾ isomorph. Faßt man \tilde{K} und \tilde{K}' als universelle Überlagerungen zweier in den Dimensionen $2, 3, \dots, n-1$ asphärischer Polyeder und W als die zugehörige Deckbewegungsgruppe auf, so werden die äquivarianten Kohomologiegruppen von \tilde{K} und \tilde{K}' (bei trivialer Operationsweise von W auf die Koeffizientengruppe) die gewöhnlichen Kohomologiegruppen der Grundkomplexe. Es wird also tatsächlich die n -te Kohomologiegruppe eines in den Dimensionen $2, 3, \dots, n-1$ asphärischen Polyeders durch die Fundamentalgruppe, die n -te Homotopiegruppe und die EILENBERG-MACLANESche Invariante bestimmt.

An diese Ergebnisse über den „Kettenhomotopietyp“ schließt sich nun naturgemäß die Frage an, ob man sie nicht verwerten kann, um eine Antwort auf die oben erwähnte Frage nach den echten Homotopietypen der Polyeder \tilde{K} mit $\pi_i(\tilde{K}) = 0$ für $i \neq 1, n$ zu erhalten. Man hat hierzu im wesentlichen nur die Kettentransformationen und -homotopien des oben genannten Satzes von EILENBERG-MACLANE durch stetige (bzw. simpliziale) Abbildungen und Homotopien zu realisieren. Die Untersuchung solcher Realisierungsfragen war aber bereits von J. H. C. WHITEHEAD in [19] in Angriff genommen worden, so daß eine Kombination seiner Methoden mit den Ergebnissen von EILENBERG-MACLANE nahe lag. In einer neueren Arbeit von MACLANE und J. H. C. WHITEHEAD [14] wird dieser Gedanke aufgenommen. MACLANE und WHITEHEAD bestimmen nämlich in [14] den 3-Typ eines beliebigen Polyeders vermittle seiner Fundamentalgruppe, zweiten Homotopiegruppe und seiner Invarianten k^3 . Die Frage nach dem 3-Typ eines beliebigen Polyeders ist im wesentlichen gleichwertig mit der Frage nach dem Homotopietyp eines Polyeders \tilde{K} mit $\pi_i(\tilde{K}) = 0$ für $i \geq 3$, d. h. mit dem Spezialfall $n = 2$ des oben angeschnittenen Problems der Homotopietypen der Polyeder, die in den Dimensionen $\neq 1, n$ asphärisch sind. Zwei Polyeder \tilde{K}, \tilde{L} heißen nämlich vom selben n -Typ, wenn es Abbildungen $f: K^n \rightarrow L^n$ und $g: L^n \rightarrow K^n$ der n -dimensionalen Gerüste gibt, so daß die beiden zusammengesetzten Abbildungen $fg|L^{n-1}: L^{n-1} \rightarrow L^n$ und $gf|K^{n-1}: K^{n-1} \rightarrow K^n$ beide zur Identität homotop sind²⁾.

¹⁾ Vgl. hierzu ELLENBERG [3].

²⁾ Der n -Typ eines Polyeders ist eine Invariante des Homotopietyps (der gleich dem π -Typ ist), also insbesondere eine topologische Invariante.

In der vorliegenden Arbeit wird die Spezialisierung $n = 2$ aufgehoben und ein neuer Beweis für die Realisierbarkeit der Kettentransformationen und -homotopien des Satzes von EILENBERG-MACLANE durch stetige Abbildungen und Homotopien gegeben. Es ergibt sich dann als Hauptergebnis, daß die Übereinstimmung in Fundamentalgruppe, n -ter Homotopiegruppe und EILENBERG-MACLANEScher Invariante für zwei Polyeder, deren sämtliche Homotopiegruppen außer der ersten und n -ten verschwinden, notwendig und hinreichend ist dafür, daß sie vom selben Homotopietyp sind⁴⁾.

Während sich der Beweis von MACLANE-WHITEHEAD bzw. der Realisierungssatz von WHITEHEAD der relativen Homotopiegruppen $\pi_i(K^i, K^{i-1})$ bedient, benutzen wir den älteren Begriff des Homotopierandes, den HOFF in der Arbeit [9] eingeführt hat. Diese Arbeit gab übrigens den Anstoß zu den ganzen oben erwähnten neueren Untersuchungen. Der Vergleich der beiden Methoden macht die Stellung des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie deutlich.

Im § 1 referieren wir über den genannten Satz von EILENBERG-MACLANE und die EILENBERG-MACLANESche Invariante und stellen die notwendigen Grundbegriffe zusammen. Für das rein logische Verständnis der weiteren Untersuchungen genügt die Kenntnis des Inhaltes dieses § 1 ohne weitere Kenntnis der Arbeit [7] von EILENBERG-MACLANE. Zum Verständnis der Gesamtbedeutung des Folgenden ist jedoch eine genauere Kenntnis von [7] unerlässlich. Die §§ 2 und 3 enthalten den eigentlichen Beweis der Realisierbarkeit, und zwar § 2 für die Kettentransformationen und § 3 für die Kettenhomotopien. Die benötigten Sätze über den Homotopierand werden angeführt. Der § 4 enthält einen kurzen Vergleich mit der Beweismethode von WHITEHEAD und einige Bemerkungen über die Stellung des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie. Für eine eingehende Darstellung der relativen Homotopietheorie vergleiche man die Arbeit [12] von HU oder die ersten Abschnitte der Arbeit [8] von FOX. Schließlich machen wir im Schlußparagraphen § 5 einige Bemerkungen über die Abbildungsklassen der Abbildungen beliebiger Polyeder in die betrachteten asphärischen Polyeder. Wir geben im Satz 3 eine gewisse Algebraisierung dieses Problems der Abbildungsklassen.

§ 1. Die EILENBERG-MACLANESche Invariante.

Seien K und K' zwei gewöhnliche zusammenhängende Simplicialkomplexe mit isomorphen Fundamentalgruppen $\pi_1(K) \cong \pi_1(K')$. Wir bezeichnen wie üblich die entsprechenden Polyeder mit \bar{K} bzw. \bar{K}' . Es ist also K bzw. K' eine Simplicialzerlegung des Polyeders \bar{K} bzw. \bar{K}' . Mit \tilde{K} bzw. \tilde{K}' bezeichnen wir die universellen Überlagerungskomplexe von K bzw. K' . \tilde{K} und \tilde{K}' haben isomorphe Deckbewegungsgruppen $\pi_1(K) \cong \pi_1(K')$. Wir wählen einen festen Isomorphismus zwischen diesen Deckbewegungsgruppen und bezeichnen die einander bei diesem Isomorphismus entsprechenden Elemente der beiden Gruppen mit dem gleichen Buchstaben. Die Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ bzw. $C_i(\tilde{K}')$ von \tilde{K} bzw. \tilde{K}' besitzen bekanntlich die Elemente $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$ als Operatoren. Diese Operatoren x sind randtreu. Daher besitzen auch die Zyklengruppen, Rändergruppen und Homologiegruppen von \tilde{K} und \tilde{K}' sämtlich die Elemente x als Operatoren.

⁴⁾ In [14] wird von MACLANE und WHITEHEAD für den Fall $n = 2$ noch erheblich mehr bewiesen, nämlich der genaue Wertebereich der genannten Invarianten bestimmt.

Unter einer deckbewegungstreuen Kettentransformation von \tilde{K} in \tilde{K}' verstehen wir eine Familie von randtreuen Operatorhomomorphismen k (für jede Dimension einen) der Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ in die Kettengruppen $C_i(\tilde{K}')$, wobei der Operatorhomomorphismus k in der Dimension Null jede (positiv signierte) Ecke von \tilde{K} auf eine (positiv signierte) Ecke von \tilde{K}' (und nicht auf ein Multiplum einer solchen) abbildet. Es muß also gelten

$$kx\xi^i = xk\xi^i; \quad k\partial\xi^i = \partial k\xi^i; \quad k\sigma^0 = \sigma'^0$$

für alle $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$, alle Ketten $\xi^i \in C_i(\tilde{K})$ und alle Nullsimplexe $\sigma^0 \in \tilde{K}$ mit geeigneten Nullsimplexen $\sigma'^0 \in \tilde{K}'$, wobei ∂ den Randoperator (in \tilde{K} und \tilde{K}') bedeutet. Offenbar induziert jede deckbewegungstreue Kettentransformation Operatorhomomorphismen der Zyklen-, Ränder- und Homologiegruppen von \tilde{K} in die von \tilde{K}' .

Zwei deckbewegungstreue Kettentransformationen k_1 und k_2 von \tilde{K} in \tilde{K}' heißen deckbewegungstreu kettenhomotop⁵⁾, wenn es eine Familie von Operatorhomomorphismen D (für jede Dimension einen) der Kettengruppen $C_i(\tilde{K})$ in die Kettengruppen $C_{i+1}(\tilde{K}')$ gibt, derart, daß für jede Kette $\xi^i \in C_i(\tilde{K})$

$$\partial D\xi^i = k_1\xi^i - k_2\xi^i - D\partial\xi^i$$

gilt (für $i = 0$ ist das letzte Glied auf der rechten Seite gleich Null zu setzen). Wir schreiben dann zur Abkürzung: $k_1 \simeq k_2$. Dieser Begriff der Kettenhomotopie ist offenbar das kombinatorische Analogon zum gewöhnlichen Homotopiebegriff.

Jede Kettentransformation $k: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ definiert auch für jedes q für das q -dimensionale Gerüst \tilde{K}^q von \tilde{K} eine Kettentransformation $k|_{\tilde{K}^q}: \tilde{K}^q \rightarrow \tilde{K}'^q$. Sind die Kettentransformationen $k_1|_{\tilde{K}^q}$ und $k_2|_{\tilde{K}^q}$ kettenhomotop, $k_1|_{\tilde{K}^q} \simeq k_2|_{\tilde{K}^q}$, so sagen wir, daß k_1 und k_2 in den Dimensionen $\leq q$ kettenhomotop sind, und schreiben: $k_1 \simeq k_2$ (dim $\leq q$). Das bedeutet offenbar, daß die Homotopieoperatoren D nur bis zur Dimension $i = q$ einschließlich definiert sind.

Unter der weiteren Voraussetzung, daß die zweite bis $(n-1)$ -te Homotopiegruppe von K' verschwindet,

$$\pi_i(K') = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

gibt es, wie man durch eine induktive Konstruktion leicht einsieht, eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^n \rightarrow \tilde{K}'^n$ des n -dimensionalen Gerüsts \tilde{K}^n der universellen Überlagerung \tilde{K} von K in \tilde{K}^n . Der Fortsetzung dieser Kettentransformation k über die Dimension n hinaus stellt sich jedoch ein Hindernis entgegen, das durch die „Obstruktion“

$$\eta k \partial \sigma^{n+1} \in H_n(\tilde{K}')$$

⁵⁾ Im folgenden werden wir auf den universellen Überlagerungen immer nur deckbewegungstreue Kettentransformationen und Kettenhomotopien betrachten und lassen daher das Adjektiv „deckbewegungstreu“ gelegentlich fort.

⁶⁾ $k|_{\tilde{K}^q}$ bedeutet die Kettentransformation k , nur auf dem q -dimensionalen Gerüst \tilde{K}^q betrachtet. Dieselbe Bezeichnungsweise verwenden wir auch im folgenden Fall: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y und sei $A \subset X$ ein Unterraum von X . Dann bedeutet $f|_A$ die Abbildung f , nur auf dem Unterraum A betrachtet, also $f|_A: A \rightarrow Y$.

gemessen wird. Hierbei bedeutet σ^{n+1} ein beliebiges $(n+1)$ -Simplex von \tilde{K} , η den natürlichen Homomorphismus der Zyklengruppe auf die Homologiegruppe $H_n(\tilde{K}')$. Faßt man diese Obstruktion als $(n+1)$ -Kokette von \tilde{K} mit Koeffizienten in $H_n(\tilde{K}')$ auf, indem man das Element $\eta k \partial \sigma^{n+1} \in H_n(\tilde{K}')$ als Funktionswert $f(\sigma^{n+1})$ auf dem Simplex σ^{n+1} ansieht, so ist diese Obstruktion ein deckbewegungstreuer Kozyklus. Dabei heißt eine Kokette f deckbewegungstreu, wenn

$$f(x\sigma^{n+1}) = x f(\sigma^{n+1})$$

gilt für alle Simplexe $\sigma^{n+1} \in \tilde{K}$ und alle Elemente $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$. Der Korand einer deckbewegungstreuen Kokette ist selbst deckbewegungstreu, und daher kann man mittels der deckbewegungstreuen Koketten Kohomologiegruppen $H_e^{n+1}(\tilde{K}, G)^7$ bilden. Die Kohomologiekategorie der Obstruktion von k , also das Element von $H_e^{n+1}(\tilde{K}, H_n(\tilde{K}'))$, das sie bestimmt, hängt nun gar nicht von der speziellen Kettentransformation k ab, sondern nur von den Komplexen \tilde{K} und \tilde{K}' , immer vorausgesetzt, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(K')$ d. h. die Homologiegruppen $H_i(\tilde{K}') = 0$ sind für $2 \leq i \leq n-1$.

Durchlaufe nun K' alle Komplexe mit einer festen Fundamentgruppe $\pi_1(K') = \pi_1$ und verschwindenden Homotopiegruppen $\pi_i(K')$ für $2 \leq i \leq n-1$. Wir wählen für den Komplex \tilde{K} einen „Standardkomplex“ K_{π_1} mit der Automorphismengruppe π_1 und erhalten dann als Kohomologiekategorie der Obstruktion einer beliebigen π_1 -treuen Kettentransformation $k: K_{\pi_1} \rightarrow \tilde{K}'^n$ eine nur von \tilde{K}' abhängige „charakteristische Kohomologiekategorie“ aus $H_e^{n+1}(K_{\pi_1}, H_n(\tilde{K}'))$. Der von EILENBERG [3] und ECKMANN [1] eingeführte Standardkomplex K_{π_1} ist zwar keine universelle Überlagerung eines Simplicialkomplexes, sondern ein abstrakter Komplex mit der Automorphismengruppe π_1 . Aber für ihn gelten die sämtlichen oben benutzten Tatsachen gleichfalls⁸⁾. Die mittels der deckbewegungstreuen Koketten von K_{π_1} definierten Kohomologiegruppen $H_e^q(K_{\pi_1}, G)$ des Komplexes K_{π_1} über der Koeffizientengruppe G , auf welche π_1 als Gruppe von Operatoren wirkt, sind die von EILENBERG-MACLANE früher [6] eingeführten Kohomologiegruppen $H^q(\pi_1, G)$ der Gruppe π_1 . Die charakteristische Kohomologiekategorie des Komplexes \tilde{K}' ist also ein Element $k_{\tilde{K}'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(K'), H_n(\tilde{K}'))$.

Beachten wir, daß nach dem HUREWICZschen Äquivalenzsatz die n -te Homotopiegruppe $H_n(\tilde{K}')$ der Überlagerung \tilde{K}' isomorph ist zur n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(K')$ des Grundkomplexes K' , so können wir die charakteristische Kohomologiekategorie auch auffassen als Element der $(n+1)$ -ten Kohomologiegruppe der Gruppe $\pi_1(K')$ über der Koeffizientengruppe $\pi_n(K')$. Wir nennen sie dann die EILENBERG-MACLANESche Invariante des Polyeders \tilde{K}'^9 .

$$k_{\tilde{K}'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\tilde{K}'), \pi_n(\tilde{K}')).$$

⁷⁾ Sie heißen bei EILENBERG [3] equivariant cohomology groups und sind isomorph mit den Kohomologiegruppen von K über geeigneten lokalen Koeffizientengruppen im Sinne von STEENROD [17]. G bezeichnet allgemein die Koeffizientengruppe, die also hier die Elemente der Gruppe $\pi_1(K)$ als Operatoren besitzen muß. In unserem Falle ist $G = H_n(\tilde{K}')$.

⁸⁾ Vgl. im einzelnen [3] und [7].

⁹⁾ das also in den Dimensionen 2, 3, ..., $n-1$ asphärisch ist.

Sie ist nämlich, wie in [7] bewiesen wird ([7], S. 66/67), eine topologische Invariante des Polyeders \bar{K}' . Sie ist sogar eine Invariante des Homotopie-typs des Polyeders \bar{K}' , wie man aus einer modifizierten Definition in [7], S. 84 leicht erkennt.

Unsere weiteren Überlegungen schließen nun an den folgenden Satz der Arbeit [7] von EILENBERG-MACLANE an:

Satz von EILENBERG-MACLANE. Seien \tilde{K} und \tilde{K}' zwei universelle Überlagerungskomplexe mit gleicher Deckbewegungsgruppe π_1^{10} , die in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$ azyklisch sind, $H_i(\tilde{K}) = H_i(\tilde{K}') = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$, und gleiche n -te Homologiegruppen $H_n = H_n(\tilde{K}) = H_n(\tilde{K}')^{10}$ sowie gleiche charakteristische Kohomologieklassen $l^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1, H_n)$ haben. Dann gibt es deckbewegungstreue Kettentransformationen

$$k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1} \text{ und } k': \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1},$$

die beide in der gemeinsamen Homologiegruppe H_n die Identität induzieren und für die die zusammengesetzten Kettentransformationen $k'k$ und kk' beide zur Identität deckbewegungstreu kettenhomotop sind in den Dimensionen $\leq n$,

$$k'k \simeq 1 \text{ (dim } \leq n); \quad kk' \simeq 1 \text{ (dim } \leq n).$$

Dieser Satz von EILENBERG-MACLANE soll nun im folgenden auf die Untersuchung der Homotopietypen derjenigen Polyeder angewendet werden, bei denen außer π_1 und π_n alle Homotopiegruppen verschwinden.

§ 2. Realisierung der Kettentransformationen.

Seien K und K' zwei Komplexe, \bar{K} und \bar{K}' die zugehörigen Polyeder. Sie seien zusammenhängend und in den Dimensionen $\neq 1, n$ asphärisch, d. h. die Homotopiegruppen $\pi_i(K)$ und $\pi_i(K')$ für $i \neq 1, n$ verschwinden. Ferner seien ihre Fundamentalgruppen und ihre n -ten Homotopiegruppen isomorph,

$$(1) \quad \pi_1(K) \cong \pi_1(K'); \quad \pi_n(K) \cong \pi_n(K').$$

Wir beziehen die Fundamental- und Homotopiegruppen in K und K' auf feste Anfangspunkte und wählen ein für alle mal einen festen Isomorphismus zwischen ihnen aus. Vermöge dieses Isomorphismus seien die EILENBERG-MACLANESchen Invarianten $k_K^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}), \pi_n(\bar{K}))$ und $k_{K'}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1(\bar{K}'), \pi_n(\bar{K}'))$ von \bar{K} und \bar{K}' einander gleich.

Seien \tilde{K} und \tilde{K}' die universellen Überlagerungen von K und K' . Dann sind \tilde{K} und \tilde{K}' zusammenhängend und azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$, haben gleiche Deckbewegungsgruppen $\pi_1 = \pi_1(K) = \pi_1(K')$, gleiche n -te Homologiegruppen $H_n = \pi_n(K) = \pi_n(K')$ und gleiche charakteristische Kohomologieklassen $l^{n+1} \in H^{n+1}(\pi_1, H_n)$. Dann gibt es also nach EILENBERG-MACLANE eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts von \tilde{K} in das von \tilde{K}' sowie eine deck-

¹⁰ Die Deckbewegungsgruppen und n -ten Homologiegruppen von \tilde{K} und \tilde{K}' sind also mittels eines bestimmten Isomorphismus identifiziert, und im Sinne dieses selben Isomorphismus sind die charakteristischen Kohomologieklassen einander gleich.

bewegungstreue Kettentransformation $k' : \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$, derart, daß die beiden zusammengesetzten Kettentransformationen

$$k'k : \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1} \text{ und } kk' : \tilde{K}'^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$$

in den Dimensionen $\leq n$ zur Identität kettenhomotop sind. Im folgenden wollen wir nun diese Kettentransformationen und -homotopien durch simpliziale Abbildungen und Homotopien realisieren.

Betrachten wir zunächst die Kettentransformation k und beginnen mit dem nulldimensionalen Gerüst \tilde{K}^0 . k ordnet definitionsgemäß jeder (positiv signierten) Ecke von \tilde{K} eine (positiv signierte) Ecke von \tilde{K}' zu, wobei für alle Ecken σ^0 von \tilde{K} und alle Deckbewegungen $x \in \pi_1(K) = \pi_1(K')$

$$k(x\sigma^0) = xk(\sigma^0)$$

ist. Daher liefert die Kettentransformation k unmittelbar eine deckbewegungstreue Abbildung Φ des nulldimensionalen Gerüsts \tilde{K}^0 von \tilde{K} in \tilde{K}' , nämlich

$$(2) \quad \Phi(\sigma^0) = k(\sigma^0)$$

für alle Ecken σ^0 von \tilde{K}^0 .

Gehen wir zum eindimensionalen Gerüst \tilde{K}^1 über. Sei σ^1 eine festgewählte orientierte Strecke aus \tilde{K} mit dem Rand $\partial\sigma^1 = p_1 - p_0$. Durch die Kettentransformation k ist dann die eindimensionale Kette $k(\sigma^1)$ in \tilde{K}' definiert. Wegen der Randtreue von k ist

$$\partial k(\sigma^1) = kp_1 - kp_0.$$

Eine eindimensionale Kette eines Komplexes mit dem Rand $b - a$ ist aber immer von folgender Art: Sie besteht aus einer (endlichen) Anzahl von geschlossenen Kantenwegen des Komplexes und einem Kantenweg, der von a nach b führt¹¹⁾. Das sieht man z. B. durch Induktion nach der Streckenzahl der Kette sofort ein. Bestehe also die Kette $k(\sigma^1)$ von \tilde{K}' aus den geschlossenen Kantenwegen w'_1, w'_2, \dots, w'_r und dem Weg w'_{r+1} von kp_0 nach kp_1 . Wir wählen auf jedem der Wege w'_i ($i = 1, 2, \dots, r$) beliebig eine Ecke p'_i und verbinden kp_0 mit p'_i durch einen beliebigen Kantenweg h_i . Dann betrachten wir den Kantenweg $w' = h_1 w'_1 h_1^{-1} \dots h'_r w'_r h'_r^{-1} w'_{r+1}$. Er führt von kp_0 nach kp_1 und liefert, wenn man ihn als eindimensionale Kette auffaßt, die Kette $k\sigma^1$. Nun unterteilen wir σ^1 in so viele Strecken, wie der Weg w' durchläuft, und bilden die Teilstrecken von σ^1 linear auf die von w' ab. Die so erhaltene Abbildung Φ von σ^1 in \tilde{K}' stimmt dann jedenfalls auf den Endpunkten von σ^1 mit der dort bereits definierten Abbildung Φ überein.

Die Auswahl der Hilfswege h_i ist dabei ganz beliebig. Hierin liegt einer der Vorzüge der Benutzung der universellen Überlagerung und der Überlagerungsabbildung. Man hätte an sich ja auch von der Kettenabbildung der Grundkomplexe ausgehen können und dort die obige Konstruktion ausführen können. Dann müßte jedoch die Auswahl der Hilfswege jedenfalls so getroffen werden, daß bei der Abbildung ein geschlossener nullhomotoper Weg in einen nullhomotopen Weg übergeht, damit eine Fortsetzung der Abbildung in höhere Dimensionen möglich ist. Die Frage nach der Möglichkeit einer solchen Auswahl der Hilfswege umgeht man am einfachsten durch Übergang zur universellen Überlagerung.

¹¹⁾ Wenn $b = a$ ist, so ist auch der letzte Kantenweg geschlossen.

Wir haben also jetzt die Abbildung Φ für unsere festgewählte Strecke σ^1 von \tilde{K} definiert. Man hat nun noch darauf zu achten, daß die Gesamtabbildung Φ deckbewegungstreu wird. Man darf also nicht die obige Konstruktion von Φ für alle 1-Simplexe von \tilde{K} unabhängig voneinander durchführen, sondern muß immer die übereinanderliegenden Simplexe zusammen betrachten. Das macht aber keine Schwierigkeit. Für die Strecke $x\sigma^1$, wo x eine beliebige Deckbewegung von \tilde{K} bedeutet, wird nämlich $\partial x\sigma^1 = xp_1 - xp_0$ und $k(x\sigma^1) = xk\sigma^1$. Dann besteht aber $k(x\sigma^1)$ aus den geschlossenen Wegen xw'_1 , xw'_2, \dots, xw'_r und dem Weg xw'_{r+1} von xkp_0 nach xkp_1 , und man kann die Hilfswege für $k(x\sigma^1)$ als die x -Bilder der Hilfswege h'_i von $k(\sigma^1)$ wählen, wodurch dann

$$(3) \quad \Phi | x\sigma^1 = x\Phi | \sigma^1$$

wird. Auf diese Weise ist also die Abbildung Φ als deckbewegungstreue Abbildung des Gerüsts \tilde{K}^1 in \tilde{K}' definiert. Sie ist in einer gewissen Unterteilung des eindimensionalen Gerüsts \tilde{K}^1 simplizial. Sei u die zugehörige Unterteilungstransformation, die jedem Einssimplex aus \tilde{K} die Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung zuordnet. Dann hat die Abbildung Φ die Eigenschaft

$$(4) \quad \Phi u \sigma^1 = k \sigma^1^{12)}$$

für alle $\sigma^1 \in \tilde{K}$. In diesem Sinne realisiert also die Abbildung Φ die Ketten-
transformation k .

Um die k realisierende Abbildung Φ auf die höherdimensionalen Gerüste von \tilde{K} fortzusetzen, ziehen wir nun den von HOFF geschaffenen Begriff des Homotopierandes heran¹³⁾. Er ist folgendermaßen erklärt: σ_i^{i+1} ($i \geq 1$) sei ein orientiertes $(i+1)$ -dimensionales Element (d. h. topologisches Bild eines Simplexes), S^i seine Randsphäre, auf der ein Pol a ausgezeichnet sei. Wir betrachten alle simplizialen Abbildungen aller Simplizialzerlegungen von σ_i^{i+1} in einen beliebigen Komplex \mathfrak{K} , bei denen a in einen festen Punkt 0 von \mathfrak{K} abgebildet wird. Sei f eine solche Abbildung. Wir wählen 0 als Basispunkt für die Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K})$. Das Bild der $(i+1)$ -dimensionalen Grundkette von σ_i^{i+1} ist eine $(i+1)$ -dimensionale Kette ξ^{i+1} von \mathfrak{K} . Ferner bestimmt $f | S^i$ ein Element α der Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{K})$. α heißt „ein Homotopierand“ von ξ^{i+1} .¹⁴⁾

Über diesen Homotopierand brauchen wir die folgenden Sätze (vgl. HOFF [9] und [11]):

(a) Sei f wie oben eine Abbildung, die den Homotopierand $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{K})$ von ξ^{i+1} bestimmt. Sei g eine weitere simpliziale Abbildung einer Simplizial-

¹³⁾ Wir bezeichnen also hier (und im folgenden) die von der stetigen Abbildung $\Phi: \tilde{K}^1 \rightarrow \tilde{K}'^1$ erzeugte Kettentransformation von \tilde{K}^1 in \tilde{K}'^1 ebenfalls mit Φ . Mißverständnisse sind hierbei nicht zu befürchten.

¹⁴⁾ Vgl. HOFF [9] für den Fall $i = 1$, [11] für allgemeines i . In [9] wird unterschieden zwischen simplizialem und stetigem Homotopierand. Die Sätze werden in [9] für den stetigen Homotopierand (für $i = 1$) bewiesen, in [11] für den simplizialen Homotopierand (und allgemeines i) formuliert. Wir verwenden durchgehend den simplizialen Homotopierand, was einige kleine Modifikationen in den Beweisen verlangt. Vgl. z. B. den obigen Beweis von Satz (a) und den von HOFF in [11] angeführten Beweis [9] Nr. 8, b.

¹⁴⁾ Dies ist die Definition aus [11]. In [9] wurde nicht α sondern die stetige Sphäre $f | S^i$ als Homotopierand von ξ^{i+1} bezeichnet. Vgl. hierzu Satz (a). Außerdem entspricht die Definition aus [11] besser der Stellung des Begriffes des Homotopierandes innerhalb der relativen Homotopietheorie (vgl. hierzu die Bemerkungen in § 4).

zerlegung der Sphäre S^i in \mathfrak{R} mit $g(a) = 0$. Bestimme $g|S^i$ ebenfalls das Element $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{R}^i)$. Dann läßt sich g zu einer simplizialen Abbildung einer gewissen Simplizialzerlegung von σ_0^{i+1} derart fortsetzen, daß das g -Bild der Grundkette von σ_0^{i+1} wieder \mathfrak{R}^{i+1} ist.

(b) Jede Kette \mathfrak{R}^{i+1} von \mathfrak{R} besitzt Homotopieränder.

(c) Sei $\alpha \in \pi_i(\mathfrak{R}^i)$ ein Homotopierand von \mathfrak{R}^{i+1} . Sei \mathfrak{N} der Normalteiler von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$, der aus allen in \mathfrak{R}^{i+1} nullhomotopen Elementen von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ besteht. Natürlich ist α aus \mathfrak{N} . Sei \mathfrak{N}_0 die Untergruppe von \mathfrak{N} , die von allen Elementen $\varrho - x\varrho$ ($\varrho \in \mathfrak{N}$, $x \in \pi_1(\mathfrak{R}^i)$) erzeugt wird, wobei das Produkt $x\varrho$ im Sinne der Operationsweise der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathfrak{R}^i)$ auf die Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ zu verstehen ist. Dann besteht die Gesamtheit aller Homotopieränder von \mathfrak{R}^{i+1} aus denjenigen Elementen von \mathfrak{N} , die sich von α nur um ein Element aus \mathfrak{N}_0 unterscheiden.

(d) Sei ν der natürliche Homomorphismus der Homotopiegruppe $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ in die Homotopiegruppe $H_i(\mathfrak{R}^i)$ (= Zyklengruppe von \mathfrak{R}^i). Dann gilt für jeden Homotopierand α von \mathfrak{R}^{i+1}

$$(5) \quad \nu\alpha = \partial \mathfrak{R}^{i+1}.$$

Der Beweis des Satzes (a) stützt sich auf einen einfachen Hilfssatz, der, soweit ich weiß, nirgends explizit ausgesprochen ist. Nämlich

Hilfssatz. Seien \mathfrak{R} und \mathfrak{Q} zwei i -dimensionale Polyeder. Seien f_0 und f_1 zwei simpliziale Abbildungen zweier (eventuell voneinander verschiedener) Simplizialzerlegungen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_1 von \mathfrak{R} in die Simplizialzerlegung \mathfrak{Q} von \mathfrak{Q} . Seien f_0 und f_1 zueinander homotop, d. h. es gebe eine stetige Abbildung F des Prismas $\mathfrak{R} \times I$ in das Polyeder \mathfrak{Q} mit $F| \mathfrak{R} \times 0 = f_0$ und $F| \mathfrak{R} \times 1 = f_1$. Dann gibt es eine simpliziale Zerlegung¹⁶⁾ des Prismas $\mathfrak{R} \times I$, die für $\mathfrak{R} \times 0$ mit \mathfrak{R}_0 , für $\mathfrak{R} \times 1$ mit \mathfrak{R}_1 übereinstimmt, und eine simpliziale Abbildung F_0 dieser Zerlegung des Prismas $\mathfrak{R} \times I$ in \mathfrak{Q} , die auf $\mathfrak{R} \times 0$ mit f_0 und auf $\mathfrak{R} \times 1$ mit f_1 übereinstimmt.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes verfährt man natürlich so, daß man zunächst die Abbildung F simplizial approximiert. Hierzu hat man zuerst das Prisma $\mathfrak{R} \times I$ hinreichend fein simplizial zu unterteilen. Diese Unterteilung kann natürlich so eingerichtet werden, daß sie auf $\mathfrak{R} \times 0$ eine Unterteilung \mathfrak{R}_0' von \mathfrak{R}_0 , auf $\mathfrak{R} \times 1$ eine Unterteilung \mathfrak{R}_1' von \mathfrak{R}_1 ist. Bei der simplizialen Approximation erfahren daher auch die simplizialen Abbildungen $f_0 = F| \mathfrak{R} \times 0$ und $f_1 = F| \mathfrak{R} \times 1$ simpliziale Approximationen in bezug auf \mathfrak{R}_0' , \mathfrak{Q} bzw. in bezug auf \mathfrak{R}_1' , \mathfrak{Q} ¹⁷⁾. Diese simplizialen Approximationen sind einander dann nach Konstruktion „simplizial homotop“ d. h. vermöge einer simplizialen Abbildung des Deformationsprismas. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die simpliziale Abbildung f_0 (und ebenso f_1) zu einer simplizialen Approximation in bezug auf \mathfrak{R}_0' , \mathfrak{Q} (bzw. \mathfrak{R}_1' , \mathfrak{Q}) „simplizial homotop“ ist. Das ist der Spezialfall des zu beweisenden Hilfssatzes, wenn f_1 eine simpliziale Approximation von f_0 in bezug auf \mathfrak{R}_0' , \mathfrak{Q} ist.

¹⁶⁾ Wir schreiben hier einheitlich $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ (auch für den eventuell nichtabelschen Fall $i = 1$) additiv. Im Falle $i = 1$ ist das oben benutzte Produkt $x\varrho$ gleich $x + \varrho - x$ und daher $\varrho - x\varrho$ der Kommutator $\varrho + x - \varrho - x$, also \mathfrak{N}_0 gleich der gegenseitigen Kommutatorgruppe $[\pi_1(\mathfrak{R}^1), \mathfrak{N}]$.

¹⁷⁾ Sind die beiden Zerlegungen \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{R}_1 Unterteilungen der Simplizialzerlegung \mathfrak{R} des Polyeders \mathfrak{R} , so kann die Zerlegung des Prismas $\mathfrak{R} \times I$ auch als Unterteilung der Zellenzerlegung des Prismas in die Zellen $\sigma \times I$ ($\sigma \in \mathfrak{R}$) genommen werden.

I bezeichnet immer das Intervall $[0, 1]$ der Zahlengeraden.

¹⁸⁾ Bezeichnungsweise nach ALEXANDROFF-HOFF, S. 318.

Dieser Spezialfall ist für den Fall $i = 1$ im Lehrbuch von SEIFERT-THREL-FALL, S. 160/61 ausführlich behandelt, und zwar beim Beweis der Übereinstimmung der (stetigen) Fundamentalgruppe und der (simplicialen) Kantenweggruppe eines Komplexes. Der Beweis läßt sich für $i > 1$ ganz analog — wenn auch etwas weitläufiger — erbringen.

Mittels des Hilfssatzes beweisen wir nun den oben formulierten Satz (a). Sei $\alpha \in \pi_i(\mathbb{R}^i)$ ein Homotopierand der Kette τ^{i+1} . D. h. es gibt eine simpliciale Unterteilung des Elementes σ_0^{i+1} und eine simpliciale Abbildung f dieser Unterteilung in den Komplex \mathbb{R} derart, daß das f -Bild der $(i+1)$ -dimensionalen Grundkette von σ_0^{i+1} gleich der Kette τ^{i+1} ist und daß die stetige Sphäre $f|S^i$ das Element $\alpha \in \pi_i(\mathbb{R}^i)$ repräsentiert. Sei g eine weitere simpliciale Abbildung einer Simplicialzerlegung der Sphäre S^i derart, daß $g|S^i$ dasselbe $\alpha \in \pi_i(\mathbb{R}^i)$ repräsentiert. Dann sind die simplicialen Abbildungen $f|S^i$ und $g|S^i$ zueinander in \mathbb{R}^i homotop¹⁸⁾, also nach dem Hilfssatz „simplicial homotop“. Betrachten wir also die Kugelschale zwischen der Sphäre S^i und einer konzentrischen größeren Sphäre S_1^i , so gibt es eine simpliciale Unterteilung dieser Kugelschale und eine simpliciale Abbildung dieser Unterteilung in \mathbb{R}^i , die auf S^i mit f und auf S_1^i mit g übereinstimmt. Füllt man noch S^i mit σ_1^{i+1} aus, so erhält man insgesamt eine simpliciale Abbildung des Elementes σ_1^{i+1} , das aus σ_0^{i+1} und der Kugelschale besteht und die Randsphäre S_1^i hat, in \mathbb{R}^{i+1} mit der Randabbildung g . Dabei ist das Bild der Grundkette von σ_1^{i+1} nach wie vor die $(i+1)$ -Kette τ^{i+1} , da die ganze Kugelschale in das i -dimensionale Gerüst \mathbb{R}^i abgebildet wird. Damit ist Satz (a) bewiesen.

Wegen eines Beweises des Satzes (b) vergleiche man auch die Bemerkungen in § 4.

Von Satz (c) benötigen wir nur die (übrigens leichter zu beweisende) eine Hälfte, welche besagt, daß mit α auch $\alpha + (\varrho - x\varrho)$ Homotopierand von τ^{i+1} ist. Das kommt im wesentlichen darauf hinaus, daß mit ϱ auch $x\varrho$ Homotopierand derselben Kette ist. Das wurde aber beim Beweis des Satzes (a) schon mitbewiesen (vgl. Fußnote¹⁸⁾ auf S. 272). Ganz abgesehen davon, wird in unseren Anwendungen der Komplex \mathbb{R} immer universelle Überlagerung eines Komplexes sein und daher für $i \geq 2$ sowieso $\pi_1(\mathbb{R}^i)$ nur aus dem Eins-element bestehen, so daß in diesen Fällen $\mathbb{R}_0 = 0$ und die benötigte Hälfte des Satzes ganz trivial wird.

Wegen des Satzes (d) vergleiche man ebenfalls die Bemerkungen in § 4.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Problem zurück. Wir haben jetzt alle Mittel in der Hand, um die Fortsetzung unserer Abbildung Φ auf die höherdimensionalen Gerüste von \tilde{K} durchzuführen. Sei σ^2 irgendein (orientiertes) 2-Simplex von \tilde{K} . Dann ist ihm auf Grund der Kettentransformation k eine 2-Kette $\tau^2 = k(\sigma^2)$ von \tilde{K}' derart zugeordnet, daß $\partial \tau^2 = k(\partial \sigma^2)$ ist. Nach Satz (b) hat die Kette τ^2 einen Homotopierand, d. h. es gibt eine simpliciale Abbildung einer Unterteilung des Simplexes σ_0^2 in \tilde{K}' , bei der die Grundkette von σ_0^2 in τ^2 übergeht. Sei $\alpha \in \pi_1(\tilde{K}'^1)$ irgendein Homotopierand von τ^2 . Nach (d) ist der durch α bestimmte eindimensionale Zyklus gleich $\partial \tau^2$.

¹⁸⁾ Sogar unter Festhaltung des Basispunktes, aber das wird beim Beweis nicht benutzt. Der Beweis liefert daher sogar den Satz (a) schon unter der schwächeren Voraussetzung, daß $g|S^i$ nicht das Element α , sondern ein Element $x\alpha \in \pi_i(\mathbb{R}^i)$ repräsentiert, wobei $x \in \pi_1(\mathbb{R}^i)$ beliebig ist und das Produkt $x\alpha$ im Sinne der Operationsweise von $\pi_1(\mathbb{R}^i)$ auf $\pi_i(\mathbb{R}^i)$ aufzufassen ist.

also gleich $k(\partial \sigma^2)$. Welches ist die Gesamtheit aller Homotopieränder von \mathfrak{x}^2 ? Da $\pi_1(\tilde{K}')$ trivial ist, ist $\mathfrak{R} = \pi_1(\tilde{K}')$ und $[\pi_1(\tilde{K}'), \mathfrak{R}]$ gleich der Kommutatorgruppe von $\pi_1(\tilde{K}')$. Also sind nach (c) alle diejenigen Elemente von $\pi_1(\tilde{K}')$ Homotopieränder von \mathfrak{x}^2 , die sich von α nur um Kommutatoren (und deren Potenzprodukte) unterscheiden, d. h. diejenigen Elemente aus $\pi_1(\tilde{K}')$, die denselben eindimensionalen Zyklus bestimmen wie α , d. h. den eindimensionalen Zyklus $k(\partial \sigma^2)$.

Nach (4) ist nun das Φ -Bild des Randweges von σ^2 ein Weg, der als eindimensionaler Zyklus das Element $k(\partial \sigma^2)$ definiert. Wählt man noch den Basispunkt 0 von vorneherein als Eckpunkt dieses Weges, so sieht man, daß das durch das Φ -Bild des Randweges von σ^2 bestimmte Element von $\pi_1(\tilde{K}')$ ein Homotopierand von $k(\sigma^2)$ ist. Also gibt es nach (a) eine simpliziale Unterteilung von σ_0^2 , bei der die Simplizialzerlegung des Randes isomorph zu derjenigen Zerlegung des Randes von σ^2 ist, die bei der Definition von Φ $\partial \sigma^2$ benutzt wurde, und eine simpliziale Abbildung dieser Unterteilung von σ_0^2 in \tilde{K}' derart, daß das Bild der Grundkette von σ_0^2 gleich $\mathfrak{x}^2 = k(\sigma^2)$ ist und daß das Bild des Randweges gleich dem Φ -Bild des simplizialen Randweges von σ^2 ist. Wir identifizieren nun σ_0^2 mit σ^2 in solcher Weise, daß die isomorphen Randzerlegungen zusammenfallen und Randpunkte mit gleichen Φ -Bildern identifiziert werden. Dann erhalten wir eine Unterteilung von σ^2 und eine simpliziale Abbildung Φ dieser Unterteilung in \tilde{K}' , wobei die Abbildung Φ auf \tilde{K}^1 mit der bereits dort definierten Abbildung zusammenfällt. Wieder realisiert Φ die Kettentransformation k in dem Sinne, daß

$$(6) \quad \Phi u \sigma^2 = k \sigma^2$$

ist.

Wie im Falle des eindimensionalen Gerüsts sorgen wir nun dafür, daß Φ deckbewegungstreu wird, indem wir nach dem Simplex σ^2 zunächst die Simplexe σ^2 betrachten und Φ deckbewegungstreu auf σ^2 fortsetzen. Damit ist dann die Abbildung Φ auf das ganze zweidimensionale Gerüst von \tilde{K} deckbewegungstreu fortgesetzt, und es gilt (6) für alle $\sigma^2 \in \tilde{K}$.

Sei nun $2 \leq i \leq n$ und schon eine deckbewegungstreue Abbildung Φ des i -dimensionalen Gerüsts \tilde{K}^i in \tilde{K}^i definiert, die in einer geeigneten Unterteilung von \tilde{K}^i simplizial ist und der Bedingung

$$(7) \quad \Phi u \sigma^i = k \sigma^i$$

für alle $\sigma^i \in \tilde{K}^i$ genügt, wobei wieder u die Unterteilungstransformation von \tilde{K}^i in die genannte Unterteilung ist. Sei σ^{i+1} ein orientiertes $(i+1)$ -dimensionales Simplex von \tilde{K} . Auf Grund der Kettentransformation k entspricht dem Simplex σ^{i+1} eine $(i+1)$ -dimensionale Kette $k\sigma^{i+1} = \mathfrak{x}^{i+1}$ von \tilde{K} . Wir betrachten die Homotopieränder dieser Kette \mathfrak{x}^{i+1} . Jedenfalls hat \mathfrak{x}^{i+1} nach Satz (b) überhaupt einen Homotopierand $\alpha \in \pi_1(\tilde{K}^i)$. Ferner entsteht nach Satz (c) die Gesamtheit aller Homotopieränder von \mathfrak{x}^{i+1} aus α durch Addition der Elemente von \mathfrak{R}_0 . In unserem Falle ist aber $\mathfrak{R}_0 = 0$; denn die erzeugenden Elemente $\varrho \cdot x\varrho$ sind alle gleich Null, da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K}^i)$ wegen $i \geq 2$ nur aus dem Einselement besteht. Also gibt es in diesem Falle

nur den Homotopierand α von γ^{i+1} . Sei ν der natürliche Homomorphismus der Homotopiegruppe $\pi_i(\tilde{K}^i)$ in die Homologiegruppe $H_i(\tilde{K}^i)$. Dann ist nach Satz (d) $\nu \alpha = \partial \gamma^{i+1}$.

Ebenso ist aber nach Voraussetzung die Abbildung Φ für eine gewisse Unterteilung des Randes $\partial \sigma^{i+1}$ simplizial und nach (7) das Bild des Grundzyklus dieser Unterteilung von $\partial \sigma^{i+1}$ gleich $k \partial \sigma^{i+1} = \partial k \sigma^{i+1} = \partial \gamma^{i+1}$. Nun ist auf Grund des HUREWICZschen Äquivalenzsatzes wegen $\pi_1(\tilde{K}^i) = \pi_2(\tilde{K}^i) = \dots = \pi_{i-1}(\tilde{K}^i) = 0$ der natürliche Homomorphismus ν ein Isomorphismus von $\pi_i(\tilde{K}^i)$ auf $H_i(\tilde{K}^i)$. Also definiert die Abbildung $\Phi|_{\partial \sigma^{i+1}}$ als stetige Sphäre ebenfalls das Element $\alpha \in \pi_i(\tilde{K}^i)$. Dann gibt es aber nach Satz (a) eine Unterteilung von σ^{i+1} , die auf $\partial \sigma^{i+1}$ mit der gegebenen Unterteilung übereinstimmt, und eine simpliziale Abbildung dieser Unterteilung von σ^{i+1} in \tilde{K}' , die auf der Randsphäre von σ^{i+1} mit Φ übereinstimmt und als Bild der Grundkette von σ^{i+1} die Kette $k \sigma^{i+1}$ liefert. Durch diese Fortsetzung der Randabbildung Φ definieren wir $\Phi|_{\sigma^{i+1}}$. Dies wird für jedes σ^{i+1} durchgeführt und zwar so, daß $\Phi|_{\tilde{K}^{i+1}}$ deckbewegungstreu wird, was deshalb möglich ist, weil $\Phi|_{\tilde{K}^i}$ nach Induktionsvoraussetzung deckbewegungstreu war. Damit erhalten wir eine deckbewegungstreue Abbildung $\Phi: \tilde{K}^{i+1} \rightarrow \tilde{K}'^{i+1}$, die in einer gewissen Unterteilung von \tilde{K}^{i+1} simplizial ist und mit der Kettentransformation k gemäß

$$(8) \quad \Phi u \sigma^i = k \sigma^i \quad \sigma^i \in \tilde{K}^{i+1}$$

zusammenhängt, wobei u die Unterteilungstransformation von \tilde{K}^{i+1} in die genannte Unterteilung bedeutet. Auf diese Weise erhalten wir schließlich eine Abbildung Φ des $(n+1)$ -dimensionalen Gerüsts \tilde{K}^{n+1} , die die Kettentransformation k in dem angegebenen Sinne realisiert.

Übrigens genügt es für unsere weiteren Betrachtungen, daß die Abbildung Φ die Kettentransformation k nur in den Dimensionen $\leq n$ realisiert, d. h. daß Gleichung (8) nur für $i+1 = n$ gilt. Verzichtet man daher auf die Forderung, daß Φ auch noch in der Dimension $n+1$ die Kettentransformation k realisiert, so kann man den letzten Schritt vom n -dimensionalen auf das $(n+1)$ -dimensionale Gerüst etwas kürzer (und ohne Benutzung des Homotopierandes) folgendermaßen durchführen:

Sei σ^{n+1} ein orientiertes $(n+1)$ -Simplex von \tilde{K} . Auf dem Rand von σ^{n+1} ist die Abbildung Φ bereits erklärt. Das Φ -Bild dieses Randes definiert als n -Sphärenbild ein Element der n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(\tilde{K}')$ von \tilde{K}' . Da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K}')$ von \tilde{K}' verschwindet, brauchen wir uns hier um Basispunkte nicht zu kümmern. Gemäß der Definition von Φ ist Φ simpliziale Abbildung einer gewissen Unterteilung der Randsphäre von σ^{n+1} und das Φ -Bild des Grundzyklus dieser triangulierten Sphäre ist das Bild $k(\partial \sigma^{n+1})$ des Randes $\partial \sigma^{n+1}$ bei der Kettentransformation k . Die Kettentransformation k ist aber auch auf dem $(n+1)$ -dimensionalen Gerüst erklärt und randtreu, also $k(\partial \sigma^{n+1}) = \partial k \sigma^{n+1}$. Also ist das Φ -Bild der Randsphäre von σ^{n+1} nullhomolog. Auf Grund des HUREWICZschen Äquivalenzsatzes ist aber $\pi_n(\tilde{K}')$ isomorph zur n -ten Homologiegruppe $H_n(\tilde{K}')$. Also ist das Φ -Bild der Randsphäre von σ^{n+1} sogar nullhomotop und daher Φ auf σ^{n+1} fortsetzbar. Offenbar kann man es noch so einrichten, daß Φ deckbewegungstreu wird.

Die weitere Fortsetzung der Abbildung Φ auf \tilde{K} über die Dimension $n+1$ hinaus geht nun wegen des Verschwindens der höheren Homotopiegruppen von \tilde{K}' unmittelbar nach bekannter Methode vor sich. Sei die Abbildung Φ bis zum i -dimensionalen ($i \geq n+1$) Gerüst von \tilde{K} bereits deckbewegungstreu definiert. Sei σ^{i+1} ein $(i+1)$ -Simplex von \tilde{K} . Auf der Randsphäre von σ^{i+1} ist Φ definiert und das Φ -Bild dieser i -Sphäre in \tilde{K}' ist nullhomotop, da $\pi_i(\tilde{K}') = 0$ ist wegen $i \geq n+1$. Also ist Φ auf σ^{i+1} fortsetzbar, und die gesamte Fortsetzung auf \tilde{K}^{i+1} kann offenbar deckbewegungstreu erfolgen, da Φ auf \tilde{K}^i deckbewegungstreu ist.

Damit haben wir den

Satz 1. Zur Kettentransformation k des Satzes von EILENBERG-MACLANE gibt es eine deckbewegungstreu Abbildung $\Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$, die mit k in folgender Weise zusammenhängt: Es gibt eine Unterteilung des n -dimensionalen Gerüsts \tilde{K}^n , in der Φ simplizial ist. Sei u die Unterteilungstransformation, die jedem Simplex von \tilde{K}^n die Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung zuordnet, dann ist für jedes Simplex σ^q von \tilde{K}^n

$$k \sigma^q = \Phi u \sigma^q.$$

§ 3. Realisierung der Kettenhomotopien.

Wir gehen nun über zum eigentlichen Beweis, daß \tilde{K} und \tilde{K}' vom gleichen Homotopietyp sind. Wenden wir den Satz 1 auf die Kettentransformation $k': \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}^{n+1}$ an, so erhalten wir für sie ebenfalls eine deckbewegungstreu realisierende Abbildung $\Phi': \tilde{K}' \rightarrow \tilde{K}$. Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung $\Phi' \Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ und behaupten, daß sie in den Dimensionen $\leq n$ die zusammengesetzte Kettentransformation $k'k$ im selben Sinne realisiert wie Φ die Kettentransformation k bzw. Φ' die Kettentransformation k' . Zunächst ist Φ simplizial in einer gewissen Unterteilung \tilde{K}_1^n von \tilde{K}^n . Diese Unterteilung wird noch einmal unterteilt zu \tilde{K}_2^n derart, daß die zusammengesetzte Abbildung $\Phi' \Phi$ in dieser Unterteilung \tilde{K}_2^n simplizial ist. Das ist für diejenigen Simplexe σ_1^n von \tilde{K}_1^n , die bei Φ auf ein Simplex σ'^n gleicher Dimension von \tilde{K}' abgebildet werden (also nicht ausarten), leicht zu machen. Φ' ist ja simplizial in einer gewissen Unterteilung \tilde{K}'^n von \tilde{K}'^n . Die entsprechende Unterteilung von σ'^n wird dann einfach mittels Φ^{-1} in σ_1^n übertragen (Φ ist ja auf σ_1^n umkehrbar eindeutig). Auf diese Weise ist die Unterteilung \tilde{K}_2^n für alle Simplexe σ_1^n erklärt, die bei Φ nicht ausarten. Offenbar schließen diese Unterteilungen, soweit sie erklärt sind, stetig aneinander. Man hat also die Unterteilung \tilde{K}_2^n nur noch auf alle ausartenden Simplexe von \tilde{K}_1^n derart fortzusetzen, daß darin Φ eine simpliziale Abbildung in die Unterteilung \tilde{K}'^n definiert. Das läßt sich jedenfalls erreichen. Doch kommt es uns auf die genauere Art dieser Unterteilung in den ausartenden Simplexen gar nicht an; denn wir wollen nur erreichen, daß $\Phi' \Phi$ die Kettentransformation $k'k$ realisiert. Hierbei spielen aber nur die bei Φ nicht ausartenden Simplexe von \tilde{K}_1^n eine Rolle. In der Tat, sei σ^p ein Simplex von \tilde{K}^n . Um zu zeigen,

daß die Grundkette von σ^p in der Unterteilung \tilde{K}_2^n durch die Abbildung $\Phi' \Phi$ in die Kette $k' k \sigma^p$ übergeht, brauchen wir in der Grundkette von σ^p in \tilde{K}_1^n nur die bei Φ nicht ausartenden Simplexe zu betrachten. Für die ausartenden artet ja auch die zugehörige Grundkette in \tilde{K}_2^n aus, d. h. ihr entspricht vermöge Φ die Nullkette in \tilde{K}_1^n . Den Grundketten in \tilde{K}_2^n der nicht ausartenden Simplexe σ_1 von \tilde{K}_1^n entspricht aber nach Konstruktion gerade die Grundkette in \tilde{K}_1^n des Φ -Bildes von σ_1 in \tilde{K}^n . Und dieser Grundkette in \tilde{K}_1^n entspricht vermöge Φ' die Kette $k' (\Phi' \sigma_1)$. Also entspricht der Grundkette in \tilde{K}_2^n des Simplexes σ^p vermöge $\Phi' \Phi$ gerade die Kette $k' k \sigma^p$, w. z. b. w.

Nun zeigen wir schließlich, daß $\Phi' \Phi$ zur Identität homotop ist. Es läßt sich nämlich die Kettenhomotopie $k' k \simeq 1$ im gleichen Sinne realisieren wie die Kettentransformationen k und k' . Die Kettenhomotopie

$$k' k \simeq 1 \quad (\dim \leq n)$$

bedeutet: Es gibt deckbewegungstreue Homomorphismen D_i ($i \leq n$) der i -ten Kettengruppe von \tilde{K} in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von \tilde{K} mit der Eigenschaft

$$(1) \quad \partial D_i \sigma^i = \sigma^i - k' k \sigma^i - D_{i-1} \partial \sigma^i$$

für jedes Simplex σ^i von \tilde{K} , wobei $D_{-1} = 0$ zu setzen ist.

Sei nun σ^0 eine Ecke von \tilde{K} . Dann ist $D_0 \sigma^0$ eine 1-Kette mit dem Rand $\sigma^0 - k' k \sigma^0 = \sigma^0 - \Phi' \Phi \sigma^0$. Wir wählen wieder einen Kantenweg in \tilde{K} , der σ^0 mit $\Phi' \Phi \sigma^0$ verbindet und als 1-Kette die Kette $D_0 \sigma^0$ bestimmt. Wir bilden das Prisma $\sigma^0 \times I^{(9)}$ über σ^0 auf diesen Kantenweg ab. Wegen $D_0 x \sigma^0 = x D_0 \sigma^0$ können wir es noch so einrichten, daß die Abbildung von $\tilde{K}^0 \times I$ deckbewegungstreu wird. Sei σ^1 ein 1-Simplex von \tilde{K} . Dann ist $D_1 \sigma^1$ eine 2-Kette von \tilde{K} mit dem Rand $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$. Diese 2-Kette besitzt einen Homotopierand, und die Gesamtheit ihrer Homotopieränder besteht aus denjenigen Elementen von $\pi_1(\tilde{K}^1)$, die als 1-Ketten in \tilde{K} die Kette $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$ bestimmen. Bilden wir nun den Rand von $\sigma^1 \times I$ folgendermaßen in \tilde{K} ab: $\sigma^1 \times 0$ in natürlicher Weise auf σ^1 , $\sigma^1 \times 1$ mittels $\Phi' \Phi$ in \tilde{K} , $\partial \sigma^1 \times I$ in der oben für die Prismen $\sigma^0 \times I$ bestimmten Weise in \tilde{K} . Dann bestimmt nach Konstruktion dieses Randwegbild gerade die 1-Kette $\sigma^1 - k' k \sigma^1 - D_0 \partial \sigma^1$. Als Element von $\pi_1(\tilde{K}^1)$ bestimmt es also einen Homotopierand von $D_1 \sigma^1$. Man kann daher die Abbildung des Randes von $\sigma^1 \times I$ derart auf das ganze Prisma $\sigma^1 \times I$ fortsetzen, daß sie (in einer gewissen Unterteilung simplizial ist und) als Bild der Grundkette von $\sigma^1 \times I$ die Kette $D_1 \sigma^1$ liefert. Wegen $D_1 x \sigma^1 = x D_1 \sigma^1$ kann man noch erreichen, daß die Abbildung von $\tilde{K}^1 \times I$ deckbewegungstreu wird.

Sei jetzt bereits für $1 \leq i \leq n-1$ eine Abbildung von $\tilde{K}^i \times I$ in \tilde{K} gegeben, die deckbewegungstreu ist, eine Homotopie zwischen der Identität und $\Phi' \Phi|_{\tilde{K}^i}$ definiert, in einer gewissen Unterteilung von $\tilde{K}^i \times I$ simplizial ist und den Homotopieoperator D realisiert in dem bekannten Sinne, daß für jedes Simplex $\sigma^p \in \tilde{K}^i$ durch die Abbildung aus der Grundkette von $\sigma^p \times I$

¹⁹⁾ $\sigma^p \times I$ ist das topologische Produkt des Simplexes σ^p mit der Strecke $I = [0, 1]$ der Zahlengeraden.

in der genannten Unterteilung die Kette $D_i \sigma^i$ des Komplexes \tilde{K} entsteht. Sei $\sigma^{i+1} \in \tilde{K}^{i+1}$. Dann ist wegen $i+1 \leq n$ die $(i+2)$ -dimensionale Kette $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ des Komplexes \tilde{K} erklärt. Sei $\alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ ein Homotopierand von $D_{i+1} \sigma^{i+1}$. Wie im vorigen Paragraphen ist dann wegen $i+1 \geq 2$ das Element α der einzige Homotopierand von $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ und

$$\nu \alpha = \partial D_{i+1} \sigma^{i+1} = \sigma^{i+1} - k' k \sigma^{i+1} - D_i \partial \sigma^{i+1},$$

wo ν den natürlichen Homomorphismus von $\pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ in die Homologiegruppe $H_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$ bedeutet. Wir definieren nun eine Abbildung des Randes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ des Prismas $\sigma^{i+1} \times I$ in \tilde{K} in folgender Weise: $\sigma^{i+1} \times 0$ in natürlicher Weise auf σ^{i+1} , $\sigma^{i+1} \times 1$ vermöge der Abbildung $\Phi' \Phi$ in \tilde{K} und $\partial \sigma^{i+1} \times I$ in der nach Induktionsannahme gegebenen Abbildungsweise von $\tilde{K}^i \times I$ in \tilde{K} . Dann bestimmt diese Abbildung des Prismenrandes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ nach Konstruktion und Induktionsannahme die $(i+1)$ -Kette

$$\sigma^{i+1} - k' k \sigma^{i+1} - D_i \partial \sigma^{i+1}$$

von \tilde{K} . Wegen $1 \leq i \leq n-1$ ist $\pi_1(\tilde{K}^{i+1}) = \pi_2(\tilde{K}^{i+1}) = \dots = \pi_i(\tilde{K}^{i+1}) = 0$, also der oben genannte natürliche Homomorphismus ν ein Isomorphismus. Daher bestimmt die eben definierte Abbildung des Prismenrandes $\partial(\sigma^{i+1} \times I)$ das Element $\alpha \in \pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1})$. Es gibt also eine Fortsetzung dieser Abbildung auf das ganze Prisma $\sigma^{i+1} \times I$ derart, daß sie (in einer gewissen Unterteilung simplicial ist und) als Bild der Grundkette von $\sigma^{i+1} \times I$ die Kette $D_{i+1} \sigma^{i+1}$ liefert. Offenbar läßt sich auch die Deckbewegungstreue dieser Abbildung erreichen.

Damit ist die Realisierung der Kettenhomotopie $k' k \simeq 1$ ($\dim \leq n$) geleistet. Den letzten Schritt dieser Konstruktion von $\tilde{K}^{n-1} \times I$ auf $\tilde{K}^n \times I$ hätte man auch hier wieder genau wie im vorigen Paragraphen vereinfachen können (ohne Benutzung des Homotopierandes). Die weitere deckbewegungstreue Fortsetzung der Homotopie zwischen der Identität und der Abbildung $\Phi' \Phi$ auf die Dimensionen $\geq n+1$ erfolgt nach bekanntem Schema auf Grund der Voraussetzung, daß die höheren Homotopiegruppen $\pi_{n+1}(\tilde{K}) = \pi_{n+2}(\tilde{K}) = \dots = 0$ sind.

Damit ist also gezeigt, daß die Abbildung $\Phi' \Phi$ von \tilde{K} in sich zur Identität homotop ist, und zwar ist die Homotopie selbst deckbewegungstreu. Ganz ebenso sieht man, daß auch die Abbildung $\Phi \Phi'$ von \tilde{K} in sich zur Identität homotop ist, wobei die Homotopie ebenfalls deckbewegungstreu ist. Auf Grund der Deckbewegungstreue kann man sowohl die Abbildungen Φ und Φ' als auch die Homotopien in die Grundkomplexe „herunterprojizieren“. Man erhält dann eine Abbildung $\Phi_0: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ und eine Abbildung $\Phi'_0: \tilde{K}' \rightarrow \tilde{K}$ derart, daß die Abbildungen $\Phi'_0 \Phi_0: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ und $\Phi_0 \Phi'_0: \tilde{K}' \rightarrow \tilde{K}'$ beide zur Identität homotop sind. Also sind die Polyeder \tilde{K} und \tilde{K}' vom selben Homotopietyp.

Umgekehrt stimmen für zwei Polyeder vom selben Homotopietyp die HOMOTOPIEGRUPPEN und die EILENBERG-MACLANESchen Invarianten überein. Daher haben wir den

Satz 2. Seien \tilde{K} und \tilde{K}' zwei Polyeder, deren Homotopiegruppen $\pi_i(\tilde{K})$, $\pi_i(\tilde{K}')$ für $i \neq 1, n$ verschwinden. Dann sind \tilde{K} und \tilde{K}' dann und nur dann vom selben Homotopietyp, wenn ihre Fundamentalgruppen, ihre n -ten Homo-

topiegruppen (als Gruppen mit den Fundamentalgruppenelementen als Operatoren) und ihre EILENBERG-MACLANESchen Invarianten einander gleich sind.

Der letzte Teil des Beweises von Satz 2, nämlich die Zusammensetzung der beiden Abbildungen Φ und Φ' und der Beweis der Homotopie $\Phi'\Phi \simeq 1$ kann abgekürzt werden, wenn man nach der Konstruktion von Φ den folgenden Satz von J. H. C. WHITEHEAD [18] verwendet:

Seien \bar{K} und \bar{L} zwei Polyeder und $N = \max(\dim \bar{K}, \dim \bar{L})$. Sei $f: \bar{K} \rightarrow \bar{L}$ eine stetige Abbildung von \bar{K} in \bar{L} , die für die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{K})$ einen Isomorphismus auf die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{L})$ und ebenso für die höheren Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{K})$ für alle $i \leq N$ einen Isomorphismus auf die entsprechenden Homotopiegruppen $\pi_i(\bar{L})$ erzeugt; dann besitzt f eine „Homotopieinverse“, d. h. es gibt eine Abbildung $f': \bar{L} \rightarrow \bar{K}$ von \bar{L} in \bar{K} , so daß $f'f$ und ff' beide zur Identität homotop sind. Dann sind also \bar{K} und \bar{L} vom gleichen Homotopietyp²⁰).

Um diesen Satz anzuwenden, haben wir also zu untersuchen, welche Homomorphismen von der Abbildung Φ_0 in der Fundamentalgruppe und in den Homotopiegruppen induziert werden. Sei Φ die oben konstruierte Überlagerungsabbildung zu Φ_0 . Welchen Homomorphismus induziert Φ_0 für die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K})$? Sei w_0 irgendein geschlossener Weg von K , der ein gewisses Element $x \in \pi_1(K)$ repräsentiert. Um das Bild $\Phi_0(w_0)$ zu finden, hat man nach Definition von Φ_0 einen beliebigen Überlagerungsweg w von w_0 zu nehmen, ihn vermöge Φ abzubilden und das Bild in K' zu projizieren. Nach Definition der Überlagerung führt der Weg w von einem gewissen Punkt $p \in \tilde{K}$ zum Punkt $x p$. Nach Konstruktion von Φ führt dann das Bild $\Phi(w)$ vom Punkte Φp zum Punkte $x \Phi p$, so daß die Projektion dieses Bildweges in K' ein geschlossener Weg ist, der das Element $x \in \pi_1(K')$ darstellt. Φ_0 vermittelt also gerade denjenigen Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen $\pi_1(K)$ und $\pi_1(K')$, der durch die gleiche Bezeichnung der Elemente angegeben wurde.

Zweitens untersuchen wir den Homomorphismus, den Φ_0 für die n -ten Homotopiegruppen induziert. Zunächst ist die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(K)$ isomorph zur n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(\tilde{K})$ und ebenso $\pi_n(K') \cong \pi_n(\tilde{K}')$ und diese Isomorphismen sind bekanntlich derart, daß durch sie der durch die Abbildung Φ_0 induzierte Homomorphismus von $\pi_n(K)$ in $\pi_n(K')$ übergeführt wird in den durch Φ induzierten Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $\pi_n(\tilde{K}')$. Ferner ist nach dem HUREWICZschen Äquivalenzsatz der natürliche Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $H_n(\tilde{K})$ und der von $\pi_n(\tilde{K}')$ in $H_n(\tilde{K}')$ ein Isomorphismus auf $H_n(\tilde{K})$ bzw. $H_n(\tilde{K}')$. Und auch diese Isomorphismen sind derart, daß durch sie der von Φ induzierte Homomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ in $\pi_n(\tilde{K}')$ übergeführt wird in den durch Φ induzierten Homomorphismus von $H_n(\tilde{K})$ in $H_n(\tilde{K}')$. Dieser letztere ist aber leicht zu bestimmen. Sei β^n irgendein n -Zyklus von \tilde{K} . Sei $u \beta^n$ seine Unterteilung in \tilde{K}^n . Dann ist nach Konstruktion $\Phi u \beta^n = k \beta^n$. Nach dem Satz von EILENBERG-MACLANE erzeugt aber k einen

²⁰) Natürlich besagt der Satz nicht, daß die Isomorphie aller Homotopiegruppen hinreichend dafür ist, daß zwei Polyeder vom gleichen Homotopietyp sind. Die wesentliche Bedingung ist vielmehr, daß alle diese Isomorphismen gleichzeitig von einer Abbildung induziert werden.

Isomorphismus von $H_n(K)$ auf $H_n(\tilde{K}')$. Also erzeugt auch Φ_0 einen Isomorphismus von $\pi_n(\tilde{K})$ auf $\pi_n(\tilde{K}')$.

Für die Dimensionen $i \neq 1$, n ist wegen $\pi_i(K) = \pi_i(K') = 0$ die Bedingung des Satzes von WHITEHEAD trivialerweise erfüllt. Also besitzt Φ_0 eine Homotopieinverse, d. h. \tilde{K} und \tilde{K}' sind vom gleichen Homotopietyp.

§ 4. Bemerkungen.

Wir wollen dem obigen Beweisgang noch kurz den von WHITEHEAD gegenüberstellen. Während bei ersterem die Frage nach der Gesamtheit aller Homotopieränder einer gegebenen i -dimensionalen Kette ausschlaggebend war, wird bei letzterem umgekehrt bei einer gegebenen nullhomotopen Abbildung des Randes eines $(i+1)$ -Simplexes nach der Gesamtheit aller Fortsetzungsmöglichkeiten der Abbildung auf das ganze Simplex gefragt. Hierbei wird die Theorie der relativen Homotopiegruppen $\pi_{i+1}(\tilde{K}^{i+1}, \tilde{K}^i)$ wesentlich herangezogen. Es ergibt sich die Möglichkeit, die Fortsetzung Φ über alle Dimensionen hin so zu wählen, daß für jedes Simplex $\sigma^p \in \tilde{K}^{n+1}$ die Homologie

$$\Phi \sigma^p \sim k \sigma^p \text{ in } \tilde{K}'^p \text{ mod } \tilde{K}'^{p-1}$$

gilt. Diese Homologie tritt hier an Stelle der Gleichung (8) in § 2 und definiert jetzt den Sinn, in dem die Kettentransformation k durch die Abbildung Φ realisiert wird.

Vergleichen wir die beiden Methoden noch etwas eingehender. Dazu betrachten wir die Homotopiefolge des Paares $\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i$, wo \mathfrak{R} irgendein Komplex ist, und die zugehörige Homotopiefolge,

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^i) \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}) \rightarrow \pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \xrightarrow{\partial} \pi_i(\mathfrak{R}^i) \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}) \rightarrow H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \xrightarrow{\partial} H_i(\mathfrak{R}^i). \end{array}$$

Sie sind durch den natürlichen Homomorphismus ν verbunden. Bei der WHITEHEADSchen Methode geht man von einem festen Element von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ aus und fragt nach allen Elementen von $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, die durch den Randoperator ∂ in das vorgegebene Element von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ übergehen. Diese Frage wird durch die Exaktheit der Homotopiefolge sofort beantwortet. Bei der ersten Methode hingegen geht man von einer bestimmten $(i+1)$ -Kette \tilde{x}^{i+1} aus, also von einem Element der Gruppe $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, und fragt nach allen Homotopierändern dieser Kette. Das bedeutet im Rahmen der Homotopietheorie: Man fragt zunächst nach allen Elementen von $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$, die das vorgegebene Element von $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ als natürliches Bild haben, d. h. nach allen Abbildungen eines $(i+1)$ -dimensionalen topologischen Elementes in \mathfrak{R}^{i+1} , bei denen der Rand in \mathfrak{R}^i abgebildet wird (und ein bestimmter Randpunkt in einen festen Punkt von \mathfrak{R}) und die, als singuläre Zyklen mod \mathfrak{R}^i aufgefaßt, das vorgelegte Element von $H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ bestimmen. Bei jeder dieser Abbildungen hat man dann zu der Randabbildung überzugehen, d. h. auf die entsprechenden Elemente der Gruppe $\pi_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i)$ den Operator ∂ anzuwenden. Die erhaltenen Elemente von $\pi_i(\mathfrak{R}^i)$ sind dann die Homotopieränder von \tilde{x}^{i+1} . Der Übergang zum Homotopierand ist also im Rahmen der relativen Homotopietheorie einfach der Übergang $\partial \nu^{-1}: H_{i+1}(\mathfrak{R}^{i+1}, \mathfrak{R}^i) \rightarrow \pi_i(\mathfrak{R}^i)$.

Die Mehrdeutigkeit des Homotopierandes liegt dabei natürlich daran, daß der natürliche Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$ kein Isomorphismus ist. Die HOFMANNschen Sätze (b)–(d) § 2 über den Homotopierand lassen sich nun leicht homotopietheoretisch aussprechen:

(b) „Jede Kette hat einen Homotopierand“ bedeutet, daß der natürliche Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$ ein Homomorphismus auf die ganze Gruppe $H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$ ist. Das ist übrigens mit bekannten Argumenten von HUREWICZ sehr leicht zu beweisen (vgl. auch HU [12]): Repräsentiere die Kette ξ^{i+1} ein Element der Gruppe $H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$. Sei $\xi^{i+1} = \sum m_j \sigma_j^{i+1}$, wo σ_j^{i+1} die $(i+1)$ -Simplexe von \mathbb{R} durchläuft. Offenbar repräsentiert auch jedes σ_j^{i+1} ein Element von $H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$. Andererseits repräsentiert die identische Abbildung von σ_j^{i+1} in \mathbb{R}^{i+1} (bei geeigneter Wahl des Basispunktes) ein Element ω_j der relativen Homotopiegruppe $\pi_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$. Natürlich ist $\nu \omega_j = \sigma_j^{i+1}$, wenn ν der natürliche Homomorphismus von $\pi_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$ in $H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$ ist. Da ν ein Homomorphismus ist, ist dann $\nu \sum m_j \omega_j = \sum m_j \sigma_j^{i+1} = \xi^{i+1}$, w. z. b. w.

Der Satz (c) bestimmt das ∂ -Bild des Kernes des natürlichen Homomorphismus $\nu: \pi_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i) \rightarrow H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$, nämlich die Homotopieränder des Nullelementes aus $H_{i+1}(\mathbb{R}^{i+1}, \mathbb{R}^i)$. Das ∂ -Bild dieses Kernes besteht also aus der Untergruppe \mathbb{R}_0 von $\pi_i(\mathbb{R}^i)$.

Der dritte Satz (d) schließlich drückt aus, daß der natürliche Homomorphismus zwischen Homotopie- und Homologiefolge mit den Randoperatoren ∂ vertauschbar ist. Das ist aber nur ein Spezialfall der bekannten Tatsache, daß der natürliche Homomorphismus zwischen Homotopie- und Homologiefolge mit den Homomorphismen in diesen Folgen vertauschbar ist.

§ 5. Abbildungsklassen.

Während bei den grundlegenden Untersuchungen von HUREWICZ [13] über die Homotopietypen der asphärischen Räume, d. h. solcher Räume X mit $\pi_i(X) = 0$ für $i \geq 2$, zunächst das allgemeinere Problem der Bestimmung aller Abbildungsklassen eines Polyeders Y in den Raum X gelöst wird und damit dann die Frage nach dem Homotopietyp von X beantwortet wird, ist das bei der vorliegenden Arbeit nicht der Fall. Vielmehr wird gleich die Frage nach dem Homotopietyp gestellt. Jedoch kann man immerhin einige ganz interessante Bemerkungen zu der Frage der Abbildungsklassen aus den vorhergehenden Ausführungen entnehmen. Diesen Bemerkungen ist dieser letzte Paragraph gewidmet.

Seien zunächst K und K' irgend zwei zusammenhängende Komplexe, \bar{K} und \bar{K}' die entsprechenden Polyeder. Wir zeichnen in K bzw. K' je eine Ecke p bzw. p' aus, die als Basispunkte für die Fundamentalgruppen sowie für die Konstruktion der universellen Überlagerungen benutzt werden. Dann vermittelt jede Abbildung $f: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ einen bis auf einen inneren Automorphismus bestimmten Homomorphismus der Fundamentalgruppe $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ und damit auch der Deckbewegungsgruppen der universellen Überlagerungen von K und K' .

Zu jeder stetigen Abbildung $f: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ gibt es Überlagerungsabbildungen $\tilde{f}: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ der universellen Überlagerungspolyeder. \tilde{f} ist bis auf eine zu-

sätzliche Deckbewegung von \tilde{K}' eindeutig bestimmt und ist im folgenden Sinne deckbewegungstreu: Bezeichnen wir einen beliebigen Homomorphismus aus der Homomorphismenklasse, die die Abbildung f von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ induziert, ebenfalls mit f , so gilt für eine geeignete der Überlagerungsabbildungen \tilde{f}

$$\tilde{f}(xq) = f(x) \tilde{f}(q)$$

für alle Punkte $q \in \tilde{K}$ und alle Elemente $x \in \pi_1(K)$. Wir sagen daher, daß eine bestimmte Überlagerungsabbildung im Sinne eines gewissen Homomorphismus von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreu ist, bzw. allgemein, daß die Überlagerungsabbildungen einer gegebenen Abbildung f im Sinne der durch f induzierten Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreu sind.

Läßt man die Grundabbildung f durch eine Homotopie in eine andere Abbildung f_1 übergehen, so kann man diese Homotopie auf die Überlagerungsabbildung \tilde{f} übertragen und erhält dort eine (im selben Sinne wie \tilde{f}) deckbewegungstreue Homotopie zwischen der Abbildung \tilde{f} und einer gewissen Überlagerungsabbildung von \tilde{K} in \tilde{K}').

Also entspricht einer Abbildungsklasse von \tilde{K} in \tilde{K}' eindeutig eine Klasse von (im Sinne einer gewissen Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$) deckbewegungstreuen Abbildungen von \tilde{K} in \tilde{K}' , die durch deckbewegungstreue Homotopien und anschließende Decktransformationen von \tilde{K}' ineinander übergehen. Eine solche Klasse nennen wir kurz die zur Abbildungsklasse von \tilde{K} in \tilde{K}' gehörige Überlagerungsklasse.

Umgekehrt entspricht offenbar jeder Überlagerungsklasse eine und nur eine Abbildungsklasse der Grundabbildungen von \tilde{K} in \tilde{K}' . Also ist das Problem der Bestimmung der Abbildungsklassen von \tilde{K} in \tilde{K}' gleichwertig mit dem Problem der Bestimmung der Überlagerungsklassen von \tilde{K} in \tilde{K}' .

Sei $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eine beliebige stetige (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$) deckbewegungstreue Abbildung des Polyeders \tilde{K} in das Polyeder \tilde{K}' . Wir wollen zunächst dieser Abbildung $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eine deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ des $(n+1)$ -Gerüsts \tilde{K}^{n+1} in das $(n+1)$ -Gerüst \tilde{K}'^{n+1} zuordnen. Dies tun wir in natürlicher Weise folgendermaßen: Wir nehmen eine deckbewegungstreue simpliziale Approximation Φ von f in bezug auf $\tilde{K}_1, \tilde{K}'^{(2)}$, wobei K_1 eine hinreichend feine Unterteilung von K ist. Sei u die Unterteilungstransformation, die jedem (orientierten) Simplex $\sigma \in \tilde{K}$ die entsprechende Grundkette dieses Simplexes in der Unterteilung \tilde{K}_1 zuordnet. Dann setzen wir

$$k \sigma^i = \Phi u \sigma^i \quad (0 \leq i \leq n+1)^{(21)}.$$

Offenbar definiert k für jede Dimension $\leq n+1$ einen (im Sinne φ) deckbewegungstreuen Homomorphismus der entsprechenden Kettengruppen von

⁽²¹⁾ Welche der Überlagerungsabbildungen \tilde{f}_i von f_i hierbei erscheint, hängt von dem Weg des Punktes $f(p)$ bei der Homotopie von f in f_1 ab.

⁽²²⁾ Terminologie wie bei ALEXANDROFF-HOPF, Topologie, S. 318.

⁽²³⁾ Natürlich ist der Grund für diese Beschränkung für die Dimension an dieser Stelle noch nicht ersichtlich, wird aber im folgenden klar werden.

\tilde{K}^{n+1} in die von \tilde{K}'^{n+1} . Ferner sind diese Homomorphismen randtreu; denn sowohl u als auch Φ sind randtreu. Also ist k tatsächlich eine Kettentransformation.

k ist natürlich durch f nicht eindeutig bestimmt; denn in der Auswahl der Unterteilung K_1 und der Approximation Φ besteht noch eine große Freiheit. Sei K_2 eine andere Unterteilung von K und Φ_2 simpliziale Approximation von f bezüglich \tilde{K}_2, \tilde{K}' . Sei k_2 die durch Φ_2 bestimmte Kettentransformation. Dann sind bekanntlich die beiden Abbildungen Φ und Φ_2 zueinander (im Sinne von φ) deckbewegungstreu homotop, d. h. es gibt eine stetige (im Sinne von φ) deckbewegungstreue Abbildung F des Prismas $\tilde{K} \times I$ in \tilde{K}' , die für $\tilde{K} \times 0$ mit Φ , für $\tilde{K} \times 1$ mit Φ_2 übereinstimmt. Dann sind aber nach dem Hilfsatz in § 2 die Abbildungen Φ und Φ_2 simplizial homotop, d. h. F kann als simpliziale (im Sinne von φ) deckbewegungstreue Abbildung einer deckbewegungstreuen Unterteilung des Prismas, die auf $\tilde{K} \times 0$ mit \tilde{K}_1 , auf $\tilde{K} \times 1$ mit \tilde{K}_2 übereinstimmt, genommen werden. Und zwar kann diese Unterteilung des Prismas als eine Unterteilung der Zellenzerlegung von $\tilde{K} \times I$ in die Zellen $\sigma \times I$ ($\sigma \in \tilde{K}$) gewählt werden. Sei u_1 die Unterteilungstransformation der zuletzt genannten Zellenzerlegung des Prismas in die für F benötigte Unterteilung. Dann definieren wir den Homomorphismus D der i -ten Kettengruppe von \tilde{K} in die $(i+1)$ -te Kettengruppe von \tilde{K}' durch

$$D\sigma^i = F u_1(\sigma^i \times I) \quad (0 \leq i \leq n)^{24)}.$$

Diese Homomorphismen D vermitteln eine Kettenhomotopie zwischen k und k_2 ; denn es gilt

$$\begin{aligned} \partial D\sigma^i &= F u_1(\partial(\sigma^i \times I)) = F u_1(\sigma^i \times 0) - F u_1(\sigma^i \times 1) - F u_1(\partial\sigma^i \times I) \\ &= k\sigma^i - k_2\sigma^i \quad D\partial\sigma^i. \end{aligned}$$

Ferner ist D offenbar (im Sinne von φ) deckbewegungstreu. Also ist durch die obige Vorschrift jeder stetigen (im Sinne von φ) deckbewegungstreuen Abbildung $f: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ eindeutig eine Klasse in den Dimensionen $\leq n$ kettenhomotoper (im Sinne von φ) deckbewegungstreuer Kettentransformationen des $(n+1)$ -Gerüsts \tilde{K}^{n+1} in \tilde{K}'^{n+1} zugeordnet.

Sei f_1 eine weitere Abbildung des Polyeders \tilde{K} in das Polyeder \tilde{K}' , die mit f zur selben Überlagerungsklasse gehört. Dann ist auch jede simpliziale Approximation von f_1 nach Ausführung einer geeigneten Decktransformation zu jeder simplizialen Approximation von f (im Sinne von φ) deckbewegungstreu homotop, und daher folgt genau wie oben, daß jede der Abbildung f zugeordnete Kettentransformation k nach Ausführung einer bestimmten Deckbewegung zu jeder der Abbildung f_1 zugeordneten Kettentransformation k_1 in den Dimensionen $\leq n$ deckbewegungstreu kettenhomotop ist. Wir sagen kurz: k und k_1 gehören zur selben Überlagerungsklasse von Kettentransformationen, indem wir zwei im Sinne einer bestimmten Homomorphismenklasse von $\pi_1(K)$ in $\pi_1(K')$ deckbewegungstreue Kettentransformationen k und k_1 von \tilde{K}^{n+1} in \tilde{K}'^{n+1} dann und nur dann zur selben Überlagerungsklasse

²⁴⁾ S. Anm. ²³⁾.

zählen, wenn es ein $x' \in \pi_1(K')$ derart gibt, daß k und $x' k_1$ in den Dimensionen $\leq n$ (im selben Sinne wie k) deckbewegungstreu kettenhomotop sind. Also: f und f_1 ist dieselbe Überlagerungsklasse von Kettentransformationen von \tilde{K}^{n+1} in \tilde{K}'^{n+1} zugeordnet.

Also sind die Abbildungsklassen des Polyeders \bar{K} in das Polyeder \bar{K}' eindeutig bezogen auf eine Untermenge der Überlagerungsklassen der Kettentransformationen des $(n+1)$ -Gerüsts \tilde{K}^{n+1} in das $(n+1)$ -Gerüst \tilde{K}'^{n+1} . Dabei kommt es offenbar nach unserer Herleitung gar nicht darauf an, welche Simplicialzerlegungen der Polyeder \bar{K} und \bar{K}' der Betrachtung zugrundegelegt werden.

Soweit gilt alles ohne weitere Voraussetzung über die Polyeder \bar{K} und \bar{K}' . Wir setzen nun weiter voraus, daß alle Homotopiegruppen des Polyeders \bar{K}' außer der ersten und der n -ten verschwinden. Dann kann man den wesentlichen Inhalt der Überlegungen der vorhergehenden Paragraphen dahin zusammenfassen, daß

1. jeder (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ) deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ einer geeigneten (im Sinne desselben φ) deckbewegungstreuen stetigen Abbildung von \tilde{K} in \tilde{K}' zugeordnet ist,
2. zwei (im Sinne eines bestimmten Homomorphismus φ) deckbewegungstreue stetige Abbildungen von \tilde{K} in \tilde{K}' , deren zugeordnete Kettentransformationen in den Dimensionen $\leq n$ deckbewegungstreu kettenhomotop sind, selbst deckbewegungstreu homotop sind.

In der Tat hat man nur zu bemerken, daß die Überlegungen der vorigen Paragraphen über die Verwirklichung von Kettentransformationen und Kettenhomotopien durch stetige Abbildungen und Homotopien nur die Voraussetzung benutzen, daß im Bildpolyeder \bar{K}' alle Homotopiegruppen außer der ersten und der n -ten verschwinden. Also läßt sich erstens jede deckbewegungstreue Kettentransformation $k: \tilde{K}^{n+1} \rightarrow \tilde{K}'^{n+1}$ durch eine Abbildung $\Phi: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}'$ realisieren derart, daß Φ in einer Unterteilung von \tilde{K}^{n+1} simplicial ist und dort die Kettentransformation k bestimmt. Zweitens läßt sich ebenso eine Kettenhomotopie (in den Dimensionen $\leq n$) zwischen den Kettentransformationen, die zwei Abbildungen von \tilde{K} in \tilde{K}' zugeordnet sind, realisieren, so daß diese beiden Abbildungen auf dem n -dimensionalen Gerüst homotop sind. Dann sind sie aber auch für das ganze Polyeder homotop; denn wegen des Verschwindens der Homotopiegruppen $\pi_{n+1}(K'), \dots$, läßt sich die Homotopie von der Dimension n auf die Dimension $n+1, \dots$ fortsetzen.

Wir sehen also, daß die oben genannte Zuordnung zwischen den Abbildungsklassen von \bar{K} in \bar{K}' und den Überlagerungsklassen der Kettentransformationen von \tilde{K}^{n+1} in \tilde{K}'^{n+1} eine umkehrbar eindeutige Zuordnung mit der Gesamtheit aller Überlagerungsklassen ist. Damit haben wir den

Satz 3. Sei \bar{K}' ein zusammenhängendes Polyeder, dessen sämtliche Homotopiegruppen außer der n -ten und der Fundamentalgruppe verschwinden. Sei \bar{K} ein beliebiges zusammenhängendes Polyeder. Dann stehen die Abbildungsklassen von \bar{K} in \bar{K}' in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu der Gesamtheit der Über-

lagerungsklassen der (in den Dimensionen $\leq n^{25}$) kettenhomotopen) Kettentransformationen des $(n+1)$ -Gerüsts \tilde{K}^{n+1} in das $(n+1)$ -Gerüst \tilde{K}^{n+1} .

Natürlich ist mit dem Satz 3 das Problem der Bestimmung der Abbildungsklassen von \tilde{K} in \tilde{K}' nicht gelöst. Seine Bedeutung liegt vielmehr darin, daß es zurückgeführt wird auf das algebraisch-kombinatorische Problem der Bestimmung der Überlagerungsklassen der Kettentransformationen von \tilde{K}^{n+1} in \tilde{K}'^{n+1} . Dies ist tatsächlich ein rein algebraisches Problem. Es erfordert allerdings auch noch die Konstruktion der universellen Überlagerungen, also die explizite Kenntnis der Elemente der Fundamentalgruppen von \tilde{K} und \tilde{K}' . Man beachte noch, daß es nach der ganzen Herleitung nicht darauf ankommt, welche Simplicialzerlegung der Polyeder \tilde{K} und \tilde{K}' man benutzt²⁶).

Literaturverzeichnis.

- [1] ECKMANN, B.: Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, *Comment. math. helv.* 18, 232 (1945/46). — [2] EILENBERG, S.: Cohomology and continuous mappings, *Ann. of Math.* 41, 231 (1940). — [3] EILENBERG, S.: Homology of spaces with operators I, *Trans. Amer. math. Soc.* 61, 378 (1947). — [4] EILENBERG, S.: Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups, *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 3 (1949). — [5] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann. of Math.* 46, 480 (1945). — [6] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Cohomology theory in abstract groups I, *Ann. of Math.* 48, 51 (1947). — [7] EILENBERG, S., a. S. MACLANE: Homology of spaces with operators II, *Trans. Amer. math. Soc.* 65, 49 (1949). — [8] FOX, R. H.: Homotopy groups and torus homotopy groups, *Ann. of Math.* 49, 471 (1948). — [9] HOFF, H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. math. helv.* 14, 257 (1941/42) und Nachtrag hierzu, *Comment. math. helv.* 15, 27 (1942/43). — [10] HOFF, H.: Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, *Comment. math. helv.* 17, 39 (1944). — [11] HOFF, H.: Beiträge zur Homotopietheorie, *Comment. math. helv.* 17, 307 (1944/45). — [12] HU, S.-T.: An exposition of the relative homotopy theory, *Duke math. J.* 14, 991 (1947). — [13] HUREWICZ, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen I, II, III, IV, *Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam* 38, 112, 521 (1935), 39, 117, 215 (1936). — [14] MACLANE, S., a. J. H. C. WHITEHEAD: On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 36, 41 (1950). — [15] OLUM, P.: Obstructions to extensions and homotopies, *Ann. of Math.* 52, 1 (1950). — [16] POSTNIKOV, M. M.: Klassifikation der stetigen Abbildungen eines beliebigen n -dimensionalen Polyeders in einen zusammenhängenden topologischen Raum, der in den Dimensionen zwischen eins und n asphärisch ist, *Doklad. Akad. Nauk. SSSR*, 67, 427 (1949) (russ.). — [17] STEENROD, N.: Homology with local coefficients, *Ann. of Math.* 44, 610 (1943). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: On the homotopy-type of ANR 's, *Bull. Amer. math. Soc.*, 54, 1133 (1948). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I, II, *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 213, 453 (1949).

²⁵) Wir könnten hier ebenso gut die Überlagerungsklassen durch die Bedingung $k \approx x' k_1$ ($\dim \leq n+1$) erklären; denn zwei Kettentransformationen, die in den Dimensionen $\leq n$ kettenhomotop sind, sind es auch in der Dimension $n+1$; weil hier $H_{n+1}(\tilde{K}) = 0$ ist. Nach HOFF [11] 3-5 ist nämlich für ein in den Dimensionen $1, 2, \dots, n-1$ asphärisches Polyeder jeder $(n+1)$ -Zyklus sphärisch, d. h. der natürliche Homomorphismus der $(n+1)$ Homotopiegruppe in die $(n+1)$ Homologiegruppe ein Homomorphismus auf die ganze Homologiegruppe. Es ist aber in unserem Falle $\pi_i(\tilde{K}) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ und $\pi_{n+1}(\tilde{K}) = \pi_{n+1}(K) = 0$.

²⁶) Soeben ist in zwei Arbeiten ebenfalls eine Lösung des Problems der Abbildungsklassen angekündigt worden, nämlich P. OLUM [15] und M. M. POSTNIKOV [16]. Beide Autoren benutzen für die Klassifikation wesentlich die EILENBERG-MACLANESche Invariante.

A Lattice-theoretic Characterisation of the κ_0 -valued Propositional Calculus.

By

ALAN ROSE in Aberdeen.

There has recently been developed (3)¹ an algebraic system bearing the same relation to 3-valued logic as BOOLEAN algebra bears to 2-valued logic. This has since been generalised (4) to m -valued logics where m is finite, and a method has been indicated (5) for developing systems similarly related to systems of logic whose truth-values form lattices (5). In the m -valued case the propositions are denoted by ordered sets of $m-1$ elements, $(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$, from a BOOLEAN algebra where $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{m-1}$. The object of the present paper is to give the corresponding theory for the κ_0 -valued Propositional Calculus. We denote the truth-values by all rational numbers which satisfy $0 \leq r \leq 1$. We denote propositions by ordered pairs of enumerable dense sets (E_p, F_p) where E_p, F_p consist of elements p_{rE}, p_{rF} respectively, where $r \in R, R$ denotes the set of rational numbers satisfying $0 \leq r \leq 1$, and

- (I) $p_{rE} \leq p_{sE}$ when $r > s$,
- (II) $p_{rF} \leq p_{sF}$ when $r > s$,
- (III) $p_{rE} \geq p_{rF}$ for all $r \in R$,
- (IV) $p_{0E} = I$,
- (V) $p_{1F} = O$,
- (VI) $\sum_{r \in R} (p_{rE} \cap p'_{rF}) = I$.

p_{rE} can be regarded as the region in which p takes truth-values greater than or equal to r , and p_{rF} as the region in which p takes truth-values greater than r . Since all truth-values are greater than or equal to 0, $p_{0E} = I$. Since there are no truth-values greater than 1, $p_{1F} = O$. Since p_{rF} denotes the region in which p has truth-values greater than r , p'_{rF} denotes the region in which p has truth-values less than or equal to r . But p_{rE} denotes the region in which p has truth-values greater than or equal to r , so that $p_{rE} \cap p'_{rF}$ denotes the region in which p has the truth-value r . Hence, since the set truth-values is R ,

$$\sum_{r \in R} (p_{rE} \cap p'_{rF}) = I.$$

We now consider the primitive functions of the κ_0 -valued ŁUKASIEWICZ-TARSKI propositional calculus (1). These primitives are a negation function, \bar{p} , which has the truth-value $1-x$ when p has the truth-value x , and an implication function, $p \rightarrow q$, which has the truth-value $\min. (1, 1-x+y)$ when p has the truth-value x and q has the truth-value y . Thus

$$\bar{p}_{rE} = p'_{1-r,F}$$

$$\bar{p}_{rF} = p'_{1-r,E}.$$

and

¹ The numbers in brackets refer to the Bibliography.

To determine the pair of sets corresponding to $p \rightarrow q$ we first find the pair of sets corresponding to the function²⁾ pwq which takes the truth-value $\min. (1, x + y)$ when p takes the truth-value x and q takes the truth-value y .

If we know that the truth-value of p is greater than or equal to s and we wish the truth-value of pwq to be greater than or equal to r , then we must assign to q a truth-value greater than or equal to $r - s$. If, instead we know that the truth-value of p is greater than s , we still must stipulate that the truth-value of q be greater than or equal to $r - s$. Thus

$$(pwq)_{rE} = \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p_{sE} \cap q_{r-s,E}).$$

If we know that the truth-value of p is greater than or equal to s and wish the truth-value of pwq to be greater than r , we must assign to q a truth-value greater than $r - s$. If, however, we know that the truth-value of p is greater than s , it is sufficient to assign to q a truth-value greater than or equal to $r - s$. Thus

$$(pwq)_{rF} = \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p_{sE} \cap q_{r-s,F}) \cup \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p_{sF} \cap q_{r-s,E}).$$

Since $p \rightarrow q$ has the same truth-value as $\bar{p}wq$, it follows that

$$(p \rightarrow q)_{rE} = \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p'_{1-s,F} \cap q_{r-s,E})$$

$$\text{and } (p \rightarrow q)_{rF} = \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p'_{1-s,F} \cap q_{r-s,F}) \cup \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p'_{1-s,E} \cap q_{r-s,E}).$$

The usual alternation function is defined by

$$p \vee q = \text{alt. } (p \rightarrow q) \rightarrow q.$$

Hence, if p has the truth-value x and q has the truth-value y , $p \vee q$ has the truth-value $\max. (x, y)$. It follows that

$$(p \vee q)_{rE} = p_{rE} \cup q_{rE}$$

and

$$(p \vee q)_{rF} = p_{rF} \cup q_{rF}.$$

$p \& q$ is then defined by

$$p \& q = \text{alt. } \bar{p} \vee \bar{q}.$$

But

$$(\bar{p} \vee \bar{q})_{rE} = p'_{1-r,F} \cup q'_{1-r,F}$$

and

$$(\bar{p} \vee \bar{q})_{rF} = p'_{1-r,E} \cup q'_{1-r,E}.$$

Hence

$$(p \& q)_{rE} = (\bar{p} \vee \bar{q})'_{1-r,F} = p_{rE} \cap q_{rE}$$

and

$$(p \& q)_{rF} = (\bar{p} \vee \bar{q})'_{1-r,E} = p_{rF} \cap q_{rF}.$$

In view of our interpretation it follows that if 1 is the only designated truth-value the class of identically true formulae is identical with the class of formulae whose E-sets have the element with suffix 1 equal to 1. As examples we shall verify the formulae (1) $p \rightarrow p$, (2) $p \rightarrow \bar{p}$, (3) $p \rightarrow p \vee q$, (4) $(\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

²⁾ This function is a generalisation of the alternation function used in (6). It is, of course, different from the alternation function, $p \vee q$, used in (1) and (2).

$$(1) \quad (p \rightarrow p)_{1E} = \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap p_{1-s, E}) = I^3).$$

$$(2) \quad \bar{p}_{rE} = \bar{p}'_{1-r, F} = p_{rE}.$$

Hence

$$\begin{aligned} (p \rightarrow \bar{p})_{1E} &= \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap \bar{p}_{1-s, E}) \\ &= \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap p_{1-s, E}) = I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (p \rightarrow p \vee q)_{1E} &= \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap (p \vee q)_{1-s, E}) \\ &= \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap (p_{1-s, E} \cup q_{1-s, E})) \\ &= \sum_{s \in R} ((p'_{1-s, F} \cap p_{1-s, E}) \cup (p'_{1-s, F} \cap q_{1-s, E})) \\ &\geq \sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap p_{1-s, E}). \end{aligned}$$

But

$$\sum_{s \in R} (p'_{1-s, F} \cap p_{1-s, E}) = I.$$

Hence

$$(p \rightarrow p \vee q)_{1E} = I.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (\bar{q} \rightarrow \bar{p})_{rE} &= \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (\bar{q}'_{1-s, F} \cap \bar{p}_{r-s, E}) \\ &= \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (q_{sE} \cap p'_{1-r+s, F}) \\ &= \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p'_{1-r+s, F} \cap q_{sE}). \end{aligned}$$

Let us now replace $r-s$ by t . Then, since $0 \leq s \leq r$, $0 \leq t \leq r$. Hence

$$\begin{aligned} (\bar{q} \rightarrow \bar{p})_{rE} &= \sum_{\substack{t \in R \\ t \leq r}} (p'_{1-t, F} \cap q_{r-t, E}) \\ &= \sum_{\substack{s \in R \\ s \leq r}} (p'_{1-s, F} \cap q_{r-s, E}) \\ &= (p \rightarrow q)_{rE}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} ((\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \rightarrow (p \rightarrow q))_{1E} &= \sum_{s \in R} ((\bar{q} \rightarrow \bar{p})'_{1-s, F} \cap (p \rightarrow q)_{1-s, E}) \\ &= \sum_{s \in R} ((\bar{q} \rightarrow \bar{p})'_{1-s, F} \cap (\bar{q} \rightarrow \bar{p})_{1-s, E}) = I. \end{aligned}$$

Bibliography.

- (1) ŁUKASIEWICZ, JAN, a. ALFRED TARSKI: C. r. Soc. Sci. Lettr. Warsaw, Cl. III, **23**, 30 (1930).
- (2) POST, EMIL L.: Amer. J. Math. **43**, 163 (1921).
- (3) ROSE, ALAN: J. London Math. Soc. **25**, 255 (1950).
- (4) ROSE, ALAN: Norsk Mat. Tidsskr., **33**, 27 (1951).
- (5) ROSE, ALAN: Math. Ann. **123**, 152 (1951).
- (6) ROSE, ALAN: J. London Math. Soc. **26**, 50 (1951).

³⁾ By condition (VI).

Über Seiteneinteilungen in affinen und euklidischen Ebenen.

Von

FRIEDRICH BACHMANN und WILHELM KLINGENBERG in Kiel.

Durch seine Theorie der Ordnungsfunktionen¹⁾ hat E. SPERNER die Aufmerksamkeit auf die Anordnungsseigenschaften einer affinen Ebene gelenkt, die sich aus der Annahme ergeben, daß jede Gerade die nicht auf ihr liegenden Punkte in zwei Klassen, die „Seiten“ der Geraden, einteilt und daß die Einteilung zwei einfachen geometrischen Bedingungen, der Parallelenbedingung und der Geradenrelation, genügt. Eine äquivalente Annahme ist, daß auf jeder Geraden jeder Punkt die übrigen Punkte in zwei Klassen, die „Seiten“ des Punktes, einteilt und daß die Einteilung gegen Parallelprojektion invariant ist. Diese *Seiteneinteilungen* lassen sich durch Ordnungsfunktionen beschreiben, und es ergibt sich so ein Kalkül, der einen bemerkenswerten Teil geometrischer Anordnungsbeziehungen liefert²⁾.

Durch die SPERNERSchen Untersuchungen wird die Frage nahegelegt, welche affinen Ebenen eine (echte) Seiteneinteilung zulassen, und man kann allgemeiner versuchen, über die möglichen Seiteneinteilungen einer gegebenen affinen Ebene einen Überblick zu erhalten. Da die Seiteneinteilungen einer affinen Ebene den „Halbordnungen“ der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse eindeutig entsprechen, kann die Frage auf eine gruppentheoretische zurückgeführt werden, welche sich allgemein beantworten läßt. Wir zeigen sodann, daß die euklidischen Ebenen, die wir als affine Ebenen mit einer Orthogonalität ohne selbst-orthogonale Geraden erklären³⁾, stets echte, durch die Orthogonalität ausgezeichnete, Seiteneinteilungen besitzen.

Auf den Begriff der euklidischen Ebene in der hier vorausgesetzten Allgemeinheit wird man durch die Begründung der metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff geführt, wie sie, Untersuchungen von HESSENBERG und HJELMSLEV weiterführend, K. REIDEMEISTER, ARNOLD SCHMIDT und F. BACHMANN unternommen haben. Bei dieser Begründung wird ein Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie zugrunde gelegt, welches den Spiegelungsbegriff als Grundbegriff benutzt und keine Anordnungsaxiome und

¹⁾ E. SPERNER: [1] Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. 121, 107 (1949). [2] Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzgber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., 1949, 413. [3] Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16, 140 (1950). — Über die ersten beiden Arbeiten erschienen Berichte in Arch. Math. Oberwolfach 1, 9, 148 (1949).

Die vorliegende Arbeit ist so abgefaßt, daß sie unabhängig von den SPERNERSchen Arbeiten lesbar ist. § 1 ist eine Darstellung der im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Definitionen und Ergebnisse von SPERNER, allerdings in etwas abweichender Form.

²⁾ Beispiele solcher Anordnungsätze s. SPERNER [1] § 4.

³⁾ Zu dieser Definition vgl. O. VEULEN and J. W. YOUNG, Projective geometry, vol. II. Boston 1918. Ch. IV, und R. BARR, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Trans. Amer. Math. Soc. 56, 94 (1944).

-begriffe enthält⁴⁾; und da das Axiomensystem auch über endlichen Körpern realisiert werden kann, gestatten die ihm genügenden Geometrien gewiß nicht stets eine volle Anordnung. Wir gelangen nun aber zu dem Ergebnis, daß die euklidischen Spiegelungsgeometrien stets durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilungen zulassen.

Es ergibt sich so ein Zusammenhang zwischen der SPERNERschen Theorie der Ordnungsfunktionen und den Untersuchungen über die Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Man erkennt, daß die Seiteneinteilungen, deren affine Eigenschaften SPERNER zunächst untersucht hat, auch zur Metrik in Beziehung gesetzt werden können, und gewinnt einen neuen Zugang zu der Frage, in welchem Umfang metrische Tatsachen die Anordnbarkeit der Geometrie zur Folge haben.

§ 1. Seiteneinteilungen und Halbordnungen.

Wir sagen, daß in einer affinen Ebene⁵⁾ eine *Halbgeraden-Einteilung* gegeben ist, wenn für die Punkttupel P_0, P_1, P_2 (hiermit ist stets gemeint, daß P_0, P_1, P_2 in einer Geraden liegen und $P_0 \neq P_1, P_2$ ist) zwei Relationen

- (1) P_1 und P_2 liegen auf derselben Seite von P_0 ,
 P_1 und P_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_0

gegeben sind, die den folgenden Bedingungen genügen⁶⁾:

1. Für jedes feste Punkttupel gilt genau eine der Relationen (1);

2. *Transitivitätsregel*: Sind P_0, P_1, P_2, P_3 Punkte einer Geraden und ist $P_0 \neq P_1, P_2, P_3$, so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen Seite von P_0 , P_2 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0 , so liegen P_1 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0 ; liegen P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von P_0 , P_2 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0 , so liegen P_1 und P_3 auf verschiedenen bzw. auf der gleichen Seite von P_0 ;

3. *Invarianz gegen Parallelprojektion*: Sind P_0, P_1, P_2 und P'_0, P'_1, P'_2 Punkttupel auf zwei verschiedenen Geraden und liegen $P_0, P'_0; P_1, P'_1; P_2, P'_2$ auf zueinander parallelen Geraden (der Fall, daß etwa $P_0 = P'_0$ ist, soll zugelassen sein), so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0 , so liegen P'_1 und P'_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P'_0 .

Liegen P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von P_0 , so sagen wir auch, daß P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt. Es ist klar, daß man die Definition der Halbgeraden-Einteilung auch mit Hilfe der Zwischenbeziehung aussprechen kann.

Halbgeraden-Einteilungen beschreiben wir durch *Ordnungsfunktionen*: Ist eine Halbgeraden-Einteilung gegeben, so führen wir eine Funktion der Punkttupel P_0, P_1, P_2 , geschrieben $P_0(P_1, P_2)$, ein und setzen $P_0(P_1, P_2) = 1$ oder $P_0(P_1, P_2) = -1$, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P_0 liegen. Die Definitionseigenschaften der Halbgeraden-Einteilung drücken sich dann dadurch aus, daß für jedes feste Punkttupel

⁴⁾ ARNOLD SCHMIDT: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. 118, 609 (1943), und eine anschließende Note von F. BACHMANN: Math. Ann. 123, (1951).

⁵⁾ Eine affine Ebene sei durch die Gültigkeit der affinen Inzidenzaxiome und des Satzes von DESARGUES definiert.

⁶⁾ Vgl. SPERNER [1] S. 115ff.

Mathematische Annalen. 123.

(2) entweder $P_0(P_1, P_2) = 1$ oder $P_0(P_1, P_2) = -1$

ist, daß die Gleichung

$$(3) \quad P_0(P_1, P_2) P_0(P_2, P_3) = P_0(P_1, P_3)$$

für Punkte einer Geraden ($P_0 \neq P_1, P_2, P_3$) allgemein gilt, und daß unter den angegebenen geometrischen Voraussetzungen der Parallelprojektion $P_0(P_1, P_2) = P_0'(P_1, P_2)$ ist. Umgekehrt beschreibt jede Funktion $P_0(P_1, P_2)$ der Punkttupel, die diesen drei Bedingungen genügt, eine Halbgeraden-Einteilung.

Als einfache Folgerungen von (2) und (3) bemerken wir zunächst:

$$(4) \quad P_0(P_1, P_1) = 1, P_0(P_1, P_2) = P_0(P_2, P_1).$$

$$(5) \quad \text{Aus } P_0(P_1, P'_1) = P_0(P_2, P'_2) \text{ folgt } P_0(P_1, P_2) = P_0(P'_1, P'_2),$$

für Punkttupel einer Geraden. Man erhält die erste Gleichung (4), die die *Reflexivität* des Liegens auf der gleichen Seite ausdrückt, indem man in (3) $P_2 = P_3 = P_1$ setzt, und dann die zweite Gleichung (4), die die *Symmetrie* der beiden Relationen (1) ausdrückt, indem man in (3) $P_2 = P_1$ setzt. Um (5) als gültig zu erkennen, multipliziere man die gegebene Gleichung mit $P_0(P'_1, P_2)$; man erhält $P_0(P_1, P'_1) P_0(P'_1, P_2) = P_0(P'_1, P_2) P_0(P_2, P'_2)$ und durch Anwendung von (3) die behauptete Gleichung.

In der affinen Ebene denken wir uns durch die üblichen geometrischen Definitionen *Streckenverhältnisse* und das Rechnen mit ihnen eingeführt⁷⁾. Wir wollen zeigen, daß eine Halbgeraden-Einteilung eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse induziert. Dabei ist eine *Halbordnung* einer Gruppe erklärt als eine Einteilung ihrer Elemente in zwei fremde Klassen, die der „positiven“ und die der „negativen“ Elemente, mit der Eigenschaft, daß das Produkt von zwei Elementen gleicher Klasse stets positiv, das Produkt von zwei Elementen verschiedener Klasse stets negativ ist⁸⁾.

Als funktionale Darstellung der Halbordnungen einer Gruppe verwenden wir die *quadratischen Charaktere*⁹⁾ der Gruppe, indem wir bei gegebener Halbordnung $\chi(a) = 1$ oder $\chi(a) = -1$ setzen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Die Funktion $\chi(a)$ hat dann die Eigenschaften, daß für jedes feste Gruppenelement a

$$(6) \quad \text{entweder } \chi(a) = 1 \text{ oder } \chi(a) = -1$$

ist und daß für beliebige Gruppenelemente die Charakter-Regel

$$(7) \quad \chi(a) \chi(b) = \chi(ab)$$

gilt, die die multiplikative Regel der Halbordnung ausdrückt; und jede Funktion mit diesen beiden Eigenschaften beschreibt eine Halbordnung.

⁷⁾ K. REIDEMEISTER: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. Kap. 6, 7. Vgl. auch die dort zitierte Arbeit von O. HÖLDER, Streckenrechnung und projektive Geometrie. Verh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., Math.-phys. Kl. 63, 65 (1911).

⁸⁾ Wir verwenden den Begriff „Halbordnung“ im Anschluß an SPERNER [1] § 5, [2] §§ 1 bis 3, [3] S. 142 ff. (P. LORENZEN: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. 52, 483 (1950) verwendet den Begriff anders.)

Eine nichttriviale (s. S. 294) Halbordnung einer Gruppe ist offenbar nichts anderes als eine Zerlegung der Gruppe in eine Untergruppe vom Index 2 und die zugehörige Nebenklasse, bei der die Elemente der Untergruppe positiv, die der Nebenklasse negativ genannt werden. (Vgl. SPERNER [1] §. 124, [2] S. 417.)

⁹⁾ Zur Theorie der Gruppen-Charaktere vgl. etwa H. HASSE, Zahlentheorie. Berlin 1949. § 5.

Ist nun eine Halbgeraden-Einteilung gegeben, so gilt für Punkttupel, da solche mit gleichem Streckenverhältnis durch eine Kette von Parallelprojektionen auseinander hervorgehen:

$$(8) \quad \text{Ist } P_0 P_2 / P_0 P_1 = P'_0 P'_2 / P'_0 P'_1, \text{ so ist } P_0 (P_1, P_2) = P'_0 (P'_1, P'_2).$$

Definieren wir daher

$$(9) \quad \chi(P_0 P_2 / P_0 P_1) = P_0 (P_1, P_2),$$

so ist damit jedem Streckenverhältnis $a \neq 0$ unabhängig vom repräsentierenden Punkttupel ein Funktionswert $\chi(a)$ zugeordnet, und aus (2) folgt (6). Sind ferner a, b zwei von Null verschiedene Streckenverhältnisse und werden auf einer Geraden Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 so gewählt, daß $P_0 P_2 / P_0 P_1 = a, P_0 P_3 / P_0 P_2 = b$ ist, so ergibt die Transitivitätsregel (3), auf Grund unserer Definition (9):

$$(10) \quad \chi(P_0 P_2 / P_0 P_1) \chi(P_0 P_3 / P_0 P_2) = \chi(P_0 P_3 / P_0 P_1),$$

und da nach der Definition des Produkts zweier Streckenverhältnisse $P_0 P_3 / P_0 P_1 = ab$ ist, gilt (7).

Umgekehrt kann man aus jeder Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse eine Halbgeraden-Einteilung gewinnen, indem man bei gegebener Halbordnung für ein Punkttupel P_0, P_1, P_2

$$(11) \quad P_0 (P_1, P_2) = \chi(P_0 P_2 / P_0 P_1)$$

setzt. Da der so definierte Wert $P_0 (P_1, P_2)$ nur von dem Streckenverhältnis des Punkttupels abhängt, gilt die Invarianz gegen Parallelprojektion. Ferner folgt (2) aus (6). Und sind P_0, P_1, P_2, P_3 Punkte einer Geraden, so folgt aus der multiplikativen Regel (7) die Gleichung (10), welche zeigt, daß bei der Festsetzung (11) die Transitivitätsregel (3) erfüllt ist.

Da der Übergang von einer Halbgeraden-Einteilung zu der Halbordnung gemäß (9) und der Übergang von einer Halbordnung zu der Halbgeraden-Einteilung gemäß (11) zueinander inverse Prozesse sind, gilt:

Satz 1. Die Halbgeraden-Einteilungen einer affinen Ebene und die Halbordnungen der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse entsprechen sich umkehrbar eindeutig; liegen bei einer Halbgeraden-Einteilung P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0 , so ist das Streckenverhältnis $P_0 P_2 / P_0 P_1$ bei der zugehörigen Halbordnung positiv bzw. negativ, und umgekehrt.

Eine Halbgeraden-Einteilung ist, wie nun gezeigt werden soll, einer Halbebenen-Einteilung äquivalent¹⁰⁾.

Wir sagen, daß in einer affinen Ebene eine *Halbebenen-Einteilung* gegeben ist, wenn für die Tripel g, P_1, P_2 (hiermit ist stets gemeint, daß g eine Gerade ist und P_1, P_2 nicht auf ihr gelegene Punkte sind) zwei Relationen

$$(12) \quad \begin{aligned} &P_1 \text{ und } P_2 \text{ liegen auf derselben Seite von } g, \\ &P_1 \text{ und } P_2 \text{ liegen auf verschiedenen Seiten von } g \end{aligned}$$

gegeben sind, die den folgenden Bedingungen genügen¹⁰⁾:

1. Für jedes feste Tripel g, P_1, P_2 gilt genau eine der Relationen (12);

¹⁰⁾ Die Transitivitätsregel ist zugleich das (existenzfrei formulierte) Axiom von PASCH; s. SPERNER [1] S. 109f. Die Parallelenbedingung ist der Arbeit SPERNER [3] entnommen; vgl. dort Satz 4. Die Geradenrelation ist von SPERNER in [1] S. 113, [2] S. 419, [3] S. 141 eingeführt.

2. *Transitivitätsregel* für jede Gerade g und beliebige, nicht auf g gelegene Punkte P_1, P_2, P_3 , analog wie oben;

3. *Parallelenbedingung*: Sind P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte und ist ihre Verbindungsgerade zu der Geraden g parallel, aber von ihr verschieden, so liegen P_1 und P_2 auf der gleichen Seite von g ;

4. *Geradenrelation*: Ist P_0, P_1, P_2 ein Punkttupel einer Geraden l und sind g, g' Geraden durch P_0 , die von l verschieden sind, so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von g , so liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von g' .

Halbebenen-Einteilungen beschreiben wir durch *Ordnungsfunktionen* $g(P_1, P_2)$, indem wir bei gegebener Halbebenen-Einteilung wieder $g(P_1, P_2) = 1$ oder $g(P_1, P_2) = -1$ setzen, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von g liegen¹¹⁾. Die Definitionseigenschaften der Halbebenen-Einteilung drücken sich dann dadurch aus, daß für jedes feste Tupel g, P_1, P_2

$$(13) \quad \text{entweder } g(P_1, P_2) = 1 \text{ oder } g(P_1, P_2) = -1$$

ist, daß allgemein für nichtinzidierende Punkte und Geraden

$$(14) \quad g(P_1, P_2) \cdot g(P_2, P_3) = g(P_1, P_3)$$

gilt, und daß unter den angegebenen geometrischen Voraussetzungen der Parallelenbedingung bzw. der Geradenrelation stets $g(P_1, P_2) = 1$ bzw. stets $g(P_1, P_2) = g'(P_1, P_2)$ gilt. Umgekehrt beschreibt jede Funktion $g(P_1, P_2)$ der Tupel g, P_1, P_2 , welche diesen Bedingungen genügt, eine Halbebenen-Einteilung.

Als einfache Folgerungen gelten die zu (4) und (5) analogen Regeln:

$$(15) \quad g(P_1, P_1) = 1, \quad g(P_1, P_2) = g(P_2, P_1).$$

$$(16) \quad \text{Aus } g(P_1, P'_1) = g(P_2, P'_2) \text{ folgt } g(P_1, P_2) = g(P'_1, P'_2).$$

Um nun eine Halbgeraden-Einteilung zu einer Halbebenen-Einteilung zu erweitern, setzen wir für die Tupel g, P_1, P_2 fest: Ist l' eine Gerade, welche g schneidet, und sind P'_0, P'_1, P'_2 die Schnittpunkte von l' mit g und den durch P_1, P_2 gehenden Parallelen zu g , so sei

$$(17) \quad g(P_1, P_2) = P'_0(P'_1, P'_2);$$

wegen der Invarianz der Halbgeraden-Einteilung gegen Parallelprojektion ist diese Definition von der Wahl der Hilfsgeraden l' unabhängig. Es gelten (13), (14) und die Parallelenbedingung, da auf l' (2), (3) und nach (4) $P'_0(P'_1, P'_1) = 1$ gilt. Die Gültigkeit der Geradenrelation erkennt man, indem man $l' = l$ wählt.

Umgekehrt induziert jede Halbebenen-Einteilung eine Halbgeraden-Einteilung. Denn bei gegebener Halbebenen-Einteilung kann man für ein Punkttupel P_0, P_1, P_2 , wenn g eine von der Geraden (P_0, P_1) verschiedene Gerade durch P_0 ist, definieren:

$$(18) \quad P_0(P_1, P_2) = g(P_1, P_2);$$

wegen der Geradenrelation ist diese Definition von der speziellen Wahl der Geraden g unabhängig. Die Bedingungen (2), (3) folgen aus den entsprechenden

¹¹⁾ In der SPERNERschen Terminologie ist dies eine „abgeleitete Ordnungsfunktion erster Stufe“; vgl. SPERNER [1] S. 110, [2] S. 418.

Bedingungen (13), (14). Es bleibt die Invarianz gegen Parallelprojektion zu bestätigen. Hierzu seien P_0, P_1, P_2 und P'_0, P'_1, P'_2 Punkttupel auf zwei verschiedenen Geraden und es mögen $P_0, P'_0; P_1, P'_1; P_2, P'_2$ auf zueinander parallelen Geraden liegen. Ist dann h_0 die Gerade des gegebenen Parallelenbüschels, die P_0 und P'_0 enthält, so ist nach der Parallelenbedingung oder der ersten Gleichung (15) $h_0(P_1, P'_1) = 1, h_0(P_2, P'_2) = 1$; hieraus folgt nach (16) $h_0(P_1, P_2) = h_0(P'_1, P'_2)$ und nach der Definition (18) $P_0(P_1, P_2) = P'_0(P'_1, P'_2)$.

Die geschilderten Prozesse zur Gewinnung einer Halbebenen-Einteilung aus einer Halbgeraden-Einteilung und einer Halbgeraden-Einteilung aus einer Halbebenen-Einteilung sind wieder zueinander invers. Es gilt also:

Satz 2. In einer affinen Ebene induziert jede Halbgeraden-Einteilung eine Halbebenen-Einteilung, und umgekehrt; die Halbgeraden- und Halbebenen-Einteilungen entsprechen sich umkehrbar eindeutig.

Man kann daher allgemeiner von einer Seiteneinteilung einer affinen Ebene sprechen und diese entweder als Halbgeraden-Einteilung oder als Halbebenen-Einteilung definiert denken. In dieser Arbeit soll jedoch die erste Auffassung bevorzugt werden.

Ist eine Seiteneinteilung gegeben, so läßt sich auch eine Trennbeziehung definieren: Das Geradenpaar g'_1, g'_2 trennt das Punktepaar P_1, P_2 , wenn P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten einer der beiden Geraden und auf derselben Seite der anderen Geraden liegen¹³⁾. Sind ferner g'_1, g'_2, g_1, g_2 Geraden eines Büschels ($g'_i \neq g_j$), so sagen wir das Geradenpaar g'_1, g'_2 trennt das Geradenpaar g_1, g_2 , wenn für zwei Punkte P_1, P_2 von g_1, g_2 gilt, daß das Geradenpaar g'_1, g'_2 das Punktepaar P_1, P_2 trennt. Gilt dies für ein Punktepaar P_1, P_2 von g_1, g_2 , so gilt für je zwei vom Büschelzentrum verschiedene Punkte Q_1, Q_2 von g_1, g_2 , daß g'_1, g'_2 das Punktepaar Q_1, Q_2 trennt. Denn es gelten die Gleichungen $g'_1(P_1, Q_1) = g'_2(P_1, Q_1), g'_1(P_2, Q_2) = g'_2(P_2, Q_2)$; sie folgen aus der Geradenrelation, wenn das Büschelzentrum eigentlich ist, und aus der Parallelenbedingung, wenn das Büschelzentrum uneigentlich ist. Multipliziert man die vorausgesetzte Gleichung $g'_1(P_1, P_2) = -g'_2(P_1, P_2)$ mit diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich auf Grund der Regeln (14), (15) die behauptete Gleichung $g'_1(Q_1, Q_2) = -g'_2(Q_1, Q_2)$.

Faßt man die affine Ebene als ebene Koordinatengeometrie über dem Schiefkörper der Streckenverhältnisse auf und ordnet jedem Punkt $P = (x, y)$ den Koordinatenvektor $\xi = \{x, y\}$ und jeder Geraden $g = [u, v, w]$ eine bestimmte Linearform

$$(19) \quad L(\xi) = ux + vy + w$$

zu, so kann man jedem Tripel g, P_1, P_2 das Produkt der Linearformen-Werte $L(\xi_1) L(\xi_2)$ zuordnen. Andererseits können wir dem Tripel, falls $P_1 \neq P_2$ ist und die Gerade $(P_1 P_2)$ die Gerade g in einem Punkt P_0 schneidet, wenn also für die Koordinatenvektoren eine Beziehung

$$(20) \quad \xi_2 - \xi_0 = (\xi_1 - \xi_0) a$$

besteht, das Element a zuordnen, und diese Vorschrift noch dadurch ergänzen, daß wir $a = 1$ setzen, falls P_1, P_2 auf einer Parallelen zu g liegen. Aus (20) folgt, wegen $L(\xi_0) = 0$: $L(\xi_2) = L(\xi_1) a$, also

$$(21) \quad L(\xi_1) L(\xi_2) = L^2(\xi_1) a,$$

¹³⁾ SPERNER [1] S. 110, [2] S. 413.

und diese Gleichung gilt auch, wenn P_1, P_2 auf einer Parallelen zu g liegen. Denken wir uns nun eine Seiteneinteilung und die zugehörige Halbordnung gegeben. Nach Satz 1 und (17) liegen P_1 und P_2 auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten von g , je nachdem a bei der Halbordnung positiv oder negativ ist. Da nun, wie (21) zeigt, $L(\xi_1) L(\xi_2)$ und a bei der Halbordnung gleichzeitig positiv bzw. negativ sind, gilt: Bei einer Seiteneinteilung liegen P_1 und P_2 auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten von g , je nachdem $L(\xi_1) L(\xi_2)$ bei der zugehörigen Halbordnung positiv oder negativ ist¹³⁾. Diese Bedingung ist von der Normierung der Linearform unabhängig.

§ 2. Die Möglichkeit von Halbordnungen und Seiteneinteilungen.

Man kann nun versuchen, über die möglichen Seiteneinteilungen einer affinen Ebene oder über die möglichen Halbordnungen einer Gruppe einen Überblick zu gewinnen. Unter den Seiteneinteilungen einer affinen Ebene gibt es stets die *triviale Seiteneinteilung*, bei der für jedes Punkttupel P_0, P_1, P_2 gilt, daß P_1 und P_2 auf derselben Seite von P_0 liegen, bei der also niemals ein Punkt zwischen zwei anderen liegt. Ihr entspricht die *triviale Halbordnung*, bei der alle Gruppenelemente positiv sind. Es entsteht aber die Frage, welche affinen Ebenen eine echte Seiteneinteilung zulassen bzw. welche Gruppen nichttrivial halbordenbar sind.

Es sei \mathcal{G} eine beliebige Gruppe. In \mathcal{G} bilden die Elemente, die als Produkte von (endlich vielen) Quadraten darstellbar sind, wegen der Identität

$$(22) \quad c \left(\prod a_i^2 \right) c^{-1} = \prod (c a_i c^{-1})^2$$

eine invariante Untergruppe Ω ¹⁴⁾; ist \mathcal{G} abelsch, so ist Ω die Untergruppe der Quadrate. Bei jeder Halbordnung von \mathcal{G} sind die Elemente von Ω positiv, und zwei Elemente von \mathcal{G} , die mod Ω gleich sind, gleichzeitig positiv bzw. negativ. Wir werden daher, um die Halbordnungen von \mathcal{G} zu untersuchen, zu der Faktorgruppe

$$(23) \quad \mathfrak{H} = \mathcal{G} / \Omega$$

übergehen. \mathfrak{H} ist eine Gruppe von involutorischen Elementen, also abelsch. Jede Halbordnung von \mathcal{G} bestimmt eindeutig eine Halbordnung von \mathfrak{H} und umgekehrt.

Ein Überblick über die möglichen Halbordnungen von \mathcal{G} ergibt sich nun mit Hilfe der Tatsache, daß \mathfrak{H} als Gruppe von involutorischen Elementen auch für unendliche Ordnung eine Basis besitzt.

Ist \mathfrak{H} eine Gruppe von involutorischen Elementen, so nennen wir eine Menge \mathfrak{B} von Elementen aus \mathfrak{H} , die vom Einselement E verschieden sind, eine *Basis*, wenn 1. jedes Element $A \neq E$ aus \mathfrak{H} als Produkt von endlich vielen verschiedenen Elementen aus \mathfrak{B} darstellbar ist, und 2. kein Produkt von

¹³⁾ Vgl. SPERNER [1] S. 125f., [2] S. 417f., [3] S. 143.

¹⁴⁾ Ω enthält alle Produkte, in denen jeder Faktor als c oder c^{-1} insgesamt eine gerade Anzahl von Malen auftritt. Von dieser Art sind die Kommutatoren $(a, b) = a b a^{-1} b^{-1}$; sie sind in der Form $(a, b) = a^2 (a^{-1} b)^2 b^{-2}$ als Produkte von Quadraten darstellbar. Ein beliebiges Produkt der genannten Art kann schrittweise in ein Produkt von Quadraten umgeformt werden: Greift man aus dem gegebenen Produkt das Stück crc' heraus, welches mit dem ersten nicht quadratisch auftretenden Faktor c beginnt und mit dem nächsten nicht quadratischen Auftreten von c oder c^{-1} endet (c' bezeichne c oder c^{-1}), so kann durch die Umformung $crc' = (c, r) rcc'$ die Anzahl der nicht quadratisch auftretenden Faktoren um 2 vermindert werden.

endlich vielen verschiedenen Elementen aus \mathfrak{B} gleich E , also die nach 1. mögliche Darstellung eines Elementes $A \neq E$ als Produkt von verschiedenen Elementen aus \mathfrak{B} eindeutig ist. Es gilt nun¹⁵⁾:

Jede Gruppe \mathfrak{H} von involutorischen Elementen, die nicht nur aus dem Einselement besteht, besitzt eine Basis.

Zum Beweis denken wir uns für die Elemente $A \neq E$ von \mathfrak{H} eine Wohlordnung $<$ eingeführt. Für jedes dieser Elemente definieren wir eine Menge \mathfrak{B}_A von Gruppenelementen $\neq E$ durch folgende rekursive Vorschrift: Je nachdem A als Produkt von endlich vielen verschiedenen Elementen aus der Vereinigung aller Mengen \mathfrak{B}_B mit $B < A$ darstellbar ist oder nicht, sei \mathfrak{B}_A gleich der Vereinigung aller Mengen \mathfrak{B}_B mit $B < A$ oder gleich der Vereinigung der Mengen \mathfrak{B}_B mit $B < A$ und der Menge $\{A\}$. Definieren wir dann \mathfrak{B} als die Vereinigung aller Mengen \mathfrak{B}_A , so ist \mathfrak{B} eine Basis von \mathfrak{H} .

Die Halbordnungen von \mathfrak{G} und \mathfrak{H} werden durch die Charaktere von \mathfrak{H} bestimmt¹⁶⁾. Die Werte eines Charakters von \mathfrak{H} sind festgelegt, wenn die Werte für die Elemente einer Basis \mathfrak{B} gegeben sind. Und jede Zuordnung von Werten 1, -1 zu den Elementen von \mathfrak{B} definiert einen Charakter von \mathfrak{H} und damit auch eine Halbordnung von \mathfrak{G} . Ist U ein beliebiges Element von \mathfrak{B} , so gibt es insbesondere einen Charakter, der für U den Wert -1 und für alle anderen Elemente von \mathfrak{B} den Wert 1 hat. Und ist $A \neq E$ ein beliebiges Element von \mathfrak{H} , so ordnet jeder Charakter, der für genau eines der A darstellenden Basiselemente den Wert -1 und für alle anderen Elemente von \mathfrak{B} den Wert 1 hat, dem Element A den Wert -1 zu. Daher gibt es, wenn a ein Element aus \mathfrak{G} ist, welches nicht in \mathfrak{Q} liegt, eine Halbordnung von \mathfrak{G} , bei der a negativ ist. Wir erhalten also den

Satz 3. In einer Gruppe sind die Produkte von Quadraten und nur sie bei jeder Halbordnung positiv. Eine Gruppe ist also dann und nur dann (nicht-trivial) halbordenbar, wenn in ihr nicht jedes Element Produkt von Quadraten ist.

Für abelsche Gruppen kann in diesem Satz „Produkt von Quadraten“ durch „Quadrat“ ersetzt werden.

Die Mächtigkeit einer Basis ist eindeutig bestimmt, da für jede Basis \mathfrak{B} die Mächtigkeit der endlichen Teilmengen gleich der Ordnung von \mathfrak{H} sein muß.

Ist \mathfrak{H} von endlicher Ordnung, etwa 2^n , so ist auch die Anzahl der Halbordnungen von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{G} gleich 2^n . Ist insbesondere $n = 1$, enthält also \mathfrak{H} nur ein Element $\neq E$, so besitzt \mathfrak{G} genau eine nichttriviale Halbordnung; dies ist z. B. der Fall, wenn \mathfrak{G} die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen oder die eines endlichen Körpers von einer Charakteristik $\neq 2$ ist.

Ist \mathfrak{H} von einer transfiniten Ordnung ν , so ist auch die Mächtigkeit der Basis gleich ν , aber die Mächtigkeit der Halbordnungen von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{G} gleich 2^ν . Ist z. B. \mathfrak{G} die multiplikative Gruppe der rationalen Zahlen, so ist die Menge der Quadratklassen (Elemente von \mathfrak{H}) abzählbar unendlich und die Menge der Halbordnungen von der Mächtigkeit des Kontinuums¹⁷⁾.

¹⁵⁾ Eine Gruppe von involutorischen Elementen kann als ein Modul mit dem Primkörper der Charakteristik 2 als Operatorbereich aufgefaßt werden. Die Behauptung ist ein Spezialfall des Satzes über die Existenz einer Basis bei Moduln, die einen Körper als Operatorbereich besitzen; vgl. H. ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig-Berlin 1937, S. 64 ff.

¹⁶⁾ Da \mathfrak{H} eine Gruppe von involutorischen Elementen ist, ist ein Charakter von \mathfrak{H} notwendig ein quadratischer Charakter.

¹⁷⁾ Die Halbordnungen des rationalen Zahlkörpers sind bereits von SPERNER [1] S. 127, [2] S. 423 f. angegeben worden.

Da die quadratischen Charaktere einer Gruppe \mathcal{G} bei der Verknüpfungsvorschrift der Charaktere

$$(24) \quad \chi_3(a) = \chi_1(a) \chi_2(a) \quad \text{für jedes } a \text{ aus } \mathcal{G}$$

eine Gruppe bilden, lassen sich entsprechend die Halbordnungen von \mathcal{G} zu einer Gruppe verknüpfen. Das Produkt zweier Halbordnungen O_1 und O_2 ist diejenige Halbordnung O_3 , bei der ein Element a dann und nur dann positiv ist, wenn a entweder bei O_1 und O_2 positiv oder bei O_1 und O_2 negativ ist¹⁸⁾. In der Gruppe der Halbordnungen von \mathcal{G} ist die triviale Halbordnung von \mathcal{G} das Einselement und jedes Gruppenelement involutorisch.

Das eindeutige Entsprechen zwischen den Halbordnungen von \mathcal{G} und den Halbordnungen von \mathfrak{H} ist ein Isomorphismus der beiden Gruppen von Halbordnungen. Ist \mathfrak{H} von endlicher Ordnung, so ist überdies die Gruppe der Halbordnungen von \mathcal{G} zu \mathfrak{H} selbst isomorph, da dann diese beiden Gruppen Gruppen von involutorischen Elementen mit gleicher Ordnung sind. Ist \mathfrak{H} von transfiniter Ordnung, so ist die Gruppe der Halbordnungen von \mathcal{G} von höherer Mächtigkeit als \mathfrak{H} .

Diese Tatsachen über Halbordnungen von Gruppen geben, auf die multiplikative Gruppe der Streckenverhältnisse einer affinen Ebene angewendet (das Streckenverhältnis 0 wird ausgeschlossen), wegen Satz 1 eine Einsicht in die möglichen Seiteneinteilungen. Wir beschränken uns jetzt der Einfachheit halber auf die Betrachtung von affinen Ebenen, in denen der Satz von PASCAL gilt; für diese ergibt sich:

Für ein Punkttupel P_0, P_1, P_2 gilt dann und nur dann, daß P_1 und P_2 bei jeder Seiteneinteilung auf der gleichen Seite von P_0 liegen, wenn das Streckenverhältnis $P_0 P_2 / P_0 P_1$ ein Quadrat ist. Hat eine affine Ebene die Eigenschaft, daß jedes Streckenverhältnis ein Quadrat ist, so besitzt sie keine echte Seiteneinteilung.

Gilt bei einer Seiteneinteilung für ein bestimmtes Punkttupel P_0, P_1, P_2 , daß P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt, so gilt das gleiche für alle Punkttupel P'_0, P'_1, P'_2 , deren Streckenverhältnis $P'_0 P'_2 / P'_0 P'_1$ zur gleichen Quadratklasse wie das Streckenverhältnis $P_0 P_2 / P_0 P_1$ gehört. Gibt es in einer affinen Ebene eine Quadratklasse A von Streckenverhältnissen, welche nicht die Einheitsklasse E der Quadrate ist, so gibt es wenigstens eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse, bei der die Elemente der Klasse A negativ sind; es gibt dann also wenigstens eine Seiteneinteilung der affinen Ebene, bei der für alle Punkttupel P_0, P_1, P_2 , deren Streckenverhältnis $P_0 P_2 / P_0 P_1$ der Quadratklasse A angehört, gilt, daß P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt. Die Gesamtheit der Halbordnungen, bei denen die Elemente der Klasse A negativ sind, ist in der Gruppe der Halbordnungen der Streckenverhältnisse die Nebenklasse einer Untergruppe vom Index 2; die Untergruppe wird von den Halbordnungen gebildet, bei denen die Elemente der Klasse A positiv sind.

Die Bedingung, daß $P_0 P_2 / P_0 P_1$ ein Quadrat ist, läßt sich auch so aussprechen: Es gibt auf der Geraden $(P_0 P_1)$ einen Punkt Q und auf einer anderen Geraden durch P_0 Punkte R_1, R_2 , so daß $P_1 R_1 \parallel Q R_2$ und $R_1 Q \parallel R_2 P_2$ ist (Fig. 1). Wir sagen hierfür: P_1 und P_2 sind durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar. In einem solchen Parallelenzug kann einer der beiden Punkte R_1, R_2 außerhalb der Geraden $(P_0 P_1)$ beliebig vorgeschrieben

¹⁸⁾ SPERNER [2] S. 436f.

werden. Die Relation „ P_1 und P_2 sind durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar“ ist reflexiv, symmetrisch und, wie man mit Hilfe des PASCALSchen Satzes erkennt, auch transitiv. Daß zwei Streckenverhältnisse a und a' zur gleichen Quadratklasse gehören, ist mit folgender Bedingung äquivalent: Wählt man auf einer Geraden Punkte P_0, P_1, P_2, P'_2 so, daß $P_0 P_2 / P_0 P_1 = a$, $P_0 P'_2 / P_0 P_1 = a'$ ist, so sind P_2 und P'_2 durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar.

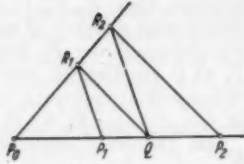


Fig. 1.

§ 3. Seiteneinteilungen in einer euklidischen Ebene.

Wir betrachten nun eine *euklidische Ebene* und verstehen darunter eine affine Ebene, in der die Diagonalen eines Parallelogramms nicht parallel sind (FANO-Axiom) und in der eine *Orthogonalitätsrelation* für die Geraden gegeben ist, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Zu jeder Geraden gibt es wenigstens eine orthogonale;
2. Ist $g \perp h$, so ist $h \perp g$;
3. Ist $g \perp h$, so ist $g \perp h'$ dann und nur dann, wenn $h \parallel h'$ ist;
4. Ist $g \perp h$, so ist $g \neq h$;
5. Die Höhen eines Dreiecks gehen durch einen Punkt.

In einer so erklärten euklidischen Ebene gilt der Satz von PASCAL¹⁹⁾, und es sei erwähnt, daß in den Forderungen an die Orthogonalität der Höhenschnittpunktsatz durch verschiedene andere „Schnittpunktsätze in Orthogonalität“ ersetzt werden kann²⁰⁾.

Wir wollen nun zeigen, daß eine euklidische Ebene stets wenigstens eine echte, durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung besitzt. Hierzu betrachten wir die rechtwinkligen Dreiecke. Ist $P_1 P_2$ die Hypotenuse, P_0 der Höhenfußpunkt, so bezeichnen wir $P_0 P_2 / P_0 P_1$ als Streckenverhältnis der Hypotenusenabschnitte und zeigen zunächst:

Die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte aller rechtwinkligen Dreiecke einer euklidischen Ebene gehören zur gleichen Quadratklasse.

Wir betrachten zunächst zwei rechtwinklige Dreiecke $P_1 S P_2, P'_1 S' P'_2$ mit gleicher Höhe g (Höhen werden als Geraden aufgefaßt) und gemeinsamem Höhenfußpunkt P_0 , deren Hypotenusen $P_1 P_2, P'_1 P'_2$ also auch derselben Geraden l angehören (Fig. 2). Es werde dann S^* auf g und P_2^* auf l so gewählt, daß $P_1 S^* \parallel P'_1 S', S^* P_2^* \parallel S' P'_2$ ist. Dann gilt $P_0 P_1' / P_0 P_1 = P_0 P_2^* / P_0 P_2$, und hieraus folgt auf Grund des PASCALSchen Satzes $P_0 P_2 / P_0 P_1 = P_0 P_2^* / P_0 P_1$. Nun

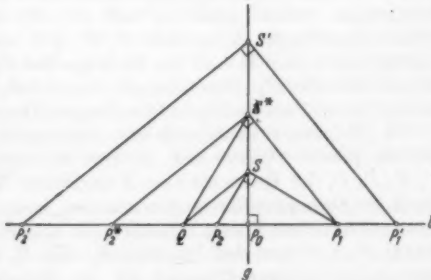


Fig. 2.

¹⁹⁾ F. SCHÜR: Grundlagen der Geometrie. Leipzig-Berlin 1909, Nr. 44.

²⁰⁾ Vgl. BAER a. a. O., S. 107 ff.

gehören aber $P_0 P_2^*/P_0 P_1$ und $P_0 P_2/P_0 P_1$ zur gleichen Quadratklasse. Wählt man nämlich Q auf l so, daß $P_2 S \parallel QS^*$ ist, so ist $P_2 SQS^* P_2^*$ ein Parallelenzug, der P_2 und P_2^* verbindet. Denn ist zunächst $Q \neq P_1$, so ist $P_1 S^* Q$ ein Dreieck, von dem zwei Höhen durch S gehen; und nach dem Höhenschnittpunktsatz ist daher auch $SQ \perp S^* P_1$, also $SQ \parallel S^* P_2^*$. Und ist $Q = P_1$, also $P_2 S \parallel P_1 S^*$, so ist bereits $P_2 S P_1 S^* P_2^*$ ein Parallelenzug.

Da zwei rechtwinklige Dreiecke mit parallelen Höhen stets durch eine Parallelverschiebung in die bisher vorausgesetzte spezielle Lage gebracht werden können, gilt die Behauptung für alle rechtwinkligen Dreiecke mit parallelen Höhen, und es genügt nun zu zeigen: Sind g, g' nicht parallele Geraden, so gibt es wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g und wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g' , für die die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte gleich sind. Ist $g \perp g'$, P_0 der Schnittpunkt von g, g' und $P_1 S P_2$ ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g und dem Höhenfußpunkt P_0 , so wähle man $P_1' = S, S' = P_2, P_2' = T$, wobei T der Schnittpunkt von g mit der durch P_2 parallel zu $P_1 S$ gezogenen Geraden ist. Sind g, g' weder parallel noch senkrecht und P_0 ihr Schnittpunkt, so betrachte man ein rechtwinkliges Dreieck $P_1 S P_2$ mit der Höhe g , für welches P_0 der Höhenschnittpunkt und $P_1 S \parallel g'$ ist, und wähle $P_1' = S, S' = P_0, P_2' = P_2$.

Die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte aller rechtwinkligen Dreiecke gehören also einer festen Quadratklasse A an, und es gilt auch umgekehrt: Gehört das Streckenverhältnis $P_0 P_2/P_0 P_1$ eines Punktripels zur Quadratklasse A , so gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ und dem Höhenfußpunkt P_0 . Man errichte hierzu in P_0 das Lot g auf der Geraden l , auf der P_0, P_1, P_2 liegen, und betrachte zunächst irgendein rechtwinkliges Dreieck $P_1 S^* P_2^*$ mit S^* auf g und P_2^* auf l . Das Streckenverhältnis $P_0 P_2^*/P_0 P_1$ gehört dann zur Klasse A , und daher gibt es einen Parallelenzug $P_2^* S^* Q S P_2$ mit Q auf l und S auf g , welcher P_2^* und P_2 verbindet. Man schließt nun umgekehrt wie oben, daß $P_1 S \perp S P_2$ ist, und daher ist $P_1 S P_2$ ein rechtwinkliges Dreieck der gesuchten Art.

Ferner ist die Quadratklasse A von der Einheitsklasse E der Quadrate verschieden. Denn in einem rechtwinkligen Dreieck $P_1 S P_2$ mit dem Höhenfußpunkt P_0 sind P_1 und P_2 nicht durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar. Sonst gäbe es auf $(P_1 P_2)$ einen Punkt Q und auf der Höhe einen Punkt R , so daß $P_1 S \parallel QR$ und $SQ \parallel RP_2$ wäre. Durch Q würden dann zwei Höhen des Dreiecks $S R P_2$ gehen, und daher müßte nach dem Höhenschnittpunktsatz auch $SQ \perp R P_2$ sein. Es wären also $SQ, R P_2$ sowohl parallel als senkrecht, was ausgeschlossen ist.

Es gibt daher wenigstens eine Seiteneinteilung der euklidischen Ebene, bei der jeweils P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt, wenn das Streckenverhältnis $P_0 P_2/P_0 P_1$ der Quadratklasse A angehört. Wir definieren nun: Unter einer durch die Orthogonalität ausgezeichneten, kurz ausgezeichneten Seiteneinteilung einer euklidischen Ebene verstehen wir eine Seiteneinteilung, bei der stets der Punkt P_0 zwischen den Punkten P_1 und P_2 liegt, wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist. Es gilt dann

Satz 4. Jede euklidische Ebene besitzt wenigstens eine durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung.

Eine ausgezeichnete Seiteneinteilung ist jedenfalls eine echte Seiteneinteilung. Die Halbordnungen, die zu den ausgezeichneten Seiteneinteilungen

gehören, sind diejenigen, bei denen die Elemente der Quadratklasse A negativ sind. Hat eine euklidische Ebene die Eigenschaft, daß jedes Streckenverhältnis entweder der Einheitsklasse E oder der Klasse A angehört, so gibt es nur eine solche Halbordnung, also nur eine ausgezeichnete Seiteneinteilung, und bei dieser liegt ein Punkt P_0 auch nur dann zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 , wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist; ein Beispiel ist die gewöhnliche stetige euklidische Ebene. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es mehr als eine Halbordnung, bei der die Elemente der Klasse A negativ sind (s. S. 296), und bei einer solchen Halbordnung sind dann stets die Elemente mindestens einer weiteren Quadratklasse negativ; es gibt dann mehr als eine ausgezeichnete Seiteneinteilung und bei einer solchen außer den genannten stets weitere Punkttupel, für die die Zwischenbeziehung gilt. Da es jedoch keine von A verschiedene Quadratklasse gibt, deren Elemente bei jeder Halbordnung negativ sind, bei der die Elemente von A negativ sind, gilt in jeder euklidischen Ebene: *Nur wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist, liegt P_0 bei jeder ausgezeichneten Seiteneinteilung zwischen P_1 und P_2 .*

Als einen metrischen Anordnungssatz, der bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen einer euklidischen Ebene gilt, erwähnen wir:

Bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen, und nur bei diesen, trennen sich die verschiedenen Paare orthogonaler Geraden eines Büschels.

Es seien $g_1, g_2; g'_1, g'_2$ zwei verschiedene Paare orthogonaler Geraden eines Büschels mit dem Zentrum S . Wählt man Punkte P_1, P_2 auf g_1, g_2 so, daß ihre Verbindungsgerade zu g'_2 parallel ist, so ist $P_1 S P_2$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g'_1 , und daher liegen P_1 und P_2 bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen und nur bei diesen auf verschiedenen Seiten von g'_1 . Andererseits liegen P_1 und P_2 nach der Parallelenbedingung bei jeder Seiteneinteilung auf derselben Seite von g'_2 , und daher trennen g'_1, g'_2 das Punktepaar P_1, P_2 bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen und nur bei diesen. Hieraus folgt die Behauptung.

Von besonderem Interesse sind diejenigen euklidischen Ebenen, in denen ein Quadrat, d. h. ein Rechteck mit orthogonalen Diagonalen, existiert. Gibt es ein Quadrat, so gibt es auch ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Höhenfußpunkt Mittelpunkt der Hypotenuse und also das Streckenverhältnis der Hypotenusenabschnitte gleich -1 ist. Die Quadratklasse A ist dann also die Quadratklasse der Elemente $-c^2$ ($c \neq 0$). Für die euklidischen Ebenen, in denen ein Quadrat existiert, gilt daher: *Bei den durch die Orthogonalität ausgezeichneten Seiteneinteilungen, und nur bei diesen, liegt der Mittelpunkt einer Strecke zwischen den Endpunkten.* Die ausgezeichneten Seiteneinteilungen sind dann die „harmonischen“²¹⁾.

Es sei noch kurz darauf eingegangen, wie sich die Überlegungen über die euklidischen Ebenen bei Einführung von Koordinaten darstellen. In einer euklidischen Ebene seien l und g zwei orthogonale Geraden, P_0 ihr Schnittpunkt, $S \neq P_0$ ein Punkt auf g und $g_1, g_2; g'_1, g'_2$ zwei Paare orthogonaler Geraden durch S , die l in Punkten $P_1, P_2; P'_1, P'_2$ schneiden. Dann ist $P_0 P_1/P_0 P'_1 = P_0 P'_2/P_0 P_2$; denn wird T auf g so gewählt, daß $P_1 S \parallel P'_1 T$ ist, so erkennt man wieder mit Hilfe des Höhenschnittpunktsatzes, angewandt

²¹⁾ SPERNER [1] S. 128 f., [2] S. 441 ff.

auf das Dreieck $P_1 T P_2$, daß beide Streckenverhältnisse dem Streckenverhältnis $P_0 S / P_0 T$ gleich sind (Fig. 3). Führt man daher l und g als x - und y -Achse eines Koordinatensystems ein und wählt einen Einheitspunkt auf der x -Achse, so gilt für die Abszissen der Punkte $P_1, P_2; P_1', P_2'$:

$$(25) \quad P_0 P_1 \cdot P_0 P_2 = P_0 P_1' \cdot P_0 P_2'.$$

Das Produkt der Abszissen, die zwei orthogonale (nicht achsenparallele) Geraden durch S auf der x -Achse ausschneiden, ist also eine Konstante; wir bezeichnen sie mit $-k$. Daher ist auch das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier

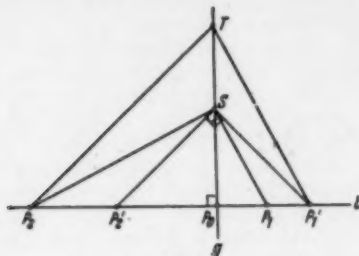


Fig. 3.

orthogonaler Geraden durch S eine Konstante; sie ist gleich $-\frac{1}{k}$, wenn wir S als Einheitspunkt der y -Achse wählen. Es gilt dann allgemein, daß zwei Geraden $[u_1, v_1, w_1], [u_2, v_2, w_2]$ dann und nur dann orthogonal sind, wenn

$$(26) \quad k u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$$

ist. k bezeichnen wir als *Orthogonalitätskonstante*²³⁾; es ist $-k$ nicht Quadrat, da keine Gerade zu sich selbst orthogonal ist. Existiert in der euklidischen Ebene ein Quadrat (vgl. den vorangehenden Absatz), so kann man, indem man drei Eckpunkte eines Quadrates als Null- und Einheitspunkte des Koordinatensystems wählt, erreichen, daß $k = 1$ wird.

Ist umgekehrt K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, k ein Körperelement, für welches $-k$ in K nicht ein Quadrat ist, so ist die ebene affine Koordinatengeometrie über K mit der durch (26) definierten Orthogonalität eine euklidische Ebene.

Wird jetzt wieder mit P_0, P_1, P_2 ein beliebiges Punkttupel bezeichnet, so ist P_0 dann und nur dann Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$, wenn für die Koordinatenvektoren eine Gleichung

$$(27) \quad \xi_0 = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) \frac{1}{1 + k c^2} \quad \text{mit } c \neq 0$$

besteht, die auch analog zu (20) in der Form

$$(28) \quad \xi_2 - \xi_0 = (\xi_1 - \xi_0) (-k c^2) \quad \text{mit } c \neq 0$$

geschrieben werden kann. Die Quadratklasse A der Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte der rechtwinkligen Dreiecke ist also die Quadratklasse der Elemente $-k c^2$ ($c \neq 0$). Die ausgezeichneten Seiteneinteilungen sind also dadurch gekennzeichnet, daß bei den zugehörigen Halbordnungen $-k$ negativ ist, wo k die Orthogonalitätskonstante ist.

Um zu zeigen, wie das Rechnen mit Linearformen bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen verwendet werden kann, behandeln wir nochmals den Satz, daß die Paare orthogonaler Geraden sich trennen. Es seien $g_1, g_2; g_1', g_2'$ verschiedene Paare orthogonaler Geraden eines Büschels mit dem Zentrum

²³⁾ Vgl. BAER a. a. O., S. 109, wo allerdings $-1/k$ als Orthogonalitätskonstante bezeichnet ist.

$S = (x_s, y_s)$, und es sei jetzt $P_1 = (x_1, y_1)$ ein beliebiger Punkt $\neq S$ auf g_1 , $P_2 = (x_2, y_2)$ ein beliebiger Punkt $\neq S$ auf g_2 . Die Linearformen von g'_1, g'_2 können wegen der Orthogonalität dieser Geraden in der Form

$$(29) \quad L'_1(\xi) = u'(x - x_s) + v'(y - y_s), \quad L'_2(\xi) = v'(x - x_s) - ku'(y - y_s)$$

angenommen werden. Da P_1 und P_2 auf orthogonalen Geraden durch S liegen, gilt

$$(30) \quad (x_1 - x_s)(x_2 - x_s) + k(y_1 - y_s)(y_2 - y_s) = 0.$$

Auf Grund hiervon ergibt sich

$$(31) \quad L'_2(\xi_1) L'_2(\xi_2) = -k L'_1(\xi_1) L'_1(\xi_2).$$

Von den beiden Ausdrücken $L'_1(\xi_1) L'_1(\xi_2)$ und $L'_2(\xi_1) L'_2(\xi_2)$ ist daher der eine positiv, der andere negativ genau bei den Halbordnungen, bei denen $-k$ negativ ist. g'_1, g'_2 trennen also P_1, P_2 genau bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen.

Das Interesse für die hier betrachteten euklidischen Geometrien rührt, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, aus Untersuchungen über die Begründung der ebenen metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff her. Man gelangt zu den gleichen Geometrien, wenn man zu dem Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie, welches bei der Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff vorausgesetzt wird, das Euklidische Parallelenaxiom (Zu jeder Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Nichtschneidende) hinzunimmt²³⁾. Aus unseren Überlegungen folgt daher, daß jede euklidische Spiegelungsgeometrie wenigstens eine durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung besitzt. Existiert in der Geometrie ein Quadrat, so haben die ausgezeichneten Seiteneinteilungen die Eigenschaft, daß in bezug auf jede Gerade ein Punkt und sein Spiegelpunkt auf verschiedenen Seiten liegen; die Spiegelung an einer Geraden vertauscht dann also die Seiten der Geraden.

²³⁾ Vgl. F. BACHMANN: Geometrien mit euklidischer Metrik. Math. Z. 51, 752 (1949); Math. Nachr. Berlin 1, 258 (1948).

Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique.

Par

L. DERWIDUÉ à Liège.

Introduction*).

On sait que le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique consiste dans la transformation birationnelle d'une variété algébrique douée de singularités quelconques, en une variété privée de singularités. C'est un problème fondamental, non seulement pour la Géométrie algébrique, mais aussi pour l'Algèbre, la Topologie et même l'Analyse. Il est posé depuis très longtemps (NEWTON s'en est déjà occupé) et a résisté à d'innombrables recherches de la part de géomètres parmi les plus illustres. Il n'a été résolu jusqu'ici que pour les courbes, les surfaces et les variétés tridimensionnelles, et dans les deux derniers cas, par des procédés bien compliqués.

J'avais l'intention d'en commencer l'étude en 1939, mais la guerre me mit dans la nécessité de retarder mon projet de huit ans. C'est en effet en 1947 seulement que des circonstances plus favorables me donnèrent la possibilité de repenser sérieusement à des idées qui m'étaient venues fin 1938, à l'époque où j'accomplissais mon service militaire. Après m'être réadapté au sujet en reprenant les recherches de M. CHISENI par le moyen qui m'avait semblé capable de simplifier beaucoup de choses¹⁾, je pris tout de suite la résolution d'aborder le problème général et trois mois après, en janvier 1948, je remettais à mon Maître, Monsieur le Professeur LUCIEN GODEAUX, un premier mémoire, d'ailleurs fort incomplet dans les détails²⁾. La notion de variété singulière polaire i -caractéristique était introduite à peu près telle que je l'ai conservée aujourd'hui, ainsi que le procédé à suivre pour éliminer progressivement toutes les singularités, mais il me manquait un outil suffisamment maniable, capable de mener à bien cette élimination. Pendant longtemps, je crus que cet outil pouvait être une transformation crémonienne de S , et toute l'année 1948 fut consacrée à sa construction et à son étude. Cela fit l'objet d'un mémoire de 139 pages³⁾, que sans doute jamais personne ne lira jusqu'au bout, tant il est compliqué, d'autant plus qu'il est entaché d'une hypothèse contradictoire, d'ailleurs facile à corriger. Puis, en été 1949, en cherchant à résoudre cet autre problème fondamental de la Géométrie algébrique qu'est l'élimination des variétés exceptionnelles, je trouvai un nouvel outil, infiniment plus simple que le précédent, que j'appelai transformation élémentaire. Cela me permit, en quelques heures, de ramener les 139 pages du mémoire précédent à exactement cinq pages du Bulletin de l'Académie Royale de Belgique⁴⁾. Pour moi, le problème était bel et bien résolu, mais il me restait à faire admettre ma solution. Cette dernière étape fut réalisée en avril et mai 1950,

*) Les numéros tels que ¹⁾, ²⁾, ... renvoient à la bibliographie placée à la fin du mémoire.

pendant mon séjour à Laren (Hollande du Nord), auprès de Monsieur le Professeur B. L. VAN DER WAERDEN. Dès notre premier contact, M. VAN DER WAERDEN comprit que mes travaux avaient un sens et il prit dès lors la peine de passer au crible de son esprit critique bien connu les douze pages du texte que je lui apportais, littéralement ligne par ligne. En une dizaine de discussions de deux heures chacune, suivies pour chacun de nous de deux ou trois jours de réflexion, l'accord le plus complet fut réalisé. C'est grâce à ces discussions que l'exposé définitif qui va suivre a pu se former. Il contient non seulement la démonstration directe de la possibilité de réduire les singularités d'une variété algébrique à k dimensions, avec toutes les explications demandées par M. VAN DER WAERDEN, mais en plus, une nouvelle interprétation de la théorie des points infiniment voisins dont la lecture ne présuppose aucune autre connaissance que celle de la Géométrie projective hyperspatiale classique. Cette interprétation est une extension des deux premiers chapitres de l'Appendice à la Géométrie projective hyperspatiale de BERTINI et d'un court exposé se trouvant dans le *Trattato* de M. SEVERI, p. 322, ainsi qu'une adaptation de la note que M. VAN DER WAERDEN a lui-même écrite au cours de nos discussions et qu'il a présentée en juin à l'Académie Royale des Pays-Bas⁵).

Je ne saurais donc trop remercier M. VAN DER WAERDEN de l'attention qu'il m'a témoignée et de l'attitude absolument désintéressée et de la plus haute intégrité scientifique dont il a fait preuve à cette occasion.

J'ai cru utile de compléter le programme qui précède par une sorte de généralisation permettant d'étudier l'intersection de deux ou plusieurs variétés algébriques et dans deux mémoires qui paraîtront prochainement dans ce journal et dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, j'appliquerai le présent exposé à la décomposition des transformations birationnelles en produits de transformations élémentaires et à l'étude et l'élimination des variétés exceptionnelles.

§ 1. Notions préliminaires.

1. *Rappel de quelques généralités.* — Nous supposons, dans ce travail, que le lecteur connaît la Géométrie projective hyperspatiale en variables complexes, telle qu'on la trouve exposée dans BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (Messine, 1923) ou dans L. GODEAUX, *Géométrie algébrique*, t. I (Liège, 1949). On peut également se référer à l'ouvrage de M. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, 1939), à condition de supposer une fois pour toutes que le corps de base est celui des nombres complexes, bien que tous nos raisonnements puissent être étendus sans difficultés au cas d'un corps de base beaucoup plus restrictif et notamment à celui d'un corps de base commutatif parfait de caractéristique quelconque. Cela nous permettra de simplifier au maximum un exposé parfois ardu.

Nous nous occuperons de la réduction des singularités de variétés algébriques de S_r formées d'un nombre fini de variétés irréductibles ayant la même dimension k , comptées chacune une seule fois. Il y a lieu de rappeler ce qu'il faut entendre par *point ordinaire* ou *simple* et par *point singulier s -uple* ou *multiple d'ordre s* d'une telle variété. Considérons d'abord le cas d'une hypersurface \mathfrak{F} de S_r , d'équation

$$(1) \quad f(x_0, \dots, x_r) = 0.$$

Un point P est dit s -uple pour \mathfrak{F} si ses coordonnées a_0, \dots, a_r annulent f et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $s-1$ inclus, sans annuler toutes ses dérivées d'ordre s . En particulier, P est dit simple si ses coordonnées annulent f sans annuler toutes ses dérivées premières.

Le cas d'une variété \mathfrak{B} à $k < r-1$ dimensions de S_r se ramène au précédent en attachant à \mathfrak{B} tous les cônes à $r-1$ dimensions formés des S_{r-k-1} projetant les points de \mathfrak{B} d'un S_{r-k-2} générique. Un point de \mathfrak{B} sera dit s -uple pour cette variété s'il est généralement s -uple pour les cônes attachés à \mathfrak{B} .

On appelle cône tangent à l'hypersurface \mathfrak{F} d'équation (1) au point P supposé s -uple, l'hypersurface d'ordre s d'équation

$$\left[(x_0 - a_0) \frac{\partial}{\partial a_0} + \dots + (x_r - a_r) \frac{\partial}{\partial a_r} \right]^s f = 0,$$

lieu de ∞^{r-2} droites passant par P et rencontrant \mathfrak{F} en $s+1$ points au moins confondus avec P .

On appelle de même cône tangent à \mathfrak{B} au point s -uple P , le cône à k dimensions d'ordre s commun à tous les cônes tangents en P aux cônes à $r-1$ dimensions projetant \mathfrak{B} des S_{r-k-2} de S_r .

Il résulte de ces définitions que les premières polaires de \mathfrak{F} , c'est-à-dire les hypersurfaces d'équation

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0,$$

ont en général un point $(s-1)$ -uple en tout point s -uple de \mathfrak{F} , et cette propriété s'étend aux premières polaires de \mathfrak{B} , à condition de définir celles-ci comme les premières polaires des cônes projetant \mathfrak{B} des S_{r-k-2} de S_r .

2. *Notion générale de transformation birationnelle.* — Soit \mathfrak{B} une variété algébrique à k dimensions de S_r , pouvant présenter des singularités quelconques. Considérons dans S_r un système linéaire $|\mathfrak{F}|$ d'hypersurfaces de dimension ϱ et d'équation

$$\lambda_0 f_0(x_0, \dots, x_r) + \dots + \lambda_s f_s(x_0, \dots, x_r) = 0,$$

tel que la variété \mathfrak{B} n'appartienne à aucune hypersurface \mathfrak{F} . Il découpe sur \mathfrak{B} un système linéaire $|F|$ de variétés à $k-1$ dimensions, que nous supposons simple. La dimension de $|F|$ est également ϱ et doit donc être $\geq k$. Référons projectivement $|F|$ ou $|\mathfrak{F}|$ au système des hyperplans d'un espace linéaire S_ϱ , ce qui revient à écrire les équations

$$(2) \quad \frac{x'_0}{f'_0} = \dots = \frac{x'_\varrho}{f'_\varrho}.$$

Par un point de \mathfrak{B} qui n'appartient pas à la base du système $|F|$, il passe un système linéaire $\infty^{\varrho-1}$ de variétés F auquel correspond, dans S_ϱ , une gerbe d'hyperplans dont le sommet est un point P' bien déterminé. Lorsque P décrit \mathfrak{B} , P' engendre une variété \mathfrak{B}' à k dimensions de S_ϱ et un point P' de \mathfrak{B}' correspond en général à un point P bien déterminé de \mathfrak{B} . Les équations (2) peuvent donc être résolues rationnellement sur \mathfrak{B} . Soit

$$(3) \quad \frac{x_0}{f'_0} = \dots = \frac{x_r}{f'_r}$$

la solution, dans laquelle les f'_i sont des formes de même degré. Cette solution représente également la correspondance entre \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' . Pour cette raison,

on dit que \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' sont des transformées birationnelles l'une de l'autre et que l'opération qui permet de passer soit de \mathfrak{B} à \mathfrak{B}' , soit de \mathfrak{B}' à \mathfrak{B} , est une transformation birationnelle.

3. *Les transformations élémentaires.* — Nous utiliserons constamment, dans la suite, un type particulier de transformation birationnelle que nous allons décrire.

Soient V une variété algébrique irréductible à k dimensions de S_r , privée de singularités, et sur celle-ci, une variété γ , aussi privée de singularités, formée d'un nombre fini de variétés irréductibles à l dimensions, $l < k - 1$, comptées une fois. Considérons, sur V , un système linéaire irréductible et simple $|E|$, ∞^e , de variétés à $k - 1$ dimensions, passant simplement par γ , n'ayant aucun contact fixe en aucun point de celle-ci et n'ayant pas d'autre variété-base. Désignons par C la variété variable à zéro dimensions (nombre fini de points) commune à k variétés E génériques et par D une spécialisation quelconque de C . Si les variétés spécialisées D passant par un point quelconque de V n'ont en commun que ce point compté une seule fois, nous dirons que $|E|$ est un système linéaire totalement simple de base γ .

Référons projectivement $|E|$, supposé totalement simple, au système des hyperplans d'un espace linéaire S_e , de même dimension. Au système linéaire ∞^{e-1} des variétés E passant par un point générique P de V , correspond une gerbe ∞^{e-1} d'hyperplans de S_e dont le sommet est un point P' bien déterminé. P' engendre une variété irréductible V' à k dimensions qui est l'image birationnelle de V dans l'opération ainsi définie. Celle-ci sera appelée *transformation élémentaire de base γ* . On dira qu'elle est *directe* si on considère qu'elle fait passer de V à V' , qu'elle est *inverse* si on considère qu'elle fait passer de V' à V . L'ordre de V' est égal au degré N de $|E|$.

La variété V' est privée de singularités. Il résulte en effet des hypothèses faites sur $|E|$ que les variétés E passant par un point quelconque de V découpent sur l'une d'elles un système de degré $N - 1$. Cela signifie que les espaces linéaires S_{e-k} , à $e - k$ dimensions, de S_e , coupent V' en N points variables et que ceux de ces S_{e-k} qui passent par un point quelconque de V' coupent encore V' en $N - 1$ autres points variables. Cette propriété implique donc que tous les points de V' soient simples.

Il est clair qu'à tout point P de V , extérieur à γ , ou à tout S_{l+1} tangent à γ et appartenant au S_k tangent à V au point de contact, il correspond sur V' un point P' bien déterminé, et qu'à un point P' de V' , il correspond toujours un point P ou un S_{l+1} tangent à γ , l'un ou l'autre étant unique. Pour achever l'étude de la correspondance, il nous reste à déterminer le lieu des points P' qui correspondent aux S_{l+1} tangents à γ .

Soient A un point de γ , α le S_l tangent à γ en ce point et α un S_{l+1} passant par α et appartenant au S_k tangent à V en A . Par ce qui précède, à α , il correspond un point A' bien déterminé de V' . Vu le caractère projectif de la correspondance liant $|E|$ aux hyperplans de S_e , lorsque α décrit la gerbe de sommet α dans le S_k tangent à V en A , A' décrit un espace linéaire S_{k-l-1} de V' . Lorsque A décrit γ , ce S_{k-l-1} décrit à son tour, sur V' , une variété Γ' à $k - 1$ dimensions, que nous appellerons variété fondamentale associée à γ . On peut montrer comme ci-dessus que Γ' est privée de singularités.

4. *Application I.* — Considérons sur V un système linéaire $|\Delta|$ de variétés à $k - 1$ dimensions, privé de base, contenant des variétés de même ordre passant une fois, deux fois, ..., s fois par γ , formant des systèmes linéaires partiels

$|\Delta_1|, |\Delta_2|, \dots, |\Delta_s|$, et désignons par $|\Delta'|, |\Delta'_1|, \dots, |\Delta'_s|$ les systèmes qui leur correspondent sur V' . Nous allons démontrer que l'on a

$$|\Delta'| = |\Delta'_1 + \Gamma'| = |\Delta'_2 + 2 \Gamma'| = \dots = |\Delta'_s + s \Gamma'|.$$

$|\Delta|$ découpe sur γ un système linéaire $|\delta|$ de variétés à $l-1$ dimensions, auquel correspond le système linéaire $|\delta'|$ découpé sur Γ' par $|\Delta'|$; les variétés δ' sont des lieux de $\infty^{l-1} S_{k-l-1}$.

Les variétés Δ passant par une variété δ donnée forment un système linéaire $|\bar{\Delta}|$ auquel correspond, sur V' , le système linéaire $|\bar{\Delta}'|$ des variétés Δ' passant par la variété δ' homologe. Une variété $\bar{\Delta}$ générique ne rencontre pas γ en dehors de δ , de sorte que la variété Γ' est fondamentale pour $|\bar{\Delta}'|$. Les variétés $|\bar{\Delta}|$ passant par un point de γ extérieur à δ contiennent γ et forment donc le système $|\Delta_1|$. Les variétés Δ' qui leur correspondent contiennent nécessairement Γ' comme composante fixe. De plus, Γ' doit être comptée une seule fois, car une courbe c de V , passant simplement par un point P de γ , sans y toucher cette variété, présente en P la multiplicité d'intersection un avec une variété Δ_1 générique; la courbe c' qui correspond à c sur V' doit donc rencontrer Γ' en un point P' compté une seule fois dans l'intersection de c' avec la variété $\bar{\Delta}'$ homologe, ce qui ne peut arriver que si Γ' n'intervient qu'une seule fois comme composante de cette $\bar{\Delta}'$. La relation $|\Delta'| = |\Delta'_1 + \Gamma'|$ est donc démontrée. Ce raisonnement montre en plus que c' ne peut présenter de contact avec Γ' .

Le système $|\Delta'_1|$ découpe sur un S_{k-l-1} générique de Γ' , le système de ses S_{k-l-2} , et sur Γ' même, un système linéaire $|\delta'_1|$ de variétés à $k-2$ dimensions. Les variétés Δ'_1 passant par une variété δ'_1 particulière forment un système linéaire $|\bar{\Delta}'_1|$ admettant évidemment Γ' comme variété fondamentale; il leur correspond sur V un système linéaire $|\bar{\Delta}_1|$ de variétés Δ_1 ayant un contact du premier ordre en un point générique de γ . Les variétés $\bar{\Delta}'_1$ passant par un point de Γ' extérieur à δ'_1 contiennent Γ' comme composante fixe. Cela signifie que les variétés $\bar{\Delta}_1$ homologues ont un contact du premier ordre au moins en tout point de γ avec toutes les variétés Δ_1 ; les variétés $\bar{\Delta}_1$ doivent donc passer doublement au moins par γ et sont les variétés Δ_2 . Comme ci-dessus, on peut dès lors montrer que Γ' n'intervient qu'une seule fois dans les variétés $\bar{\Delta}'_1$ qui la contiennent. Il en résulte que l'on a

$$|\Delta'_1| = |\Delta'_2 + \Gamma'|, \text{ d'où } |\Delta'| = |\Delta'_2 + 2 \Gamma'|.$$

Ce raisonnement peut se répéter de proche en proche et conduit sans difficulté à la proposition annoncée.

Comme toute variété ψ , formée d'un nombre fini de variétés irréductibles à $k-1$ dimensions de V , passant s fois par γ , peut toujours être considérée comme appartenant partiellement à un système linéaire tel que $|\Delta|$, moyennant la condition que le système $|\Delta - \psi|$ ne passe pas par γ , on peut donc également dire que son image sur V' comprend la variété Γ' comptée s fois, cette variété pouvant éventuellement être défectueuse selon les circonstances.

5. Application II. — Soit Ω une variété à $l+1$ dimensions, passant t fois par γ et appartenant à V . Elle est rencontrée par une variété Δ générique, considérée au n . précédent, suivant une variété ω à l dimensions, d'un certain ordre n . Lorsque Δ tend vers une variété Δ_s générique, la variété ω tend vers une position limite qui comprend γ et une variété $\bar{\omega}$,

d'ordre \bar{n} . Si v est l'ordre de γ , on a nécessairement $n = \bar{n} + \xi v$, ξ représentant un nombre entier positif que l'on appelle multiplicité de γ dans l'intersection de Ω et de Δ_s . Cette notion se définirait d'ailleurs de la même manière si γ présentait des singularités quelconques. Nous allons démontrer que si le cône tangent à Δ_s en un point générique de γ ne contient aucune composante à $l+1$ dimensions du cône tangent en ce point à Ω , on a $\xi = st$.

La variété Ω a pour image, sur V' , une variété Ω' rencontrant en t points non nécessairement tous distincts chacun des S_{k-l-1} formant Γ' . Par l'hypothèse faite, l'intersection $(\Delta'_s \Gamma')$ de Γ' et de l'image Δ'_s de Δ_s , ne contient aucune composante à l dimensions de l'intersection $(\Omega' \Gamma')$ de Γ' et de Ω' .

Il en résulte que l'intersection de Δ et de Ω est représentée sur V' par une variété à l dimensions dont une partie tend vers l'intersection de Ω' avec la variété Γ' comptée s fois. Cette partie est donc l'image de la variété γ , t -uple pour Ω , comptée s fois, c'est-à-dire présentant la multiplicité st , conformément à la thèse.

6. Application III. — On appelle *branche de courbe* le lieu d'un point de coordonnées

$$(4) \quad x_i(u) = a_{i0} + a_{i1}u + a_{i2}u^2 + \dots, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r),$$

le paramètre u rendant convergentes les séries de puissances entières des seconds membres. Le point A de coordonnées $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r0}$ s'appelle l'origine de la branche et on suppose qu'il ne correspond qu'à la seule valeur nulle de u . La multiplicité de la branche au point A est la plus petite puissance de u que l'on peut mettre en évidence dans l'équation

$$(5) \quad \lambda_0(x_0 - a_{00}) + \dots + \lambda_r(x_r - a_{r0}) = 0$$

d'un hyperplan générique passant par A lorsqu'on y remplace $x_i - a_{i0}$ par $a_{i1}u + a_{i2}u^2 + \dots$ pour $i = 0, 1, \dots, r$. Si cette multiplicité est égale à un, la branche est dite *simple* en A .

Supposons que le point A soit t -uple pour la branche. (5) commence donc par un terme en u^t . On appelle *tangente* à la branche au point A la droite commune aux ∞^{r-2} hyperplans (5) correspondant aux paramètres λ annulant le coefficient de u^t . Il est clair qu'il existe des branches ayant pour tangente en A une droite quelconque issue de ce point.

Désignons par θ la branche d'origine A et de multiplicité t en ce point et par \mathfrak{F} une hypersurface d'ordre n de S_r , passant s fois par A . Posons, pour simplifier les équations, $a_{00} = 1, a_{10} = 0, \dots, a_{r0} = 0$. L'équation de \mathfrak{F} s'écrit donc sous la forme

$$(6) \quad x_0^{n-s} \varphi_s(x_1, \dots, x_r) + x_0^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_1, \dots, x_r) + \dots + \varphi_n(x_1, \dots, x_r) = 0,$$

et en tenant compte des (4), on obtient une expression divisible par une certaine puissance u^m de u ; m s'appelle la *multiplicité d'intersection* de θ et \mathfrak{F} absorbée au point A ; on dit aussi que m est le nombre des points d'intersection de θ et de \mathfrak{F} confondus en A . Si le cône tangent à \mathfrak{F} en A ne contient pas la tangente à θ , m vaut exactement st . Mais si le cône tangent à \mathfrak{F} en A contient la tangente à θ , u intervient dans φ_s avec une puissance supérieure à st ; comme u intervient dans $\varphi_{s+1}, \dots, \varphi_n$ avec une puissance au moins égale à $(s+1)t$, on voit que $m > st$.

Supposons que θ appartienne à la variété \mathfrak{B} à k dimensions considérée au $n \cdot 2$ et appliquons à celle-ci la transformation birationnelle d'équations (2)

ou (3). Supposons en outre que cette transformation soit élémentaire directe et que θ n'appartienne pas à sa base. Soient

$$(4') \quad x'_j = a'_{j0} + a'_{j1}u + a'_{j2}u^2 + \dots \quad (j = 0, 1, \dots, \varrho)$$

les équations de la transformée θ' de θ et A' son origine (correspondant toujours à $u = 0$). D'après M. VAN DER WAERDEN, on peut toujours supposer que les dénominateurs $f'_j(x'_0, \dots, x'_\varrho)$ des équations (3) ne s'annulent pas simultanément en A' . Les expressions $f'_j(a'_{00} + a'_{11}u + \dots; \dots; a'_{\varrho 0} + a'_{\varrho 1}u + \dots)$ ne sont donc pas simultanément nulles dans le voisinage de $u = 0$; donc, elles sont proportionnelles aux seconds membres des formules (4). Or, la transformée \mathfrak{F}' de \mathfrak{F} a pour équation

$$(6') \quad f_0'^{n-s} \varphi_s(f'_1, \dots, f'_r) + f_0'^{n-s-1} \varphi_{s+1}(f'_1, \dots, f'_r) + \dots + \varphi_n(f'_1, \dots, f'_r) = 0$$

et la multiplicité d'intersection de \mathfrak{F}' et de θ' absorbée en A' est la plus petite puissance de u intervenant dans l'expression obtenue en remplaçant dans (6') les x'_j par les seconds membres des (4'). Comme par ce qui précède, cette dernière opération revient à remplacer dans (6) les x_i par les seconds membres des (4), la multiplicité cherchée est donc encore m . (Voir B. L. VAN DER WAERDEN, *Birational invariants of algebraic manifolds*, Acta Salmanticensia, 1947, II, pp. 22-24.)

Cela étant, reprenons les notations des nn. 3, 4 et 5 et supposons que la branche θ appartienne à V . Désignons par F l'intersection de V et de \mathfrak{F} . Par définition, m s'appelle encore la multiplicité d'intersection de F et de θ absorbée en A . Inversement, si Φ désigne une variété irréductible à $k-1$ dimensions passant par A , située sur V , sa multiplicité d'intersection avec θ absorbée au point A est celle de θ avec une hypersurface passant par Φ et ne satisfaisant qu'à la seule condition d'avoir une intersection résiduelle avec V ne passant pas par A . Il en résulte que la multiplicité d'intersection, absorbée en A , de θ et d'une variété F , somme de deux variétés irréductibles F_1, F_2 à $k-1$ dimensions situées sur V , est la somme des multiplicités d'intersection, absorbées en A , de θ avec F_1 et de θ avec F_2 .

En particulier, on peut toujours supposer que A appartient à γ , que θ n'est pas tangente à γ en ce point et que Δ_s est découpée partiellement sur V par une hypersurface passant s fois par A , que nous assimilons à \mathfrak{F} . Δ_s et \mathfrak{F} rencontrent donc θ en $m \geq st$ points absorbés en A . Appliquons à V une transformation élémentaire de base γ . Sur V' , la variété fondamentale Γ' associée à γ intervient s fois dans l'image totale de Δ_s ; désignons celle-ci par $s\Gamma' + \Delta'_s$. L'image θ' de θ rencontre Γ' au point A' correspondant au S_{t+1} tangent à γ en A et passant par la tangente à θ en ce point; A' est d'ailleurs l'origine de θ' . Si le cône tangent à Δ_s en A ne contient pas la tangente à θ , A' n'appartient pas à Δ'_s ; par ce qui précède, ce point intervient donc avec la multiplicité st dans l'intersection de θ' et de $s\Gamma'$. Par contre, si le cône tangent à Δ_s en A contient la tangente à θ , A' appartient à la fois à Γ' et à Δ'_s ; par ailleurs, A' intervient encore avec la multiplicité st dans l'intersection de θ' avec $s\Gamma'$. A' intervient donc avec la multiplicité $m - st$ dans l'intersection de θ' et de Δ'_s .

7. *Produit de transformations élémentaires.* — Sur V' , nous pouvons considérer une variété pure γ' à l' dimensions (c'est-à-dire une somme d'un nombre fini de variétés irréductibles à l' dimensions, comptées une seule fois) privée de singularités, et un système linéaire totalement simple $|E'|$, de base γ

et de dimension q' . En référant projectivement ce dernier au système des hyperplans d'un espace linéaire $S_{q'}$, nous obtiendrons une image birationnelle V'' de V' , privée de singularités. Désignons par T la transformation élémentaire faisant passer de V à V' , par T' celle que nous venons de construire et faisant passer de V' à V'' . A un point générique P de V , T fait correspondre un point bien déterminé P' de V' , et à ce dernier, T' fait correspondre un point bien déterminé P'' de V'' . L'opération ainsi définie sera désignée par TT' et appelée *produit* des transformations élémentaires T, T' ; elle établit entre V et V'' une correspondance birationnelle, car à tout point de V'' , l'opération inverse de T' , que nous désignerons par T'^{-1} , fait correspondre un point bien déterminé de V' , et à ce dernier, l'opération T^{-1} , inverse de T , fait correspondre un point bien déterminé de V .

Nous pouvons à nouveau considérer, sur V'' , une variété pure γ'' , à l'' dimensions, privée de singularités, et la faire servir de base pour une troisième transformation élémentaire T'' , faisant passer de V'' à V''' , et ainsi de suite. Le produit d'un nombre fini de transformations élémentaires directes T, T', T'', \dots, T^r est une transformation birationnelle faisant passer de V à une variété V^{r+1} privée de singularités. Cette transformation présente la propriété essentielle de faire correspondre à *tout* point de V^{r+1} un point bien déterminé de V , mais l'inverse n'est pas vrai, car à un point de γ , notamment, correspondent une infinité de points de V^{r+1} .

Désignons par γ^i la variété de V^i servant de base à T^i et par Γ^{i+1} la variété fondamentale qui lui correspond sur V^{i+1} . Nous dirons qu'un point de V^{i+1} est d'ordre *zéro* ou d'ordre *un* par rapport à V^i selon qu'il n'appartient pas à Γ^{i+1} ou qu'il lui appartient.

Plus généralement, considérons une suite partielle.

$$V^i, V^{i+1}, V^{i+2}, \dots, V^{i+j-1}, V^{i+j}$$

d'images consécutives de V et soient $P^i, P^{i+1}, \dots, P^{i+j-1}$ les images sur $V^i, V^{i+1}, \dots, V^{i+j-1}$ d'un point P^{i+j} de V^{i+j} . Si, dans la suite P^{i+1}, \dots, P^{i+j} , il existe α points $P^{i+\mu}$ d'ordre un par rapport à $V^{i+\mu-1}$, nous dirons que P^{i+j} est d'ordre α par rapport à V^i . Il en résulte que, sur V^{r+1} , il peut exister des points de tous les ordres compris entre zéro et r par rapport à V .

8. *Les points infiniment voisins successifs.* — L'exposé qui va suivre est, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, une adaptation de celui rédigé par M. VAN DER WAERDEN au cours de nos discussions⁶⁾. Nous supposons d'ailleurs ce dernier exposé connu et nous nous bornerons à substituer à la transformation élémentaire simple employée par M. VAN DER WAERDEN dans ses raisonnements, une transformation élémentaire générale.

Conservons les notations qui précèdent et soient O un point de la variété γ ; θ une branche de courbe située sur V , d'origine O , non tangente à γ en O et de multiplicité r en ce point; \mathfrak{F} une variété irréductible à $k-1$ dimensions de V , passant s fois par tout point de γ . Il résulte du n. 6 que si la tangente à θ en O n'appartient pas au cône tangent à \mathfrak{F} en ce point, le point O intervient avec la multiplicité rs dans l'intersection de θ et de \mathfrak{F} . Si, au contraire, la tangente à θ en O appartient au cône tangent à \mathfrak{F} en O , ce point intervient avec une multiplicité $rs + \tau$, τ étant un entier supérieur à zéro. Dans ce cas, θ et \mathfrak{F} ont en commun un point infiniment voisin du premier ordre de O , comme cela résulte de la note de M. VAN DER WAERDEN.

Appliquons à V la transformation T et désignons par \mathfrak{F}' et θ' les images sur V' de \mathfrak{F} et θ . En vertu du $n \cdot 6$, θ' rencontre $\mathfrak{F}' + s I'$ en $rs + \tau$ points situés sur I' ; θ' ne rencontre d'ailleurs I' qu'en un seul point O' , origine de θ' , et y présente la multiplicité d'intersection rs avec $s I'$; si $\tau = 0$, θ' ne rencontre donc pas \mathfrak{F}' sur I' .

Supposons au contraire que l'on ait $\tau > 0$ et désignons par r' la multiplicité de θ' en O' , par s' la multiplicité en ce point de \mathfrak{F}' . Si la tangente à θ' en O' n'appartient pas au cône tangent à \mathfrak{F}' en ce point, θ' rencontre \mathfrak{F}' en exactement $r' s'$ points confondus en O' . Comme θ' continue à rencontrer $s I'$ en rs points confondus en O' , on a $\tau = r' s'$. θ et \mathfrak{F} ont alors en commun un point infiniment voisin du premier ordre r' -uple pour θ et s' -uple pour \mathfrak{F} , toujours en vertu de l'exposé de M. VAN DER WAERDEN. Si la tangente à θ' en O' appartient au cône tangent à \mathfrak{F}' en ce point, on a $\tau = r' s' + \tau'$ et on dit que θ et \mathfrak{F} ont en commun un point infiniment voisin du second ordre de O .

Supposons que O' appartienne à la variété γ' privée de singularités, base de la transformation T' considérée dans le n . précédent, que θ' ne soit pas tangente à γ' en O' et que \mathfrak{F}' passe exactement s_1 fois par tous les points de γ' . Appliquons cette transformation à V' et désignons par \mathfrak{F}'' et θ'' les images sur V'' de \mathfrak{F} et θ . Toujours en vertu du $n \cdot 6$, θ'' rencontre $\mathfrak{F}'' + s' I''$ en $r' s' + \tau'$ points confondus en un point O'' , situé sur I'' , origine de θ'' . Si $\tau' = 0$, O'' n'appartient pas à \mathfrak{F}'' et θ'' y rencontre $s' I''$ en $r' s'$ points confondus. Si, au contraire, $\tau' > 0$, soient r'' la multiplicité de O'' pour θ'' et s'' sa multiplicité pour \mathfrak{F}'' . Alors, θ et \mathfrak{F} présentent respectivement un point r'' -uple et s'' -uple en commun, infiniment voisin du second ordre de O . Lorsque la tangente en O'' à θ'' n'appartient pas au cône tangent à \mathfrak{F}'' en ce point, on a $\tau' = r'' s''$; si, au contraire, cette tangente appartient à ce cône, on a $\tau' = r'' s'' + \tau''$ et on dit que θ et \mathfrak{F} ont en O un point infiniment voisin du troisième ordre en commun; et ainsi de suite.

On dit que le point infiniment voisin du second ordre de O , ayant pour image O'' , succède au point infiniment voisin du premier ordre de O ayant pour image O' , et que ce dernier précède le premier. De proche en proche on obtient ainsi l'interprétation de la notion de points infiniment voisins successifs du point O par rapport aux transformations élémentaires. Il est clair qu'un point d'ordre α de la variété V^{n+1} , défini à la fin du n . précédent, est l'image d'au moins un point infiniment voisin d'ordre α d'un point de V .

On dit que le point O est un point multiple propre pour la branche θ et pour la variété \mathfrak{F} ; par opposition, les points multiples de θ et de \mathfrak{F} , infiniment voisins de O , sont dits impropres ou fictifs.

Les points infiniment voisins du premier ordre de O situés sur V sont en nombre α^{k-1} , car ils correspondent aux tangentes à V passant par O . Il en résulte que les points infiniment voisins d'ordre i du point O , situés sur V , sont en nombre $\alpha^{i(k-1)}$. Leur ensemble est appelé domaine infiniment voisin d'ordre i du point O , situé sur V .

Dans le cas où les transformations T, T', T'', \dots , sont celles définies au $n \cdot 8$, on voit donc qu'un point O' de I' est l'image de α^i points infiniment voisins du premier ordre d'un point O de γ ; que si γ' passe par O' , un point O'' de S_{k-r-1} homologue de I'' est l'image de α^{i+r} points infiniment voisins du second ordre de O ; et ainsi de suite.

9. *Les variétés infiniment voisines.* — Conservons toujours les notations des nn. précédents et supposons γ irréductible. Considérons, sur V , une variété Φ à $l + m$ dimensions, passant s fois par γ . La totalité des points infiniment voisins du premier ordre de γ , appartenant à Φ , sera appelée la *variété infiniment voisine du premier ordre de γ située sur Φ* .

Appliquons la transformation T . Sur V' , l'image de Φ est une variété Φ' à $l + m$ dimensions, rencontrant Γ' suivant une variété ψ' à $l + m - 1$ dimensions. ψ' rencontre de son côté un S_{k-l-1} générique de Γ' suivant une variété φ' à $m - 1$ dimensions, d'ordre s , dont les points correspondent projectivement aux S_{l+1} tangents à Φ au point A de γ homologue du S_{k-l-1} considéré.

Il peut arriver que la variété ψ' soit réductible et comprenne une composante ψ'_i comptée s_i fois. Les variétés φ' présentent alors une composante φ'_i comptée s_i fois. Cela signifie que le cône tangent à Φ au point générique A de γ est réductible et présente une composante s_i -uple. Si ψ'_i est s_i -uple pour Φ' , nous dirons que ψ'_i est l'image d'une variété s_i -uple à $l + m - 1$ dimensions de Φ , *infiniment voisine du premier ordre de γ* . Mais il peut arriver que ψ'_i ait une multiplicité $< s_i$ pour Φ' , et même, que ψ'_i soit simple pour Φ' (Φ' présente alors un contact d'ordre $s_i - 1$ avec Γ' en un point de ψ'_i).

Il peut également arriver que ψ' présente une variété singulière à $l + m_1$ dimensions, avec $m_1 < m - 1$, multiple d'ordre α , rencontrant un S_{k-l-1} générique de Γ' suivant une variété à m_1 dimensions, α -uple pour φ' . Nous dirons que cette variété singulière est l'image d'une *variété singulière α -uple à $l + m_1$ dimensions, infiniment voisine de γ , appartenant à la variété infiniment du premier ordre de γ située sur Φ* .

Il peut enfin arriver que ψ' présente une variété singulière ne rencontrant qu'une partie seulement des S_{r-k-1} de Γ' , par exemple $\infty^{l-\lambda}$ de ceux-ci, $\lambda > 0$. Nous dirons que cette variété est l'image d'une *variété singulière de la variété infiniment voisine du premier ordre de γ située sur Φ* .

Les deux types de variétés singulières de ψ' que nous venons de considérer peuvent également être des variétés singulières de Φ' .

Nous aurons besoin de la proposition suivante:

Si Φ' présente un point singulier s_1 -uple sur Γ' , le point qui lui correspond sur γ présente une multiplicité $s \geq s_1$, pour Φ .

En effet, la section φ' de Φ' par le S_{k-l-1} de Γ' passant par le point s_1 -uple de Φ' considéré présente en ce point une singularité d'ordre $\geq s_1$. Cela ne peut arriver que si l'ordre s de φ' est $\geq s_1$, donc, si l'ordre s du cône tangent à Φ au point homologue de γ est $\geq s_1$. Cela signifie que Φ passe au moins s_1 fois par ce point.

Nous aurons à considérer des transformations T, T', \dots, T^v se succédant de telle manière que γ^i soit une variété à l dimensions appartenant à Γ^i , pour $1 \leq i \leq v$, et qu'en outre, γ^i rencontre chaque S_{k-l-1} de Γ^i en un nombre fini de points n_i . Nous dirons dans ce cas que γ' est l'image d'une variété γ_1 à l dimensions, infiniment voisine du premier ordre de γ ; que γ'' est l'image d'une variété γ_2 à l dimensions, infiniment voisine du premier ordre de γ_1 et infiniment voisine du second ordre de γ ; et ainsi de suite. De proche en proche, on parviendra à la définition d'une variété γ_v à l dimensions, infiniment voisine d'ordre v de γ . Si une variété à $l + 1$ dimensions F^i de V^i passe simplement par γ^i , son image F^{i-1} sur V^{i-1} passe n_i fois par γ^{i-1} , car chacun des n_i points de rencontre de γ^i avec un S_{k-l-1} de Γ^i , représente un S_{l+1} tangent à F^{i-1} au point homologue de γ^{i-1} .

10. *Construction d'une transformation crémonienne.* — On appelle *transformation crémonienne* une transformation birationnelle particulière qui fait correspondre à un espace linéaire S_r à r dimensions, également un espace linéaire S'_r à r dimensions. La transformation crémonienne la plus simple, en dehors des homographies, est la transformation quadratique du plan. Nous supposons que le lecteur connaît les propriétés de celle-ci, car elle va nous servir pour étudier une transformation crémonienne que nous emploierons dans les deux numéros suivants. On peut d'ailleurs en trouver une description dans les ouvrages cités au $n. 1$.

Considérons, dans l'espace S_r , deux points O, P , la gerbe des plans α passant par la droite OP , un hyperplan Ω passant par O et un hyperplan Π passant par P . Ces hyperplans découpent sur tout plan α deux droites OQ, PQ se rencontrant au point Q . Prenons comme sommets de la figure de référence de S_r , le point $O(1, 0, 0, \dots, 0)$, le point $P(0, 1, 0, \dots, 0)$, l'un quelconque des points $Q(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et $r-2$ autres points définissant avec le point Q précédent le S_{r-2} commun à Ω et Π .

Dans un second espace S'_r , considérons les mêmes éléments, que nous désignerons par les mêmes lettres, suivies de '.

Posons ensuite les équations

$$\frac{x_0}{x'_1 x'_2} = \frac{x_1}{x'_2 x'_0} = \frac{x_2}{x'_0 x'_1}, \quad \frac{x_3}{x'_2} = \dots = \frac{x_r}{x'_r},$$

les x désignant les coordonnées des points de S_r , les x' , celles des points de S'_r . On obtient ainsi une transformation crémonienne entre S_r et S'_r faisant se correspondre projectivement les gerbes des plans α et α' et déterminant entre un plan α générique et le plan α' homologue, une transformation quadratique ordinaire de points fondamentaux O, P, Q et O', P', Q' . Nous désignerons cette transformation crémonienne par \mathfrak{T} , en entendant que \mathfrak{T} fait passer de S_r à S'_r .

Les équations de \mathfrak{T} peuvent également s'écrire

$$\frac{x_0}{x'_1 x'_2} = \frac{x_1}{x'_2 x'_0} = \frac{x_2}{x'_0 x'_1} = \frac{x_3}{x'_0 x'_1 x'_2} = \dots = \frac{x_r}{x'_0 x'_1 x'_r}$$

et dans ces formules, on peut intervertir les rôles des x et des x' de même indice. \mathfrak{T} fait correspondre au domaine du premier ordre du point O l'hyperplan Π' , mais la correspondance n'est pas projective, comme c'était le cas dans les transformations élémentaires. Cette correspondance est en effet représentée par les équations

$$(7) \quad \frac{x_1}{x'_2} = \frac{x_2}{x'_1 x'_2} = \frac{x_3}{x'_1 x'_2} = \dots = \frac{x_r}{x'_1 x'_r}$$

qui lient les gerbes de rayons de sommets O et O' . Il n'empêche que \mathfrak{T} peut servir pour obtenir les images des points infiniment voisins du point O se succédant sur une branche de courbe c d'origine O et dont la tangente en ce point est en position générique, c'est-à-dire distincte de OP et extérieure à Ω . Il correspond en effet à c une branche c' de S'_r , rencontrant Π' en un point générique O'_1 de la droite $P'Q'$ du plan α' homologue du plan α défini par la tangente à c en O . O'_1 est l'image du point infiniment voisin du premier ordre de O situé sur c et l'origine de c' . Par ailleurs, une hypersurface Δ passant fois par O a pour image une hypersurface Δ' rencontrant Π' suivant une

variété à $k - 2$ dimensions représentant dans les (7) le cône tangent à Δ en O . Si O'_1 est s' -uple pour Δ' , cela signifie encore que Δ a en commun avec c un point infiniment voisin du premier ordre de O , s' -uple pour Δ .

Les considérations qui précèdent peuvent naturellement se répéter si on fait jouer à O'_1 le rôle de O dans une transformation construite comme \mathfrak{T} et faisant passer de S'_i à S''_i , et ainsi de suite.

11. *Sur la base d'un faisceau d'hypersurfaces de S_r .* — On sait que deux hypersurfaces F_1, F_2 de même ordre d'un espace linéaire S_r et d'équations respectives

$$(8) \quad f_i(x_0, \dots, x_r) = 0, \quad (i = 1, 2),$$

définissent dans cet espace un faisceau $|F|$ d'hypersurfaces d'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

admettant comme base la variété à $r - 2$ dimensions représentée par le système (8). Supposons qu'en tout point-base de $|F|$, propre ou impropre, la multiplicité de F_1 soit supérieure à celle de F_2 . Sous cette condition, toute hypersurface F , distincte de F_1 et F_2 , passe par tout point-base de $|F|$ avec une multiplicité égale à celle de F_2 .

La proposition est évidente pour les points-base propres de $|F|$, en vertu de la propriété distributive de la dérivation.

Supposons que le point fondamental O de la transformation \mathfrak{T} construite au n . précèdent soit un point-base propre de $|F|$, s_1 -uple pour F_1 , s_2 -uple pour F_2 , avec $s_1 - s_2 = \sigma$ et que les autres éléments de cette transformation soient en position générique par rapport à F_1 et F_2 . Dans S'_r , il correspond à ces hypersurfaces des hypersurfaces F'_1, F'_2 et l'image $|F'|$ du faisceau $|F|$ est définie par $F'_1 + \sigma \Pi'$ et F'_2 .

Soit O'_1 un point-base de $|F'|$ situé sur Π' et supposons-le en position générique par rapport aux autres éléments définissant la transformation \mathfrak{T} , ce qui n'est pas restrictif d'après les hypothèses faites sur celle-ci. F'_2 présente en ce point une multiplicité inférieure à celle présentée par $F'_1 + \sigma \Pi'$. Par la propriété distributive de la dérivation, une variété F' générique présente en O'_1 une multiplicité égale à celle de F'_2 et il n'y a exception que pour $F'_1 + \sigma \Pi'$. La proposition est donc démontrée pour les points infiniment voisins du premier ordre de O , car O'_1 est l'image d'un tel point.

Pour démontrer la proposition pour les points infiniment voisins du second ordre de O , il suffira de la démontrer pour les points infiniment voisins du premier ordre de O'_1 , ce qui revient à répéter le raisonnement qui précède, et ainsi de suite. La proposition est donc complètement démontrée.

12. *Propriété des premières polaires.* — Soit, dans l'espace S_r considéré dans les deux numéros précédents, une hypersurface G pour laquelle le point O est s -uple. Supposons que P soit un point générique par rapport à G et désignons par H sa première polaire. D'après le $n \cdot 1$, H passe exactement $s - 1$ fois par O . De plus, si g et h désignent les sections de G et H par un plan α générique passant par O , h est la première polaire de P par rapport à g .

Appliquons la transformation \mathfrak{T} et désignons par G' et H' les images de G et H , par g' et h' les images de g et h dans le plan α' homologue de α . g' et h' restent les sections de α' par G' et H' et on a vu ci-dessus que les plans α et α' se correspondent dans une transformation quadratique ordinaire de points fondamentaux O, P, Q dans α et O', P', Q' dans α' . Désignons par h_1 la première polaire de P' par rapport à g' et par p' la droite $O'Q'$. On sait, par

un raisonnement dû à M. SEVERI, que la courbe h' appartient au faisceau défini par g' et par la courbe $h_1 + p^{(6)}$. Mais le lieu de h_1 est la première polaire H_1 de P' par rapport à G' . H' appartient donc également au faisceau défini par G' et par $H_1 + Q'$. D'après le $n \cdot 1$, H_1 passe en général $s_1 - 1$ fois par un singulier s_1 -uple O'_1 de G' situé dans l'hyperplan Π' , mais distinct de P' et extérieur à G' . Il en est donc de même de H' . Mieux, par le n , qui précède, H' passe par tout point infiniment voisin de O'_1 , commun à G' et à H_1 , avec la même multiplicité que H_1 , pourvu que celle-ci soit $<$ à celle de G' .

Comme le point P a été supposé en position générique par rapport à G , il est donc démontré que les premières polaires de G passent en général $s_1 - 1$ fois par tout point singulier impropre s_1 -uple de G , appartenant au domaine du premier ordre de O .

Faisons maintenant jouer à O'_1 le rôle du point O dans une transformation \mathcal{T}' analogue à \mathcal{T} , faisant passer de S'_1 à un troisième espace S''_1 . Désignons par $P'_1, Q'_1, \Pi'_1, \alpha'_1$ les éléments qui, dans S'_1 , jouent le rôle de P, Q, Π, α et par $P'', Q'', \Pi'', \alpha''$ les éléments qui, dans S''_1 , jouent le rôle de P', Q', Π', α' . Appelons G'', H'', H''_1 les images de G', H', H_1 et considérons la première polaire H_2 de P'' par rapport à G'' . D'après ce qui précède, H''_1 appartient au faisceau défini par G'' et $H_2 + Q''$. Si O'_2 est un point de Π'' distinct de P'' et extérieur à Q'' , s_2 -uple pour G'' , il est donc $(s_2 - 1)$ -uple pour H_2 et pour H''_1 ; en outre, H''_1 passe par tout point infiniment voisin de O'_2 , commun à G'' et à H_2 , avec la même multiplicité que H_2 , pourvu que celle-ci soit $<$ à celle de G'' . Comme alors H'' passe par O'_2 et par tout point infiniment voisin de O'_2 , commun à G'' et à H''_1 , avec la même multiplicité que H''_1 , H'' passe également par O'_2 et par tout point infiniment voisin de O'_2 commun à G'' et à H_2 avec la même multiplicité que H_2 . Il est donc démontré que H passe en général $s_2 - 1$ fois par tout point singulier s_2 -uple impropre de G appartenant au domaine du second ordre de O .

Ce raisonnement peut évidemment se répéter de proche en proche. Il conduit ainsi au théorème suivant, qui est d'une importance capitale pour la suite:

Les premières polaires génériques de G passent $s - 1$ fois par tout point singulier s -uple propre ou impropre de G , en entendant, que, par définition, un point singulier impropre de G appartient à un domaine infinitésimal d'ordre fini d'un point singulier propre de G .

Cet énoncé reste exact lorsque G est une variété à $k < r - 1$ dimensions de S_r , comme cela résulte directement de la définition des premières polaires d'une telle variété (voir la fin du $n \cdot 1$).

§ 2. Les définitions essentielles et le raisonnement fondamental.

13. *Les variétés singulières polaires.* - La notion de variété singulière polaire que nous allons introduire est capitale pour tous les raisonnements qui vont suivre et constitue, avec les transformations élémentaires, l'élément nouveau le plus important dans l'étude des singularités. Il est impossible de comprendre la suite de notre exposé sans avoir au préalable assimilé correctement cette notion.

Désignons par \mathfrak{F} la variété à k dimensions, douée de singularités quelconques, que nous désirons étudier et supposons-la située sur une variété irréductible \mathfrak{S} à q dimensions, privée de singularités, ce qui n'est évidemment

pas restrictif pourvu que l'on ait $q \geq k + 1$. Les premières polaires de \mathfrak{F} découpent sur \mathfrak{B} un système algébrique de variétés à $q - 1$ dimensions, que nous désignerons par $[\Phi]$, passant, comme ces premières polaires, $s - 1$ fois par tout point singulier s -uple propre ou impropre de \mathfrak{F} et ne présentant pas d'autres points-base que les points singuliers de \mathfrak{F} (en entendant évidemment par la base de $[\Phi]$ l'ensemble des points communs à toutes les variétés Φ). En dehors des composantes à $k - 1$ dimensions de sa base, le système $[\Phi]$ découpe sur \mathfrak{F} un système algébrique de variétés à $k - 1$ dimensions que nous désignerons par $[\varphi]$ et qu'on appelle parfois système des polaires pures de \mathfrak{F} . En dehors des composantes à $k - 2$ dimensions de la base de $[\varphi]$ et des composantes à $k - 1$ dimensions de la base de $[\Phi]$, le système $[\Phi]$ découpe sur une variété φ générique un système algébrique de variétés à $k - 2$ dimensions qui, lorsque φ décrit $[\varphi]$, engendre sur \mathfrak{F} un système que nous désignerons par $[\varphi^1]$. Pour rappeler que $[\varphi^1]$ est l'ensemble des variétés caractéristiques du système des polaires pures de \mathfrak{F} , nous l'appellerons le système caractéristique polaire de \mathfrak{F} , ou mieux encore, le système 1-caractéristique polaire de \mathfrak{F} . Par extension, nous donnerons à $[\varphi]$ le nom de système 0-caractéristique polaire de \mathfrak{F} . Les composantes à $k - 3$ dimensions de la base de $[\varphi^1]$, comptées chacune une fois, seront appelées variétés singulières polaires 1-caractéristiques de \mathfrak{F} et par extension, les composantes à $k - 2$ dimensions, comptées chacune une fois, de la base de $[\varphi]$, ainsi que les composantes à $k - 1$ dimensions, comptées chacune une fois, de la base de $[\Phi]$ seront appelées respectivement variétés singulières polaires 0-caractéristiques et (-1) -caractéristiques de \mathfrak{F} .

De proche en proche, on pourra ainsi définir en général le système i -caractéristique polaire $[\varphi^i]$ de \mathfrak{F} comme l'ensemble des variétés découpées par $[\Phi]$, en dehors des variétés singulières polaires de \mathfrak{F} d'indices caractéristiques $\leq i - 1$, sur les variétés du système $(i - 1)$ -caractéristique polaire $[\varphi^{i-1}]$. Les composantes à $k - i - 2$ dimensions, comptées chacune une fois, de la base de $[\varphi^i]$ seront appelées variétés singulières polaires i -caractéristiques de \mathfrak{F} . i peut atteindre la valeur maximum $k - 2$. Insistons sur le fait que les variétés φ^i ont la dimension $k - i - 1$ et sont les parties variables des intersections des φ^{i-1} et des Φ , les parties fixes et semi-fixes de ces intersections étant les variétés singulières polaires $(i - 1)$ -caractéristiques et les intersections à $k - i - 1$ dimensions des variétés φ^{i-1} avec les variétés singulières polaires de \mathfrak{F} d'indices caractéristiques $< i - 1$.

14. Les variétés singulières polaires liées. — Cette notion est tout-à-fait analogue à celle de variété singulière polaire et complète celle-ci.

Désignons par γ^i , l'indice étant situé dans le coin supérieur droit de γ , l'ensemble des points des variétés singulières polaires i -caractéristiques de \mathfrak{F} , comptées chacune une fois, ou encore, la variété singulière polaire i -caractéristique totale de \mathfrak{F} . γ^i peut présenter des singularités qui n'appartiennent à la base d'aucun système caractéristique polaire de \mathfrak{F} d'indice $> i$ et qu'il n'est donc pas possible de distinguer par la seule considération des premières polaires de \mathfrak{F} . Mais on peut les distinguer par la considération des premières polaires de γ^i . On est ainsi amené à définir, sur γ^i même, des variétés singulières polaires de divers indices caractéristiques liés à γ^i . Soit $\gamma^{i,j}$ la variété singulière polaire j -caractéristique totale de γ^i . Sur cette variété, il peut à nouveau exister des singularités qui conservent l'indice caractéristique i par rapport à \mathfrak{F} et l'indice caractéristique j par rapport à γ^i ; on les distinguera

en considérant les premières polaires de $\gamma^{i,j}$ et ainsi de suite. On obtiendra ainsi, et cela, pour la première fois dans l'histoire de la Géométrie algébrique, une classification projective complète des singularités d'une variété algébrique.

Revenons maintenant au π . qui précède. On trouvera sur \mathfrak{F} une variété singulière polaire totale d'indice caractéristique le plus élevé; désignons-la par γ_0 , en plaçant cette fois l'indice dans le coin inférieur droit de γ . Sur γ_0 , on trouvera une variété singulière polaire totale d'indice caractéristique, lié à γ_0 , le plus élevé; désignons-la par γ_1 ; et ainsi de suite: *Il existe donc sur \mathfrak{F} une suite bien définie et terminée de variétés singulières $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\sigma-1}, \gamma_\sigma$, telle que γ_l soit la variété singulière totale d'indice caractéristique le plus élevé de γ_{l-1} , γ_0 étant elle-même la variété singulière totale d'indice caractéristique le plus élevé de \mathfrak{F} . γ_σ est privée de singularités et peut avoir la dimension zéro. En général, nous désignerons par h_l la dimension de γ_l .*

15. *Les systèmes associés.* — Afin de simplifier autant que possible l'exposé, nous admettrons dans la suite que la dimension q de la variété \mathfrak{B} est égale à $k+1$. La dimension des variétés Φ deviendra donc k , comme celle de \mathfrak{F} .

Sur une variété Φ générique, le système $[\Phi]$ découpe, en dehors des variétés singulières polaires (-1) -caractéristiques de \mathfrak{F} , un système de variétés à $k-1$ dimensions qui, lorsque Φ décrit $[\Phi]$, engendre sur \mathfrak{B} un système que nous désignerons par $[\Phi^1]$ et que nous appellerons *système 1-associé* à \mathfrak{F} . Sur une variété Φ^1 , $[\Phi]$ découpe, en dehors des variétés singulières polaires (-1) et 0 -caractéristiques de \mathfrak{F} , un système algébrique de variétés à $k-2$ dimensions qui, lorsque Φ^1 décrit $[\Phi^1]$, engendre sur \mathfrak{B} un système que nous désignerons par $[\Phi^2]$ et que nous appellerons *système 2-associé* à \mathfrak{F} . De proche en proche, on peut ainsi définir sur \mathfrak{B} le système $[\Phi^i]$, i -associé à \mathfrak{F} , découpé par $[\Phi]$, en dehors des variétés singulières polaires de \mathfrak{F} , d'indices caractéristiques $\leq i-2$, sur le système $[\Phi^{i-1}]$, $(i-1)$ -associé à \mathfrak{F} . Les variétés Φ^i ont la dimension $k-i$, passent par les variétés singulières de \mathfrak{F} d'indices $\geq i-1$ et découpent sur \mathfrak{F} les variétés φ^i . Par extension, nous appellerons $[\Phi]$ le *système 0-associé* à \mathfrak{F} .

Nous pouvons de même associer à chaque variété γ_l ($l = 0, 1, \dots, \sigma$), définie au n. 14, le système $[\Phi_l]$ que ses premières polaires découpent sur \mathfrak{B} . Sur une variété Φ_l générique, $k-h_l+1$ autres variétés Φ_l génériques découpent une variété Φ_l^i , à h_l dimensions, continuant à passer par toutes les variétés singulières de γ_l ; lorsque les variétés Φ_l considérées décrivent $[\Phi_l]$, Φ_l^i décrit sur \mathfrak{B} un système que nous désignerons par $[\Phi_l^i]$ et que nous appellerons *système 0-associé* à γ_l . Sur une variété Φ_l^i générique, le système $[\Phi_l]$ découpe, en dehors des variétés singulières (-1) -caractéristiques de γ_l , des variétés Φ_l^i à h_l-1 dimensions, formant sur \mathfrak{B} , lorsque Φ_l^i décrit $[\Phi_l^i]$, un système $[\Phi_l^i]$ que nous appellerons *système 1-associé* à γ_l . De proche en proche, on définit ainsi les systèmes $[\Phi_l^1], \dots, [\Phi_l^i]$, respectivement 2-associé, \dots , i -associé à γ_l , l'un quelconque d'entr'eux étant découpé sur le précédent par $[\Phi_l]$, en dehors des variétés singulières polaires de γ_l d'indices caractéristiques respectifs $(-1), 0; (-1), 0, 1; \dots; (-1), 0, \dots, i-2$. L'indice inférieur droit de $[\Phi_l^i]$ indique qu'il s'agit d'un système associé à γ_l , tandis que l'indice supérieur droit rappelle que $[\Phi_l^i]$ découpe sur γ_l le système i -caractéristique polaire de celle-ci (en dehors des variétés singulières d'indices $\leq i-1$ de γ_l).

La dimension d'une variété Φ_i^l est $h_l - i$, h_l désignant, comme nous l'avons dit plus haut, la dimension de γ_l . Lorsque le système $[\Phi_i^l]$ a pour base la seule variété γ_{l+1} , la valeur maximum de son indice i est donc donnée par la relation

$$h_l - i = h_{l+1} + 1, \text{ d'où } i = h_l - h_{l+1} - 1.$$

Pour toute valeur de $i > h_l - h_{l+1} - 1$, $[\Phi_i^l]$ est privé de base.

Lorsque l'on transforme \mathfrak{B} au moyen d'une transformation élémentaire de base γ_σ , on obtient une variété \mathfrak{B}' , privée de singularités, en correspondance birationnelle sans exceptions avec \mathfrak{B} , sauf qu'à γ_σ correspond une variété Γ'_σ , à k dimensions, privée de singularités, lieu de S_{k-h_σ} ponctuels dont chacun correspond projectivement au domaine du premier ordre d'un point de γ_σ (voir n. 3). \mathfrak{B}' contient les images $\mathfrak{F}', \gamma'_0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{\sigma-1}$ des variétés $\mathfrak{F}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\sigma-1}$, ainsi que les images $[(\Phi_i^l)']$ des systèmes $[\Phi_i^l]$. Pour $l \leq \sigma - 2$, il est clair que γ'_{l+1} reste la variété-base de $[(\Phi_i^l)^{h_l-h_{l+1}-1}']$. Il est également clair que pour $i > h_l - h_{l+1} - 1$, $[(\Phi_i^l)']$ est encore privé de base quelle que soit la valeur de l , sinon, à un point-base de $[(\Phi_i^l)']$ correspondrait un point-base de $[\Phi_i^l]$, contrairement à l'hypothèse que ce dernier en est dépourvu. Afin de simplifier les notations, posons $h_{\sigma-1} - h_\sigma - 1 = v$. Il est évident que le système $[(\Phi_i^l)']$ reste le système i -caractéristique de $[(\Phi_i^l)']$ quel que soit i , si $l \leq \sigma - 2$ et pour $i \leq v$, si $l = \sigma - 1$. Cette propriété est encore vraie pour $l = \sigma - 1$, $i > v$, car l'intersection variable d'une $(\Phi_{\sigma-1}^l)'$ générique avec Γ'_σ ne peut appartenir à toutes les variétés $\Phi'_{\sigma-1}$, même lorsque $i > v$. Enfin, il est important d'observer que si le système $[(\Phi_{\sigma-1}^l)']$ présente une base, celle-ci a nécessairement la même dimension h_σ que γ_σ , car les $(\Phi_{\sigma-1}^l)'$ ont la dimension $h_\sigma + 1$, et par ce qui précède, les systèmes caractéristiques de $[(\Phi_{\sigma-1}^l)']$ sont tous privés de base.

Nous exprimerons les propriétés qui se rapportent à $\mathfrak{F}', \gamma'_0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{\sigma-1}$ en disant que ces variétés sont les *images isomorphes* de $\mathfrak{F}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\sigma-1}$.

16. *Le raisonnement fondamental.* — Nous allons démontrer que chaque composante de la base de $[(\Phi_{\sigma-1}^l)']$ intervient dans l'intersection d'une variété $(\Phi_{\sigma-1}^l)'$ et d'une variété $\Phi'_{\sigma-1}$ génériques avec une multiplicité moindre que la composante homologue de γ_σ dans l'intersection des variétés $\Phi'_{\sigma-1}$ et $\Phi_{\sigma-1}$ homologues.

Afin de simplifier l'exposé, nous supposerons que γ_σ est irréductible. (Si γ_σ était réductible, il nous suffirait de considérer une de ses composantes irréductibles.)

Considérons sur \mathfrak{B} , en même temps que les variétés $\Phi_{\sigma-1}$, une variété Ψ , passant par γ_σ avec la même multiplicité que les $\Phi_{\sigma-1}$, mais pour laquelle γ_σ soit singulière ordinaire. Supposons en outre que Ψ soit privée de toute autre singularité et soit l'intersection complète de \mathfrak{B} par une hypersurface de l'espace ambiant dont l'ordre est suffisamment élevé pour que les conditions précédentes puissent être réalisées et que l'on puisse passer de cette hypersurface à l'une quelconque des premières polaires de $\gamma_{\sigma-1}$, découpant les $\Phi_{\sigma-1}$, éventuellement complétée par quelques hyperplans génériques, par particularisation de ses coefficients.

Désignons par a une variété Φ_{s-1}^* générique, par A une variété Φ_{s-1} également générique, éventuellement complétée par les sections hyperplanes de \mathfrak{B} qui lui font acquérir le même ordre que Ψ , par s la multiplicité de γ_s pour a et par t la multiplicité de γ_s à la fois pour A et pour Ψ . D'après les hypothèses faites, l'ordre de l'intersection complète de a avec A est le même que l'ordre de l'intersection complète de a avec Ψ et il est possible de faire tendre la seconde intersection vers la première. On peut également supposer que le cône tangent à Ψ en un point générique de γ_s ne contient aucune composante à $h_s + 1$ dimensions du cône tangent à a en ce point. Dès lors, dans l'intersection de Ψ avec a , γ_s intervient avec la multiplicité st , comme cela résulte du n. 5. Par contre, dans l'intersection de A avec a , γ_s intervient avec la multiplicité $st + \tau$, τ étant un nombre que nous ne connaissons pas, mais qui est certainement ≥ 0 et fini.

Appliquons à \mathfrak{B} la transformation élémentaire de base γ_s considérée à la fin du n. précédent. Appelons Ψ' et A' les images de Ψ et de A , a' celle de a . a' rencontre chaque S_{k-h_s} engendrant Γ_s' en s points non nécessairement tous distincts dont le lieu est une variété q' à h_s dimensions. Ψ' et A' coupent Γ_s' suivant des variétés R' et Q' à $k - 1$ dimensions. R' ne contient aucune composante à h_s dimensions de q' , puisqu'en un point générique de γ_s , le cône tangent à Ψ ne contient aucune composante du cône tangent à a . L'intersection de Ψ' et de a' représente par ailleurs l'intersection de Ψ et de a en dehors de γ_s , puisque la correspondance entre \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' est birationnelle sans exception, sauf en ce qui concerne γ_s et Γ_s' .

Faisons maintenant tendre Ψ vers A comme il est expliqué plus haut. Ψ' tendra vers A' et R' vers Q' . Une partie de l'intersection de Ψ et de a tendra vers γ_s et interviendra à la limite avec la multiplicité τ dans l'intersection de A et de a . C'est l'image de cette partie qui tendra vers l'intersection de a' avec A' située sur Γ_s' . τ représente donc la somme des intersections d'un espace S_{k-h_s} générique de Γ_s' avec l'intersection totale de a' et de A' située sur Γ_s' , chaque composante de cette intersection étant comptée avec sa multiplicité. La multiplicité des composantes de cette intersection est donc au plus τ et n'atteint cette valeur que dans le seul cas où l'intersection considérée ne rencontre les S_{k-h_s} qu'en un seul point. En d'autres termes, par rapport à la multiplicité d'intersection de a et de A absorbée par γ_s , cette multiplicité a diminué d'au moins st unités. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer, car il est clair que les multiplicités d'intersection considérées ne changent pas lorsqu'on remplace A par une variété Φ_{s-1} générique.

17. *Remarques.* — I. Le fait, pour les variétés Φ_{s-1} , d'être les intersections complètes de \mathfrak{B} avec les premières polaires de γ_{s-1} , ne conditionne pas le raisonnement qui précède. On a en effet le théorème plus général suivant:

Soient, sur \mathfrak{B} , une variété irréductible γ à l dimensions, privée de singularités, une variété Δ à k dimensions passant s fois par γ et une variété Ω à $l + 1$ dimensions passant t fois par γ , telles que γ intervienne dans l'intersection de Ω et de Δ avec la multiplicité m . Appliquons à \mathfrak{B} une transformation élémentaire de base γ et désignons par \mathfrak{B}' , Ω' les images de \mathfrak{B} , Ω , par Γ' la variété fondamentale associée à γ et par Δ' l'image de Δ de laquelle on a déjaqué Γ' compté s fois. Si Δ' passe encore par une composante à l dimensions de l'intersection de Ω' et de Γ' , cette composante intervient dans l'intersection de Δ' et de Ω' avec une multiplicité au plus égale à $m - st$.

La démonstration de ce théorème se ramène à celle du n . précédent en observant que \mathcal{A} peut toujours être considérée comme découpée partiellement sur \mathfrak{B} par une hypersurface D de l'espace ambiant passant s fois par γ , le reste de l'intersection étant une variété à k dimensions ne passant pas par γ . Il suffit en effet d'associer à D une hypersurface \bar{D} de même ordre passant s fois par γ , n'ayant pas d'autres singularités et découpant sur \mathfrak{B} une variété à k dimensions pour laquelle γ est s -uple ordinaire, les cônes tangents en les points de γ à cette variété étant génériques. Pourvu que l'ordre de D soit suffisamment élevé, toutes ces conditions pourront être réalisées et on pourra faire tendre \bar{D} vers D par particularisation de ses coefficients. On obtiendra ainsi des circonstances initiales pratiquement les mêmes que celles du n . précédent et on pourra les exploiter de la même manière.

II. Dans le n . précédent, nous désignerons par γ'_0 la variété formant la base totale du système $[(\Phi'_0 - 1)']$, en supposant que cette variété existe, et nous rappellerons que ses composantes ont la dimension h_0 , comme nous l'avons vu à la fin du n . 15. *En général, γ'_0 présentera des singularités*, alors que γ_0 en était dépourvue. C'est là l'origine d'une difficulté qu'il ne nous sera possible de vaincre que par un raisonnement par récurrence finie. Mais avant de passer à l'exposé de celui-ci, nous allons préciser rapidement le but que nous nous proposons d'atteindre; puis, afin de familiariser le lecteur avec la méthode employée, nous appliquerons les considérations qui précèdent aux problèmes particuliers de la réduction des singularités d'une surface et d'une variété algébrique à trois dimensions.

18. *Position du problème.* — Les raisonnements qui vont suivre sont fondés sur les deux propositions suivantes:

1. *Si le système $[\Phi]$ est privé de base, la variété \mathfrak{F} est privée de singularités et réciproquement.*

Cette proposition est évidente.

2. *Si, au moyen d'un nombre fini N de transformations élémentaires directes appliquées à \mathfrak{B} et à ses images successives, on réussit à obtenir une image \mathfrak{B}^* de \mathfrak{B} , évidemment encore privée de singularités, sur laquelle l'image $[\Phi^*]$ du système $[\Phi]$ est privée de base, l'image \mathfrak{F}^* de \mathfrak{F} sera privée de singularités.*

Cette proposition se démontre très simplement par réduction à l'absurde. Supposons que \mathfrak{F}^* puisse présenter un point singulier propre P^* . Par les propriétés des transformations élémentaires directes exposées aux nn. 7, 8 et 9, P^* serait l'image d'au moins un point impropre P appartenant à un domaine d'ordre $\leq N$ d'un point propre unique P_0 de \mathfrak{B} ; de plus, P serait singulier pour \mathfrak{F} et par suite, P_0 également. Mais alors, en vertu du n . 12, P serait un point-base de $[\Phi]$; en conséquence, P^* serait un point base de $[\Phi^*]$, contrairement à l'hypothèse que $[\Phi^*]$ est privé de base.

Il résulte de cette proposition que le problème de la transformation de \mathfrak{F} en une variété \mathfrak{F}^* privée de singularités sera résolu si nous parvenons à éliminer la base du système $[\Phi]$ au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires directes. C'est ce but que nous allons poursuivre, d'abord dans les deux cas particuliers annoncés, puis, dans le cas général.

§ 3. Réduction des singularités d'une surface.

19. Le cas le plus simple du problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique est celui où $k=1$, c'est-à-dire où la variété \mathfrak{F} con-

siderée dans le § précédent est une courbe. Il est peu instructif et d'ailleurs, nous aurons l'occasion de le traiter plusieurs fois dans la suite. C'est pourquoi nous abordons directement le cas où \mathfrak{F} est une surface, que nous supposons, afin de conserver les hypothèses précédentes, située sur une variété \mathfrak{B} à trois dimensions, privée de singularités.

En général, \mathfrak{F} présentera une courbe singulière réductible, qui formera sa variété singulière (-1) -caractéristique, et des points singuliers de deux sortes: 1) des points singuliers 0-caractéristiques, formant la base du système des polaires pures de \mathfrak{F} ; 2) des points singuliers (-1) -caractéristiques pour \mathfrak{F} , singuliers (-1) -caractéristiques pour la courbe singulière totale de \mathfrak{F} . Le système des premières polaires de \mathfrak{F} découpe sur \mathfrak{B} le système $[\Phi]$, 0-associé à \mathfrak{F} ; le système $[\Phi^1]$ des courbes variables communes à deux surfaces Φ forme le système 1-associé à \mathfrak{F} et admet comme base les points 0-caractéristiques de \mathfrak{F} . Ce sont momentanément les seuls éléments que nous avons à considérer, car les points 0-caractéristiques de \mathfrak{F} forment à la fois les variétés que nous avons désignées au n. 14 par γ_0 et γ_e .

20. Désignons par A_1, \dots, A_n les points singuliers 0-caractéristiques de \mathfrak{F} et appliquons à \mathfrak{B} une transformation élémentaire directe ayant ces points-base. Soient $\mathfrak{F}', \mathfrak{B}', [\Phi'], [(\Phi^1)']$ les images de $\mathfrak{F}, \mathfrak{B}, [\Phi], [\Phi^1]$, obtenues. La variété que nous avons appelée antérieurement Γ' est maintenant formée de n plans ne se rencontrant pas deux à deux, que nous désignerons par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et α'_i représente projectivement le domaine du premier ordre de A_i situé sur \mathfrak{B} . Si le système $[(\Phi^1)']$ présente encore une base, celle-ci est formée de points A'_{ij} appartenant nécessairement aux plans α'_i et il résulte du raisonnement fondamental, qu'un point A'_{ij} intervient dans l'intersection d'une courbe $(\Phi^1)'$ et d'une surface Φ' génériques avec une multiplicité moindre que le point A_i dans l'intersection de la courbe Φ^1 et de la surface Φ homologues.

Plaçons-nous dans le cas général où il existe des points A'_{ij} et appliquons à \mathfrak{B}' une transformation élémentaire directe ayant ces points-base. Désignons par $\mathfrak{F}'', \mathfrak{B}'', [\Phi''], [(\Phi^1)'']$ les images de $\mathfrak{F}', \mathfrak{B}', [\Phi'], [(\Phi^1)']$ obtenues et par α''_{ij} les plans représentant le domaine du premier ordre des points A'_{ij} . Si le système $[(\Phi^1)'']$ présente encore une base, celle-ci est à nouveau formée de points A''_{ij} appartenant aux plans α''_{ij} . Par la remarque I du n. 17, A''_{ij} intervient dans l'intersection d'une courbe $(\Phi^1)''$ et d'une surface Φ'' génériques avec une multiplicité inférieure à celle du point A'_{ij} dans l'intersection de la courbe $(\Phi^1)'$ et de la surface Φ' homologues.

Cette opération pourra être répétée aussi longtemps que l'on obtiendra un transformé du système $[\Phi^1]$ doué de points-base. Il ne pourra toutefois être répété qu'un nombre fini de fois, car la multiplicité d'intersection des images successives d'une courbe Φ^1 et d'une surface Φ génériques, absorbée en un point-base de l'image correspondante de $[\Phi^1]$, diminue à chaque étape et était initialement finie. Au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires directes dont les bases sont formées de points isolés, nous parviendrons donc à une image \mathfrak{B}^* de \mathfrak{B} sur laquelle l'image $[(\Phi^1)^*]$ de $[\Phi^1]$ sera privée de base. Désignons par $[\Phi^*]$ et \mathfrak{F}^* les images de $[\Phi]$ et \mathfrak{F} . $[\Phi^*]$ présentera comme base la courbe singulière totale de \mathfrak{F}^* . Désignons celle-ci par γ^* .

21. Dans le cas général, γ^* présentera des points singuliers A_1, \dots, A_m^* . Ces points formeront la base du système des premières polaires de γ^* , lequel découpe sur \mathfrak{B}^* un système que nous désignerons par $[\Phi_1]$. Nous désignerons

en outre par $[(\Phi_1^0)^*]$ le système formé des courbes communes à deux surfaces Φ_1^* ; d'après le $n \cdot 15$, c'est le système 0-associé à γ^* et sa base est également formée des points A_1^*, \dots, A_m^* .

Appliquons à \mathfrak{B}^* une transformation élémentaire directe ayant pour base les points A_1^*, \dots, A_m^* et soient $\mathfrak{B}^{**}, \mathfrak{F}^{**}, [\Phi^{**}], [(\Phi^1)^{**}], [\Phi_1^{**}], [(\Phi_1^0)^{**}]$ les images obtenues de $\mathfrak{B}^*, \mathfrak{F}^*, [\Phi^*], [(\Phi^1)^*], [\Phi_1^*], [(\Phi_1^0)^*]$. Au domaine du premier ordre de chaque A_i^* , correspondent projectivement les points d'un plan α_i^{**} et si $[(\Phi_1^0)^{**}]$ présente encore des points-base A_{ij}^{**} , ceux-ci appartiennent à ces plans. Il découle à nouveau du raisonnement fondamental qu'un point A_{ij}^{**} intervient dans l'intersection d'une courbe $(\Phi_1^0)^{**}$ et d'une surface Φ_1^{**} génériques avec une multiplicité moindre que le point A_i^* dans l'intersection de la courbe $(\Phi_1^0)^*$ et de la surface Φ_1^* homologues. En outre, il est clair que $[(\Phi^1)^{**}]$ reste privé de base au même titre que $[(\Phi^1)^*]$.

On pourra appliquer à \mathfrak{B}^{**} une nouvelle transformation élémentaire dont la base est formée des points A_{ij}^{**} , et ainsi de suite. Comme ci-dessus, en un nombre fini de telles opérations, on parviendra nécessairement à une image \mathfrak{B}^{***} de \mathfrak{B}^{**} , sur laquelle l'image $[(\Phi_1^0)^{***}]$ de $[(\Phi_1^0)^{**}]$ sera privée de base. Soient $\mathfrak{F}^{***}, [\Phi^{***}], [(\Phi^1)^{***}]$ les images de $\mathfrak{F}^{**}, [\Phi^{**}], [(\Phi^1)^{**}]$. $[(\Phi^1)^{***}]$ restera privé de base et la base de $[\Phi^{***}]$ sera une courbe γ^{***} , éventuellement réductible, privée de singularités, puisque les systèmes $[\Phi_1^{**}]$ et $[(\Phi_1^0)^{**}]$ associés à cette courbe sont privés de base [Cf. n. 18, 2)].

22. Appliquons à \mathfrak{B}^{***} une transformation élémentaire ayant pour base la courbe γ^{***} . Sur l'image \mathfrak{B}^{****} de \mathfrak{B}^{***} , il correspond à γ^{***} une surface réglée Γ^{****} , privée de singularités. Soient $\mathfrak{F}^{****}, [\Phi^{****}]$ et $[(\Phi^1)^{****}]$ les images de $\mathfrak{F}^{***}, [\Phi^{***}]$ et $[(\Phi^1)^{***}]$. $[(\Phi^1)^{****}]$ reste privé de base. Mais $[\Phi^{****}]$ peut encore présenter une courbe-base que nous désignerons par γ^{****} , laquelle peut à nouveau présenter des singularités $A_1^{****}, \dots, A_m^{****}$. Par la remarque I du $n \cdot 17$, chaque composante de γ^{****} interviendra dans l'intersection de deux surfaces Φ^{****} avec une multiplicité moindre que la composante correspondante de γ^{***} dans l'intersection des deux surfaces Φ^{***} homologues.

Il faudra à nouveau considérer le système $[\Phi^{****}]$ découpé sur \mathfrak{B}^{****} par les premières polaires de γ^{****} et le système $[(\Phi_1^0)^{****}]$ formé des courbes communes à deux surfaces Φ_1^{****} . Ces deux systèmes ont pour base les points $A_1^{****}, \dots, A_m^{****}$. En procédant comme au $n \cdot 21$, en un nombre fini de transformations élémentaires directes dont la base est formée de points isolés, on parviendra à une image \mathfrak{B}^{*****} de \mathfrak{B}^{****} sur laquelle l'image γ^{*****} de γ^{****} sera privée de singularités. On trouvera sur \mathfrak{B}^{*****} les images $\mathfrak{F}^{*****}, [\Phi^{*****}]$ et $[(\Phi^1)^{*****}]$ de $\mathfrak{F}^{****}, [\Phi^{****}]$ et $[(\Phi^1)^{****}]$. $[(\Phi^1)^{*****}]$ restera privé de base, tandis que $[\Phi^{*****}]$ admettra la courbe-base γ^{*****} , privée de singularités, de telle sorte que chacune de ses composantes intervienne dans l'intersection de deux surfaces Φ^{*****} génériques avec la même multiplicité que la composante correspondante de γ^{***} dans l'intersection des surfaces Φ^{***} homologues.

La suite des opérations décrites dans ce n . pourra ainsi être répétée jusqu'à ce que l'on parvienne à une image \mathfrak{B}^{*****} de \mathfrak{B} , sur laquelle l'image $[\Phi^{*****}]$ de $[\Phi]$ sera privée de base. Cela se fera en un nombre fini de transformations élémentaires, puisqu'après chaque suite d'opérations, la multiplicité avec laquelle les courbes-base de l'image de $[\Phi]$ interviennent dans l'intersection de deux surfaces génériques de ce système, diminue et était initialement finie. En vertu du $n \cdot 18$, l'image \mathfrak{F}^{*****} de \mathfrak{F} sera privée de singularités. Il est donc démontré qu'au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires

appropriées, on peut transformer birationnellement une surface algébrique en une surface algébrique privée de singularités.

Nous observerons que ci-dessus, nous avons été amené plusieurs fois à transformer birationnellement une courbe en une courbe privée de singularités. L'opinion exprimée au début de ce § au sujet de la réduction des singularités d'une courbe algébrique était donc justifiée.

Nous observerons aussi que nous aurions pu nous placer dans un cas plus simple que celui traité ci-dessus. Il nous suffisait de faire l'hypothèse initiale que \mathfrak{F} était privée de points singuliers 0-caractéristiques. La courbe singulière totale γ eut alors joué le rôle des variétés γ_0 et γ_{s-1} dans la théorie générale, tandis que les points singuliers de γ eussent joué le rôle de γ_s . Pour traiter ce cas, il suffirait de reprendre le raisonnement qui précède à partir du $n \cdot 21$.

§ 4. Réduction des singularités d'une variété algébrique à trois dimensions.

23. L'étude de ce cas particulier est un sujet à peu près neuf, puisqu'il n'a jamais été abordé avant nous que par M. ZARISKI⁷⁾. Nous continuerons à employer les notations du § 2. \mathfrak{F} désignera donc la variété à trois dimensions dont nous voulons réduire les singularités, et \mathfrak{B} , la variété à quatre dimensions, privée de singularités, qui la contient. Il y a ici trois systèmes associés à \mathfrak{F} : le système 0-associé $[\Phi]$, découpé sur \mathfrak{B} par les premières polaires de \mathfrak{F} ; le système 1-associé $[\Phi^1]$, lieu des surfaces communes à deux variétés Φ en dehors des surfaces singulières (-1) -caractéristiques de \mathfrak{F} ; enfin, le système 2-associé $[\Phi^2]$, lieu des courbes communes à trois variétés Φ en dehors des variétés singulières (-1) et 0-caractéristiques de \mathfrak{F} . Le cas le plus compliqué est celui où les systèmes associés présentent tous trois une base. Alors, les variétés γ_0 et γ_s du $n \cdot 14$ sont à nouveau identiques et se confondent avec les points singuliers 1-caractéristiques de \mathfrak{F} . C'est celui que nous étudierons, parce qu'il comprend implicitement les cas plus simples où $[\Phi^2]$ est privé de base et où $[\Phi^2]$ et $[\Phi^1]$ sont tous deux privés de base. Dans le cas où $[\Phi^2]$ seul est privé de base, la variété γ_0 du $n \cdot 14$ est identique à la variété γ_{s-1} et se confond avec la courbe-base totale de $[\Phi^1]$, tandis que la variété γ_s est représentée par les points singuliers de cette courbe-base totale; si ces points singuliers n'existent pas, on a encore $\gamma_0 = \gamma_s$. Dans le cas où $[\Phi^2]$ et $[\Phi^1]$ sont privées de base, γ_0 est représentée par la surface singulière totale de \mathfrak{F} ; γ_1 est identique à γ_{s-1} si cette surface singulière totale est privée de points singuliers 0-caractéristiques, et alors, $\gamma_2 = \gamma_s$ représente l'ensemble des points singuliers de $\gamma_1 = \gamma_{s-1}$ qui est une courbe; au contraire, $\gamma_1 = \gamma_s$ si la surface singulière totale de \mathfrak{F} présente des points singuliers 0-caractéristiques; enfin, si la surface singulière totale de \mathfrak{F} existe et est privée de singularités, on a $\gamma_0 = \gamma_s$.

Plaçons-nous donc dans le cas le plus compliqué où $[\Phi^2]$ présente une base. Nous nous proposons d'éliminer la base de $[\Phi^2]$, puis, celle de $[\Phi^1]$, enfin, celle de $[\Phi]$. En d'autres termes, nous nous proposons de transformer \mathfrak{B} en une variété \mathfrak{B}^* sur laquelle l'image $[(\Phi^2)^*]$ de $[\Phi^2]$ soit privée de base; puis, de transformer \mathfrak{B}^* en une variété \mathfrak{B}^{**} sur laquelle l'image $[(\Phi^1)^{**}]$ de $[\Phi^1]$ soit également privée de base; enfin, de transformer \mathfrak{B}^{**} en une variété \mathfrak{B}^{***} sur laquelle l'image $[\Phi^{***}]$ de $[\Phi]$ soit privée de base. Il résulte du $n \cdot 18$ que l'image \mathfrak{F}^{***} de \mathfrak{F} sera privée de singularités.

24. Désignons par A_1, \dots, A_n les points-base de $[\Phi^2]$, ou encore, les points singuliers 1-caractéristiques de \mathfrak{F} . Appliquons à \mathfrak{B} une transformation élémentaire directe ayant ces points-base. Soient $\mathfrak{B}', \mathfrak{F}', [(\Phi^2)']$ les images de $\mathfrak{B}, \mathfrak{F}, [\Phi^2]$. Aux points infiniment voisins du premier ordre de A_1, \dots, A_n correspondent projectivement les points d'espaces à trois dimensions ne se rencontrant pas deux à deux, que nous désignerons par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Si le système $[(\Phi^2)']$ présente encore une base, celle-ci est formée de points isolés A'_i appartenant aux espaces α_i , et il résulte du raisonnement fondamental ($n \cdot 16$) qu'un point A'_i intervient dans l'intersection d'une courbe $(\Phi^2)'$ et d'une variété Φ' génériques avec une multiplicité inférieure à celle du point A_i dans l'intersection de la courbe Φ^2 et de la variété Φ homologues.

Plaçons-nous dans le cas général où il existe des points A'_i et appliquons à \mathfrak{B}' une transformation élémentaire directe ayant ces points-base; répétons cette opération aussi longtemps que nous rencontrerons une image du système $[\Phi^2]$ douée de points-base. Par un raisonnement entièrement semblable à celui du $n \cdot 20$, cette opération ne pourra être répétée qu'un nombre fini de fois. On obtiendra ainsi l'image \mathfrak{B}^* de \mathfrak{B} sur laquelle l'image $[(\Phi^2)^*]$ de $[\Phi^2]$ est privée de base. Désignons par $\mathfrak{F}^*, [\Phi^*]$ et $[(\Phi^1)^*]$ les images de $\mathfrak{F}, [\Phi]$ et $[\Phi^1]$.

25. La base totale de $[(\Phi^1)^*]$ est une courbe que nous désignerons par γ^* et qui présente en général des points singuliers A_1^*, \dots, A_m^* . Les premières polaires de γ^* découpent sur \mathfrak{B}^* un système $[\Phi_1^*]$ et les courbes communes à trois variétés Φ_1^* forment le système $[(\Phi_1^*)^*]$ 0-associé à γ^* , dont la base est formée de A_1^*, \dots, A_m^* . Appliquons à \mathfrak{B}^* une transformation élémentaire directe ayant ces points-base. Nous obtiendrons les images $\mathfrak{B}^{*\prime}, \mathfrak{F}^{*\prime}, [\Phi_1^{*\prime}]$, $[(\Phi_1^*)^{*\prime}]$ de $\mathfrak{B}^*, \mathfrak{F}^*, [\Phi_1^*]$, $[(\Phi_1^*)^*]$ et par le raisonnement fondamental, la multiplicité d'intersection d'une courbe $(\Phi_1^*)^{*\prime}$ et d'une variété $\Phi_1^{*\prime}$ génériques, absorbée en un point-base de $[(\Phi_1^*)^{*\prime}]$, sera moindre que celle absorbée par le point-base homologue de $[(\Phi_1^*)^*]$ dans l'intersection de la courbe $(\Phi_1^*)^*$ et de la variété Φ_1^* correspondantes. Si $[(\Phi_1^*)^{*\prime}]$ présente encore des points-base, on les fera servir de base à une nouvelle transformation élémentaire directe appliquée à $\mathfrak{B}^{*\prime}$, et ainsi de suite. En un nombre fini de telles opérations, on parviendra à une image $\mathfrak{B}^{*\square}$ de \mathfrak{B}^* sur laquelle l'image $[(\Phi_1^*)^{*\square}]$ de $[(\Phi_1^*)^*]$ est privée de base. La base $\gamma^{*\square}$ du système $[(\Phi_1^*)^{*\square}]$, image de $[(\Phi_1^*)^*]$, sera donc privée de singularités et on pourra appliquer à $\mathfrak{B}^{*\square}$ une transformation élémentaire directe ayant $\gamma^{*\square}$ comme courbe-base. Sur l'image $\mathfrak{B}^{*\square\prime}$ de $\mathfrak{B}^{*\square}$ obtenue, chaque composante de la base $\gamma^{*\square\prime}$ de l'image $[(\Phi_1^*)^{*\square\prime}]$ de $[(\Phi_1^*)^{*\square}]$ interviendra dans l'intersection d'une surface $(\Phi^1)^{*\square\prime}$ et d'une variété $\Phi^{*\square\prime}$ génériques avec une multiplicité moindre que la composante homologue de $\gamma^{*\square}$ dans l'intersection de la surface $(\Phi^1)^{*\square}$ et de la variété $\Phi^{*\square}$ homologues, toujours en vertu de la remarque I du $n \cdot 17$. Si $\gamma^{*\square\prime}$ existe, elle sera en général douée de points singuliers et il y aura lieu de recommencer à son sujet la même suite d'opérations que pour passer de \mathfrak{B}^* à $\mathfrak{B}^{*\square}$. Et ainsi de suite. Comme après chaque suite d'opérations, chaque composante de la base de l'image de $[(\Phi^1)^*]$ intervient dans l'intersection des images d'une surface $(\Phi^1)^*$ et d'une variété Φ^* génériques avec une multiplicité moindre que la composante homologue de γ^* dans l'intersection de $(\Phi^1)^*$ et de Φ^* , en un nombre fini de telles opérations, on parviendra à une image \mathfrak{B}^{**} de \mathfrak{B} sur laquelle l'image $[(\Phi^1)^{**}]$ de $[\Phi^1]$ sera privée de base.

26. La base totale de l'image $[\Phi^{**}]$ de $[\Phi]$ se réduit donc à une surface que nous désignerons par F^{**} . Cette surface est généralement réductible et

douée de singularités et il faudra tout d'abord procéder à la réduction de ces singularités.

Pour réduire les singularités de F^{**} , on considère le système $[\Phi_1^{**}]$ que ses premières polaires découpent sur \mathfrak{B}^{**} ; puis, le système $[(\Phi_1^0)^{**}]$, 0-associé à F^{**} , formé des surfaces communes à deux variétés Φ_1^{**} ; enfin, le système $[(\Phi_1^1)^{**}]$, 1-associé à F^{**} , formé des courbes variables communes à trois variétés Φ_1^{**} , en dehors de la courbe singulière (-1) -caractéristique totale de F^{**} . La base de $[(\Phi_1^1)^{**}]$ est formée des points singuliers 0-caractéristiques de F^{**} et on l'éliminera au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires directes appliquées à \mathfrak{B}^{**} et à ses images successives, dont les bases sont formées de ces points et des points-base des images successives de $[(\Phi_1^1)^{**}]$. Puis, on éliminera la courbe-base de l'image du système $[(\Phi_1^0)^{**}]$ au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires directes dont les bases sont formées alternativement d'un nombre fini de points ou d'un nombre fini de courbes. Ces opérations ne présentent aucune difficulté nouvelle et leur description peut être calquée sur l'exposé du § 3, sauf que la dimension de \mathfrak{B} est quatre au lieu de trois. Sur l'image \mathfrak{B}^{***} obtenue, l'image $[\Phi_1^{**}]$ du système $[\Phi_1^{**}]$ sera également privée de base; en vertu du $n \cdot 18$, l'image F^{***} de F^{**} sera privée de singularités et elle pourra servir de base à une transformation élémentaire appliquée à \mathfrak{B}^{***} .

27. Appliquons donc à \mathfrak{B}^{***} une transformation élémentaire ayant pour base F^{***} . Sur l'image \mathfrak{B}^{****} de \mathfrak{B}^{***} obtenue, il correspond à F^{***} une variété réglée Γ^{****} à trois dimensions, privée de singularités. Soient \mathfrak{F}^{****} , $[\Phi^{****}]$, $[(\Phi^1)^{****}]$, $[(\Phi^2)^{****}]$ les images de \mathfrak{F} , $[\Phi]$, $[\Phi^1]$, $[\Phi^2]$. En général, $[\Phi^{****}]$ présentera une surface-base F^{****} , douée de singularités, dont chaque composante intervient dans l'intersection de deux variétés Φ^{****} , génériques avec une multiplicité moindre que la composante homologue de F^{****} dans l'intersection des variétés Φ^{****} homologues sur \mathfrak{B}^{***} ; en outre, $[(\Phi^1)^{****}]$ et $[(\Phi^2)^{****}]$ resteront privés de base.

Il faudra à nouveau procéder à l'élimination des singularités de F^{****} comme nous l'avons fait dans le n . précédent. En un nombre fini d'opérations, on parviendra ainsi à une image \mathfrak{B}^{*****} de \mathfrak{B} sur laquelle l'image $[\Phi^{*****}]$ de $[\Phi]$ présentera comme base une surface F^{*****} , éventuellement réductible, mais privée de singularités, dont chaque composante intervient dans l'intersection de deux variétés Φ^{*****} génériques avec la même multiplicité que la composante homologue de F^{****} dans l'intersection des deux variétés Φ^{****} homologues.

On pourra donc appliquer une nouvelle fois à \mathfrak{B}^{*****} une transformation élémentaire ayant pour base F^{*****} , ce qui nous conduira à une variété \mathfrak{B}^{*****} , privée de singularités, sur laquelle chaque composante de la surface-base F^{*****} de l'image $[\Phi^{*****}]$ de $[\Phi]$ interviendra dans l'intersection de deux variétés Φ^{*****} génériques avec une multiplicité moindre que la composante homologue de F^{****} dans l'intersection des deux variétés Φ^{****} homologues. Il faudra à nouveau éliminer les singularités éventuelles de F^{*****} , et ainsi de suite. Ce processus d'opérations ne pourra se répéter qu'un nombre fini de fois; quand il prendra fin, cela signifiera que, sur l'image \mathfrak{B}^{*****} de \mathfrak{B} obtenue, l'image $[\Phi^{*****}]$ de $[\Phi]$ est privée de base. D'après le $n \cdot 18$, il en résulte donc que l'image \mathfrak{F}^{*****} de \mathfrak{F} sera privée de singularités. Il est donc démontré qu'au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires appropriées, on peut transformer birationnellement une variété algébrique à trois dimensions en une variété algébrique à trois dimensions privée de singularités.

§ 5. Cas général.

28. *Preliminaires.* — Les deux exemples que nous avons donnés dans les §§ 3 et 4 permettent déjà d'entrevoir clairement la marche à suivre pour éliminer les singularités d'une variété algébrique à quatre dimensions, puis à cinq dimensions, et ainsi de suite. Il n'est donc plus possible de douter de la validité du théorème de la réduction des singularités d'une variété algébrique dans le cas général et au fond nous pourrions nous borner à dire qu'il peut se démontrer de la même manière pour toute valeur finie donnée de la dimension de la variété. Nous désirons cependant être plus complet et achever notre exposé par une démonstration par récurrence finie. Cette démonstration est assez ardue et consiste en principe à montrer qu'au moyen de transformations élémentaires en nombre fini, on peut élever progressivement la dimension de la variété-base du dernier des systèmes associés successifs qui en est pourvu. Comme toutes les démonstrations récurrentes, elle comporte une première étape et une étape générique. Dans la première étape, nous supposons que la dimension de γ_0 est zéro et nous montrerons qu'on peut transformer \mathfrak{B} de manière que l'image du dernier système associé à γ_{0-1} cesse d'avoir une base et que l'image de l'avant dernier système associé à γ_{0-1} soit pourvu d'une courbe-base privée de singularités. C'est le cas le plus complet que l'on puisse imaginer et tout autre cas peut s'en déduire par élimination de variétés singulières des dimensions les plus petites.

Dans l'étape générique, nous supposons qu'on a réussi à transformer progressivement \mathfrak{B} de manière que la dimension de la base du dernier système, pourvu de base, associé à l'image de γ_{0-1} , soit un nombre entier quelconque compris entre zéro et la dimension h_{0-1} de γ_{0-1} , et nous montrerons que cette dimension peut être augmentée d'une unité. Cette étape s'accomplira en deux phases.

29. *Première étape.* — Supposons en premier lieu que la dimension h_0 de γ_0 soit zéro, c'est-à-dire que γ_0 soit formée d'un nombre fini de points A_1, \dots, A_n . La variété Γ'_0 se réduit à un nombre fini de S_k que nous désignerons par $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ et qui ne se rencontrent pas deux à deux. D'après le n° 15, γ'_0 est formée d'un nombre fini de points $A_{i,1}, \dots, A_{i,n_i}$ appartenant à α'_i ($i = 1, 2, \dots, n$); les variétés $(\Phi_{0-1}')'$ sont des courbes passant par les points précédents et y rencontrant les variétés Φ_{0-1}' avec une multiplicité d'intersection inférieure à celle d'une courbe Φ_{0-1}' et d'une variété Φ_{0-1}' génériques aux points A_i homologues.

En appliquant à \mathfrak{B}' une nouvelle transformation élémentaire dont la base est formée de tous les points $A_{i,j}$. On obtient ainsi une image \mathfrak{B}'' , privée de singularités, de \mathfrak{B}' , sur laquelle on trouve les images \mathfrak{F}'' , $[(\Phi_{0-1}')']$, $[\Phi_{0-1}']$ de \mathfrak{F}' , $[(\Phi_{0-1}')]$, $[\Phi_{0-1}']$. Par la remarque I du n° 17, la multiplicité d'intersection d'une courbe $(\Phi_{0-1}')''$ et d'une variété Φ_{0-1}' génériques, absorbée en un point-base $A_{i,j,g}$ de $[(\Phi_{0-1}')']$, si de tels points-base existent encore, est moindre que celle des variétés $(\Phi_{0-1}')'$ et Φ_{0-1}' homologues absorbée au point $A_{i,j}$ correspondant. Après un nombre fini de telles opérations, nous parviendrons nécessairement à une image \mathfrak{B}^* de \mathfrak{B} , toujours privée de singularités, sur laquelle l'image $[(\Phi_{0-1}')^*]$ de $[(\Phi_{0-1}')]$ sera privée de base. En effet, le contraire signifierait que sur \mathfrak{B} , un point A_i absorberait une infinité d'intersections d'une Φ_{0-1}' et d'une $(\Phi_{0-1}')'$ génériques.

Ainsi, sur \mathfrak{B}^* , la valeur minimum de i pour laquelle le transformé $[(\Phi_{\sigma-1}^i)^*]$ du système $[\Phi_{\sigma-1}^i]$ est privé de base, satisfait à la relation $i \leq h_{\sigma-1} - h_{\sigma} - 1$. Nous nous placerons dans le cas le plus compliqué en supposant que l'on a exactement $i = h_{\sigma-1} - h_{\sigma} - 1$. Le système $[(\Phi_{\sigma-1}^{h_{\sigma-1}-h_{\sigma}-2})^*] = [(\Phi_{\sigma-1}^{h_{\sigma}-1})^*]$ admettra donc comme base une courbe qui, dans le cas général, présentera des points singuliers. Désignons cette courbe par γ_{σ}^* et par $\tilde{\gamma}_{\sigma}^*, \gamma_0^*, \dots, \gamma_{\sigma-1}^*$ les images de $\tilde{\gamma}, \gamma_0, \dots, \gamma_{\sigma-1}$, qui leur sont évidemment isomorphes. Par des opérations entièrement analogues à celles que nous venons de décrire, il nous sera possible de transformer \mathfrak{B}^* en une variété \mathfrak{B}^{**} , encore privée de singularités, sur laquelle on trouvera les images isomorphes $\tilde{\gamma}_1^{**}, \gamma_0^{**}, \gamma_1^{**}, \dots, \gamma_{\sigma}^{**}$ de $\tilde{\gamma}_1^*, \gamma_0^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_{\sigma}^*$, mais de telle sorte que γ_{σ}^{**} soit privée de points singuliers. *La dimension de la dernière variété de la suite $\gamma_{\sigma}^{**}, \gamma_1^{**}, \dots, \gamma_{\sigma}^{**}$ aura donc augmenté d'une unité par rapport à la dimension de la dernière variété de la suite correspondante sur \mathfrak{B} .*

30. *Etape générique.* — Admettons que, par des transformations élémentaires directes en nombre fini dont les bases ont des dimensions $\leq h_{\sigma} - 1$, nous puissions transformer progressivement \mathfrak{B} en une variété $\tilde{\mathfrak{B}}$ sur laquelle on trouve les images isomorphes $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{\sigma-1}$ de $\tilde{\gamma}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\sigma-1}$. Admettons également que les images $[\tilde{\Phi}_{\sigma-1}^i]$ des systèmes $[\Phi_{\sigma-1}^i]$ cessent d'avoir une base pour $i > h_{\sigma-1} - h_{\sigma} - 1$, que la base $\tilde{\gamma}_{\sigma}$ de $[\tilde{\Phi}_{\sigma-1}^{h_{\sigma-1}-h_{\sigma}-1}]$ soit privée de singularités et que sa dimension \tilde{h}_{σ} soit un nombre entier quelconque compris entre zéro et $h_{\sigma-1}$. Cette hypothèse implique donc la possibilité de transformer birationnellement \mathfrak{B} de manière à éliminer la base du système des premières polaires de toute variété de dimension $\leq \tilde{h}_{\sigma}$, située sur \mathfrak{B} , et par conséquent, en vertu du $n \cdot 18$, de transformer birationnellement toute variété de dimension $\leq \tilde{h}_{\sigma}$, appartenant à \mathfrak{B} , en une variété de même dimension, privée de singularités.

Nous allons d'abord montrer, dans une première phase de notre raisonnement, qu'au moyen d'un nombre fini de nouvelles transformations élémentaires directes, dont les bases ont des dimensions $\leq \tilde{h}_{\sigma}$, on peut obtenir une nouvelle image de \mathfrak{B} , évidemment toujours privée de singularités, sur laquelle la dimension minimum des variétés-base du transformé du système $[\Phi_{\sigma-1}^i]$ est supérieure à \tilde{h}_{σ} .

Transformons $\tilde{\mathfrak{B}}$ au moyen d'une transformation élémentaire de base $\tilde{\gamma}_{\sigma}$. Nous obtenons une variété $\tilde{\mathfrak{B}}'$, privée de singularités, sur laquelle le domaine du premier ordre d'un point de $\tilde{\gamma}_{\sigma}$ est représenté projectivement par un $S_{k-\tilde{h}_{\sigma}}$ ponctuel engendrant une variété \tilde{I}_{σ}' à k dimensions, privée de singularités. Les images $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}_0', \tilde{\gamma}_1', \dots, \tilde{\gamma}_{\sigma-1}'$ de $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{\sigma-1}$, leur restent isomorphes. Désignons par $[(\tilde{\Phi}_i)']$ les transformés des systèmes $[\tilde{\Phi}_i]$. La variété $\tilde{\gamma}_{\sigma}$ devient la variété à $h_{\sigma-1} - 1$ dimensions formant l'intersection de $\tilde{\gamma}_{\sigma-1}'$ et de \tilde{I}_{σ}' , à laquelle peut encore appartenir la variété-base de dimension minimum du système $[\tilde{\Phi}_{\sigma-1}']$, cette dimension étant nécessairement supérieure ou égale à la dimension \tilde{h}_{σ} de $\tilde{\gamma}_{\sigma}$, en vertu du $n \cdot 15$. Si cette dimension est supérieure à \tilde{h}_{σ} , la proposition que nous avons en vue est démontrée. Si, au contraire, l'égalité a lieu, la variété-base de dimension minimum de $[\tilde{\Phi}_{\sigma-1}']$ appartient nécessaire-

ment à $\tilde{\Gamma}_s$. Désignons-la par $\tilde{\gamma}'_s$. Par la remarque I du $n \cdot 17$, les composantes de $\tilde{\gamma}'_s$ interviennent un nombre moindre de fois, dans l'intersection d'une $\tilde{\Phi}'_{s-1}$ et d'une $(\tilde{\Phi}_{s-1}^{\tilde{\lambda}_{s-1}-\tilde{\lambda}_s-1})'$ génériques, que ne le font les composantes homologues de $\tilde{\gamma}_s$ dans l'intersection des deux variétés homologues.

Il peut arriver, comme nous l'avons dit dans la remarque II du $n \cdot 17$, que $\tilde{\gamma}'_s$ présente à son tour des singularités polaires qui lui sont liées. Comme ces singularités ont au plus la dimension $\tilde{\lambda}_s - 1$, par l'hypothèse d'induction faite ci-dessus, elles pourront être éliminées au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires dont les bases ont des dimensions inférieures à $\tilde{\lambda}_s$. Afin de ne pas compliquer les notations sans profit, nous admettrons que cette élimination est déjà effectuée et que, par conséquent, $\tilde{\gamma}'_s$ est privée de singularités.

On appliquera à $\tilde{\mathfrak{B}}'$ une nouvelle transformation élémentaire de base $\tilde{\gamma}'_s$. Si, sur l'image $\tilde{\mathfrak{B}}''$ de $\tilde{\mathfrak{B}}'$ que l'on obtient ainsi, la dimension minimum des variétés-base de l'image $[\tilde{\Phi}'_{s-1}]$ du système $[\tilde{\Phi}'_{s-1}]$ est encore $\tilde{\lambda}_s$, les variétés-base de cette dimension appartiendront nécessairement à la variété $\tilde{\Gamma}_s$ à $\tilde{\lambda}_s$ dimensions, fondamentale associée à $\tilde{\gamma}'_s$ et il y aura lieu de répéter une nouvelle fois l'opération précédente, et ainsi de suite. Puisque l'ordre de multiplicité avec lequel les composantes des variétés $\tilde{\gamma}'_s, \tilde{\gamma}''_s, \dots$ ainsi construites, interviennent dans l'intersection des transformées d'une $\tilde{\Phi}_{s-1}$ et d'une $\tilde{\Phi}_{s-1}^{\tilde{\lambda}_{s-1}-\tilde{\lambda}_s-1}$ génériques, diminue à chaque opération et était initialement fini, en un nombre fini de telles opérations, on parviendra nécessairement à une image $\tilde{\mathfrak{B}}^*$ de $\tilde{\mathfrak{B}}$ sur laquelle la dimension minimum des variétés-base de l'image $[\tilde{\Phi}^*_{s-1}]$ du système $[\Phi_{s-1}]$ sera supérieure à $\tilde{\lambda}_s$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

31. *Seconde phase.* — Dans l'hypothèse la plus désavantageuse qui puisse alors se présenter, la dimension minimum des variétés-base du système $[\tilde{\Phi}^*_{s-1}]$ sera $\tilde{\lambda}_s + 1$ et la variété-base totale de cette dimension sera douée de singularités. Désignons-la par $\tilde{\gamma}^*_{s-1}$. Il est clair que par l'hypothèse d'induction, on pourra transformer $\tilde{\mathfrak{B}}^*$ de manière que l'image $\tilde{\gamma}^*_{s-1}$ de $\tilde{\gamma}^*_{s-1}$ soit privée de singularités de dimensions inférieures ou égales à $\tilde{\lambda}_s - 1$; par le raisonnement qui précède, on pourra en outre éliminer les variétés singulières à $\tilde{\lambda}_s$ dimensions de $\tilde{\gamma}^*_{s-1}$. Au moyen d'un nombre fini de transformations élémentaires dont les bases ont des dimensions $\leq \tilde{\lambda}_s$, on pourra donc obtenir une image $\tilde{\mathfrak{B}}^{**}$ de \mathfrak{B} sur laquelle on trouvera les images isomorphes $\tilde{\gamma}^{**}_0, \tilde{\gamma}^{**}_1, \dots, \tilde{\gamma}^{**}_{s-1}$ de $\tilde{\gamma}_0, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}$, mais la dimension minimum des variétés-base du transformé $[\tilde{\Phi}^{**}_{s-1}]$ du système $[\Phi_{s-1}]$ sera égale à $\tilde{\lambda}_s + 1$ et la variété-base totale de dimension $\tilde{\lambda}_s + 1$ de $[\Phi^{**}_{s-1}]$ sera privée de singularités.

Il peut également arriver que la dimension minimum des variétés-base du système $[\tilde{\Phi}^{**}_{s-1}]$ soit $\tilde{\lambda}_s + \mu$, avec $\mu > 1$. Désignons la variété-base totale de cette dimension par $\tilde{\gamma}^{**}_s$. Par l'hypothèse d'induction et par le raisonnement du $n \cdot 30$ il est à nouveau clair qu'on pourra transformer $\tilde{\mathfrak{B}}^{**}$ en une variété $\tilde{\mathfrak{B}}^{**}$ sur laquelle la suite $\tilde{\gamma}^{**}_s, \tilde{\gamma}^{**}_{s-1}, \dots, \tilde{\gamma}^{**}_0$ associée à l'image $\tilde{\gamma}^{**}_1$ de $\tilde{\gamma}_1$ se termine par une variété de dimension $\geq \tilde{\lambda}_s + 1$.

32. *Conclusion.* — Par les trois *nn.* qui précèdent, il est donc possible:

1. D'éliminer les points-base isolés du système $[\Phi_{s-1}]$ lorsque ceux-ci existent, de manière que si la base totale de dimension minimum du transformé $[\Phi_{s-1}^{**}]$ est une courbe, celle-ci soit privée de singularités;

2. D'éliminer les variétés-base de dimension quelconque \tilde{h}_s , $0 < \tilde{h}_s \leq h_{s-1}$, du système $[\tilde{\Phi}_{s-1}]$, pourvu que l'on sache éliminer au préalable toutes les variétés-base de $[\Phi_{s-1}]$ de dimensions inférieures;

3. D'éliminer toutes les variétés singulières de la base totale $\tilde{\gamma}_s^*$ de dimension minimum du système $[\Phi_{s-1}^*]$ de manière que la dimension de la dernière variété-base $\tilde{\gamma}_s^{**}$ de l'image $\tilde{\gamma}_s^{**}$ de $\tilde{\gamma}_s^*$ ait une dimension $\geq \tilde{h}_s + 1$, $\tilde{\gamma}_s^{**}$ étant par définition privée de singularités.

Il est donc possible d'élever de proche en proche la dimension de la dernière des variétés-base que nous venons de définir sur les images successives de γ_{s-1} , de sorte qu'en un nombre fini d'opérations, on parviendra nécessairement à une image \mathfrak{B}^{***} de \mathfrak{B} sur laquelle l'image γ_{s-1}^{***} de γ_{s-1} sera privée de telles variétés-base de dimensions $\leq h_{s-1} - 1$. Il en résultera que l'image $[\Phi_{s-1}^{**}]$ du système $[\Phi_{s-1}]$ sera elle-même privée de base, donc, en vertu du *n. 18*, que l'image γ_{s-1}^{***} de γ_{s-1} sera privée de singularités.

Il est dès lors évident qu'on pourra entreprendre un nouveau cycle d'opérations semblables aux précédentes, ayant pour objet l'élimination des singularités de γ_{s-2}^{***} . Cet objet pourra être réalisé en un nombre fini d'opérations sans altérer les relations initiales entre les images des variétés \mathfrak{F} , $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-2}$ et des systèmes $[\Phi]$, $[\Phi_0], \dots, [\Phi_{s-3}]$ et ainsi de suite. Comme les variétés singulières polaires de \mathfrak{F} étaient initialement en nombre fini, il suffira donc d'un nombre fini d'opérations pour éliminer toutes les singularités de \mathfrak{F} . Il est donc bien démontré qu'on peut toujours transformer birationnellement une variété algébrique à k dimensions quelconque en une variété algébrique à k dimensions privée de singularités.

§ 6. Généralisation.

33. Dans l'espace linéaire S_r à r dimensions, nous appellerons *collection de variétés algébriques* la réunion d'un nombre fini de variétés algébriques E_1, E_2, \dots, E_v irréductibles, qui n'appartiennent pas l'une à l'autre, comptées chacune une seule fois, de dimensions respectives d_1, d_2, \dots, d_v , douées de singularités quelconques et ayant les unes avec les autres des intersections quelconques. Si les variétés E_1, \dots, E_v sont toutes privées de singularités, nous dirons que la collection est *privée de singularités*. Si la variété E_i ne rencontre aucune des variétés restantes $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_v$, quelle que soit la valeur $i = 1, 2, \dots, v$ nous dirons que la collection est *disjointe*. Enfin, une collection disjointe, dont toutes les variétés sont privées de singularités, sera dite *collection normalisée*.

Nous nous proposons de démontrer qu'une collection quelconque peut être transformée birationnellement à volonté en une collection disjointe, une collection privée de singularités ou une collection normalisée.

Nous dirons encore qu'un point propre ou impropre commun à $\mu \geq 2$ variétés E_i est un *point d'intersection* de la collection et que l'ensemble de tous ces points forme l'*intersection* de la collection.

34. Considérons les cônes à $r - 1$ dimensions projetant la variété E_i ($i = 1, \dots, v$) à partir des S_{r-d_i-2} de S_r . Nous obtenons ainsi v systèmes

algébriques $[E_i]$. Nous appellerons *variété associée* à la collection des E_i , toute somme $E_1 + E_2 + \dots + E_r$, comprenant un et un seul des cônes E_i correspondant à chaque valeur de i . Désignons une telle somme par \mathcal{E} et l'ensemble de toutes ces sommes par $[\mathcal{E}]$. Cet ensemble sera appelé *système associé* à la collection.

Toute variété \mathcal{E} présente un point s -uple au moins, en tout point s -uple propre ou impropre d'une E_i quelconque et un point singulier double au moins en tout point d'intersection de la collection. Il en résulte que la base du système $[\varepsilon]$ des premières polaires de toutes les variétés \mathcal{E} est formée exclusivement par les variétés singulières des E_i et par l'intersection de la collection. Le problème de la transformation birationnelle d'une collection en une collection normalisée se présente donc d'une manière entièrement identique au problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique, tel que nous l'avons posé au n° 18, et consiste dans l'élimination de la base de $[\varepsilon]$. Ainsi, nous sommes ramenés à la description de cette base et pour cela, il nous suffit d'adapter à la question actuelle les définitions des nn° 13, 14 et 15.

35. Nous dirons que les composantes à $r-2$ dimensions de la base de $[\varepsilon]$, si elles existent, forment la *variété (-1) -caractéristique polaire totale* de la collection. En dehors de cette variété, $[\varepsilon]$ découpe sur une variété ε générique, des variétés ε^1 à $r-2$ dimensions, qui, lorsque ε décrit $[\varepsilon]$, engendrent un système que nous désignerons par $[\varepsilon^1]$ et que nous appellerons système *1-caractéristique polaire* de la collection. Nous dirons que les variétés-base à $r-3$ dimensions de $[\varepsilon^1]$, si elles existent, forment la *variété 0-caractéristique polaire totale* de la collection. Et ainsi de suite. En général, le système $[\varepsilon]$ découpe sur les variétés ε^{i-1} à $r-i$ dimensions, formant le système $[\varepsilon^{i-1}]$, $(i-1)$ -caractéristique polaire de la collection, en dehors des variétés d'indices caractéristiques $\leq i-2$, des variétés ε^i à $r-i-1$ dimensions, formant le système $[\varepsilon^i]$, i -caractéristique polaire de la collection, et les variétés-base à $r-i-2$ dimensions de ce système forment la *variété $(i-1)$ -caractéristique polaire totale* de la collection. i peut atteindre la valeur maximum $r-3$.

Cette description doit être complétée par la description des singularités de la variété i -caractéristique polaire totale de la collection, pour toutes les valeurs de i , comme nous l'avons fait au n° 14. On sera ainsi conduit à attacher à la collection, comme à une variété algébrique formée de composantes simples de même dimension, une suite bien définie et terminée de variétés $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}, \gamma_s$ telle que γ_i soit la variété singulière totale d'indice caractéristique le plus élevé de γ_{i-1} , γ_0 étant la variété caractéristique totale d'indice maximum de la collection. La variété γ_s est privée de singularités et sa dimension peut être nulle.

36. Désignons la collection des E_1, \dots, E_r par χ . Pour transformer birationnellement χ en une collection normalisée, on voit donc qu'il faut procéder à l'élimination progressive de la base du système des premières polaires de γ_{s-1} ; puis, de celle de l'image du système des premières polaires de γ_{s-2} ; ...; puis, de celle de l'image du système des premières polaires de γ_1 ; puis, de celle de l'image du système des premières polaires de γ_0 ; enfin, de celle de l'image du système des premières polaires de χ elle-même.

Pour transformer une collection quelconque en une collection disjointe, il suffit, dans ce qui précède, de procéder à l'élimination de la partie de la base de $[\varepsilon]$ qui coïncide avec l'intersection de χ .

Pour démontrer qu'une collection quelconque peut toujours être transformée en une collection privée de singularités, il suffit d'observer qu'on peut transformer S_r de manière à résoudre les singularités de chacune des composantes de la collection, considérée isolément. Comme dans une telle transformation, les autres composantes n'acquièrent aucune singularité nouvelle, on parviendra donc au résultat voulu au moyen d'un nombre fini de réductions des singularités d'une variété algébrique irréductible.

L'énoncé du n° 33 est donc complètement démontré.

Bibliographie.

¹⁾ *Résolution des singularités d'une surface algébrique au moyen de transformations crémoniennes*, Bull. Soc. roy. Sci. Liège 1947, 275—289.

²⁾ *Essai sur le problème général de la réduction des singularités d'une variété algébrique*, Bull. Acad. roy. Belgique, Cl. des Sci. 1948, 399—412 et 432—444.

³⁾ *Le problème général de la réduction des singularités d'une variété algébrique*, Mém. Soc. roy. Sci. Liège, collection in 8°, 1949, fasc. 2, 1—139.

⁴⁾ *Méthode simplifiée de réduction des singularités d'une variété algébrique*, Bull. Acad. roy. Belgique, Cl. des Sci. 1949, 880—885. Nous avons appliqué cette méthode dans les trois notes suivantes:

Réduction des singularités d'une surface algébrique, Bull. Soc. roy. Sci. Liège, 1949, 415—420;

Réduction des singularités d'une variété algébrique à trois dimensions, Bull. Soc. roy. Sci. Liège 1949, 421—430;

Sur les courbes exceptionnelles, Bull. Soc. roy. Sci. Liège 1949, 431—444.

⁵⁾ VAN DER WAERDEN, B. L.: *Infinitely near points*, Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 1950.

⁶⁾ SEVERI, F.: *Trattato di Geometria algebrica*, pp. 314—316, Bologna, 1926; voir également L. GODEAUX, *Géométrie algébrique*, tome 1^{er}, ch. I, § 3. Liège 1948.

⁷⁾ ZARISKI, O.: *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*, Ann. of Math. 45, 472—542 (1944).

(Eingegangen am 8. November 1950.)

Über endliche Mengen.

Von

PAUL LORENZEN in Bonn.

Im Unterschied zur naiven und axiomatischen Mengenlehre läßt sich ein — z. B. für die Analysis ausreichender — Mengenbegriff konstruktiv definieren, indem man zunächst den Begriff Aussage (als eines endlichen Zeichens, das nach gewissen Regeln zusammengesetzt ist) definiert und dann durch Abstraktion für äquivalente Aussagen $A(x) \leftrightarrow B(x)$ die Redeweise einführt, daß $A(x)$ und $B(x)$ dieselbe Menge der x definieren*). Entsprechend können durch mehrstellige Aussagen, z. B. $A(x, y)$, mehrstellige Mengen (Beziehungen) definiert werden. Unter diesen finden sich die eindeutigen Zuordnungen. Nach dem Vorbild der naiven und axiomatischen Mengenlehre ließe sich dann der Begriff der endlichen Menge herausheben, indem man etwa nach DEDEKIND eine Menge M endlich nennt, wenn es keine eindeutige Zuordnung von M auf eine echte Untermenge von M gibt, oder — mit Benutzung der Zahlen k, l (wir benutzen hier nur die sog. natürlichen Zahlen) — wenn es eine eindeutige Zuordnung auf eine Menge $\{1, 2, \dots, k\}$ gibt.

Dieses Kunststück, den Begriff der endlichen Menge erst nach dem allgemeinen Mengenbegriff einzuführen — das, solange man keine andere Grundlage als die naive oder axiomatische Mengenlehre hat, allenfalls gerechtfertigt erscheinen mag — verliert jedoch für eine konstruktive Begründung jegliches Interesse. Da man in der konstruktiven Begründung schon vor der Definition von Aussage — also auch vor Definition des Mengenbegriffes — mit Zeichen beliebiger (endlicher) Länge operiert, wird man den Begriff der endlichen Menge nicht von einer erst zu wählenden Definition von Aussage, d. h. von einer zu wählenden Sprache abhängig machen wollen. Es ist ja nur der umgangssprachliche Name „endliche Menge“, der zu der Meinung verführt, es müsse zunächst „Menge“ als Gattungsbegriff definiert werden und dann „endlich“ als spezifische Differenz.

Sind die Individuen x, y , die als Elemente der zu definierenden endlichen Mengen fungieren sollen, gegeben, so läßt sich zunächst konstruktiv der Begriff des Systems (oft 'Tupel' oder ' k -tupel für beliebiges k ' genannt) auf einfachste Weise definieren durch

I. x sei ein System,

II. wenn \mathfrak{x} ein System ist, dann sei \mathfrak{x}, x ein System;

formalisiert I. x

II. $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x}, x$.

Nach Definition von $x \in \{\mathfrak{x}\}$ (x kommt in \mathfrak{x} vor) und $\{\mathfrak{x}\} = \{y\}$ (in \mathfrak{x} und y kommen dieselben Individuen vor) entsteht durch Abstraktion der Begriff der endlichen Menge. Indem trivialerweise jedem System eine Ordinalzahl zugeordnet werden kann — die axiomatische Theorie von Ordnungen und Wohlordenungen ist hier völlig entbehrlich —, kommt auch jeder endlichen Menge

*) Vgl. LORENZEN, P.: Math. Z. 54, 1 (1951).

eine Kardinalzahl zu. Auf Grund des Zusammenhanges von Summe und Produkt für Zahlen einerseits, für Systeme bzw. Mengen andererseits, lassen sich die bekannten elementaren Überlegungen (z. B. die Betrachtung eines Rechtecks zum Beweis der Kommutativität der Multiplikation) formalisieren, und diese können die schwierigeren GRASSMANNschen Induktionsbeweise ersetzen. Die Invarianz der Kardinalzahl gegenüber umkehrbaren Abbildungen muß hier — im Gegensatz zur naiven und axiomatischen Mengenlehre — bewiesen werden (dafür fällt der Endlichkeitsbeweis für $\{1, 2, \dots, k\}$ weg). Das Invarianzprinzip, nach dem es keine eineindeutige Zuordnung von $\{1, \dots, k\}$ auf $\{1, \dots, l\}$ gibt für $k \neq l$, ist interessanterweise ein Satz der für 'alle möglichen' Zuordnungen gilt — mit Hilfe welcher Sprache auch immer diese definiert seien. Die Existenz solcher Sätze ist sicherlich eine Verführung dazu, auch an die Existenz einer 'allumfassenden' Sprache zu glauben, was ja sowohl den naiven wie auch den axiomatischen Standpunkt kennzeichnet. Der Beweis in § 5 zeigt demgegenüber, daß es sich bei dem Invarianzprinzip nur um einen einfachen finit-kombinatorischen Sachverhalt handelt, der nur insofern etwas über 'alle möglichen' Sprachen aussagt, als die Aussagen jeder Sprache (endliche) Zeichen sind.

§ 1. Die Ordnung der Zahlen.

Wir setzen die Theorie der Zahlen I, II, III, ..., für die wir hier die Variablen k und l verwenden, soweit als bekannt voraus, wie sie in der konstruktiven Begründung der Mathematik¹⁾ entwickelt ist, insbesondere die Relationen $=$, \neq und das Identitätsprinzip

$$k = l \wedge A(k) \rightarrow A(l).$$

Für die Relationen \leq und $>$ geben wir folgende induktive Definitionen:

$$(D_1) \quad I \leq k$$

$$(D_2) \quad k \leq l \rightarrow k \leq l$$

$$(D_3) \quad k > I$$

$$(D_4) \quad k > l \rightarrow k > l.$$

Als Inversionen¹⁾ gelten

$$(*D_2) \quad k \leq l \rightarrow k \leq l$$

$$(*D_4) \quad k > l \rightarrow k > l.$$

Es ergibt sich ferner leicht die Unableitbarkeit¹⁾ von $k_0 \leq I$ (denn $k_0 \leq I \neq I \leq k$ wegen $k_0 \neq I$ und $k \leq I \neq k_0 \leq I$ wegen $I \neq I$) und von $I > k_0$ (denn $k > I \neq I > k_0$ und $k > I \neq I > k_0$ wegen $k \neq I$).

Damit haben wir

$$(S_1) \quad \neg k \leq I$$

$$(S_2) \quad \neg I > k,$$

indem wir hier \neg für die Negation schreiben.

¹⁾ LORENZEN, P.: Math. Z. 53, 162 (1950).

Wir schreiben $k \geq l$ für $l \leq k$ und $k < l$ für $l > k$. Die Beweise der folgenden Sätze mit Hilfe des Induktionsprinzips

$$A(l) \wedge \bigwedge_k (A(k) \rightarrow A(kl)) \rightarrow A(k_0)^2$$

bzw. des abgeleiteten Prinzips der Paar-Induktion

$$A(l, l) \wedge \bigwedge_k A(k, l) \wedge \bigwedge_k A(l, k) \wedge \bigwedge_{k, l} (A(k, l) \rightarrow A(kl, l)) \rightarrow A(k_0, l_0)$$

sind analog zu (S_2) , (S_3) und (S_{10}) aus¹⁾ zu führen.

$$(S_2) \quad k \leq l \vee k > l$$

$$(S_4) \quad \neg (k \leq l \wedge k > l).$$

S_3 , S_4 ergeben zusammen

$$k \leq l \leftrightarrow \neg k > l.$$

$$(S_5) \quad k \leq k$$

$$(S_6) \quad k \leq l \vee k \geq l$$

$$(S_7) \quad k \leq l \wedge k \geq l \rightarrow k = l$$

$$(S_9) \quad k_1 \leq k_2 \wedge k_2 \leq k_3 \rightarrow k_1 \leq k_3.$$

Bei S_8 beweist man $k_1 \leq | \wedge | \leq k_3 \rightarrow k_1 \leq k_3$ aus D_1 , S_7 und beweist

$$k_1 \leq k_2 | \wedge k_2 | \leq k_3 \rightarrow k_1 \leq k_3$$

durch Paar-Induktion nach k_1 , k_3 .

$$(S_9) \quad k > k |$$

$$(S_{10}) \quad k < l | \rightarrow k \leq l$$

$$(S_{11}) \quad k < l \leftrightarrow k \leq l \wedge k \neq l.$$

Aus dem Induktionsprinzip ergibt sich anschließend das ordnungstheoretische Induktionsprinzip

$$\bigwedge_{k < k_0} (\bigwedge_k A(k) \rightarrow A(k_0)) \rightarrow A(l)$$

und durch Kontraposition das Minimalprinzip

$$A(l) \rightarrow \bigvee_k (A(k_0) \wedge \bigwedge_k (A(k) \rightarrow k \geq k_0)).$$

Indem wir den Gebrauch von Termen¹⁾ als bekannt voraussetzen, schreiben wir die Definition von Addition und Multiplikation:

$$(D_5) \quad k + | = k |$$

$$(D_6) \quad k_1 + k_2 | = (k_1 + k_2) |$$

$$(D_7) \quad k \cdot | = k$$

$$(D_8) \quad k_1 \cdot k_2 | = k_1 \cdot k_2 + k_1.$$

¹⁾ \bigwedge_k bzw. $\bigwedge_{k, l}$ statt „für alle k “ bzw. „für alle k und l “. \bigwedge bzw. \bigvee statt „und“ bzw. „oder“. \bigvee_k statt „für ein k “ (es gibt ein k).

Von den über Addition und Multiplikation geltenden Sätzen brauchen wir im folgenden nur den — leicht durch Induktion zu gewinnenden —

$$(S_{12}) \quad | + k = k |.$$

Wir schreiben im folgenden 1 statt |, 2 statt ||.

§ 2. Systeme.

Als Variable für die Individuen (z. B. die Zahlen) nehmen wir x und y . Wir definieren Systeme — für die wir die Variablen ξ und η benutzen — durch

$$\text{I.} \quad x$$

$$\text{II.} \quad \xi \rightarrow \xi, x.$$

Hiernach sind alle Systeme von der Form x_1, x_2, \dots, x_k — wir werden diese Schreibweise aber zu Beweiszwecken nur verwenden, wenn sie sich ersichtlich eliminieren läßt. Analog zur Semiotik¹⁾ definieren wir Gleichheit = und Ungleichheit \neq für Systeme — indem $x = y$ und $x \neq y$ als schon definiert angenommen wird — durch

$$(D_1^1) \quad \xi = \eta \wedge x = y \rightarrow \xi, x = \eta, y$$

$$(D_{2,1}^2) \quad \xi \neq \eta \rightarrow \xi, x \neq \eta, y$$

$$(D_{2,2}^2) \quad x \neq y \rightarrow \xi, x \neq \eta, y,$$

d. h. $x_1, \dots, x_k = y_1, \dots, y_l$ genau dann, wenn $k = l$ und $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_k = y_l$. Wir definieren die (geordnete) Addition und die (antilexikalisch geordnete) Multiplikation von Systemen durch

$$(D_3^3) \quad \xi_1, (\xi_2, x) = (\xi_1, \xi_2), x$$

$$(D_4^4) \quad (\xi, x) \circ y = \xi \circ y, x \circ y$$

$$(D_5^5) \quad \xi \circ (\eta, y) = \xi \circ \eta, \xi \circ y,$$

$$\text{d. h.} \quad (x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_l) = x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$$

$$\text{und} \quad (x_1, \dots, x_k) \circ (y_1, \dots, y_l) =$$

$$= x_1 \circ y_1, \dots, x_k \circ y_l, x_1 \circ y_2, \dots, x_k \circ y_2, \dots, x_1 \circ y_l, \dots, x_k \circ y_l;$$

Hierbei ist $x \circ y$ undefiniert, es gelte

$$x_1 \circ y_1 = x_2 \circ y_2 \leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Die Beweise für die Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Operationen sind analog zur Arithmetik leicht zu ergänzen. Von den Sätzen über Addition und Multiplikation von Systemen brauchen wir zunächst nur die Assoziativität der Addition.

$$(S_1^1) \quad \xi_1, (\xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2), \xi_3$$

Beweis durch Systeminduktion¹⁾, d. h. durch

$$\bigwedge_x A(x) \wedge \bigwedge_{\xi, x} (A(\xi) \rightarrow A(\xi, x)) \rightarrow A(\xi_0).$$

Denn es gilt $\xi_1, (\xi_2, x) = (\xi_1, \xi_2), x$ und aus $\xi_1, (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2), \xi_3$ folgt
 $\xi_1, (\xi_2, (\xi_3, x)) = \xi_1, ((\xi_2, \xi_3), x) = (\xi_1, (\xi_2, \xi_3)), x = ((\xi_1, \xi_2), \xi_3), x = (\xi_1, \xi_2), (\xi_3, x).$

Wir definieren jetzt zu jedem System ξ eine Ordinalzahl $|\xi|$ durch

$$(D_6) \quad |x| = 1$$

$$(D_7) \quad |\xi, x| = |\xi| + 1$$

und beweisen zunächst

$$(S_2^1) \quad |\xi, \eta| = |\xi| + |\eta|$$

$$(S_3^1) \quad |\xi \circ \eta| = |\xi| \cdot |\eta|$$

durch Systeminduktion.

Beweis von S_2^1 : 1) $|\xi, x| = |\xi| + 1 = |\xi| + |x|$ nach D_6, D_7 ,

2) aus $|\xi, \eta| = |\xi| + |\eta|$ folgt

$$|\xi, (\eta, y)| = |(\xi, \eta), y| = |\xi, \eta| + 1 = (|\xi| + |\eta|) + 1 = |\xi| + (|\eta| + 1) = |\xi| + |\eta, y|.$$

Beweis von S_3^1 : 1) $|\xi \circ y| = |\xi|$, denn $|x \circ y| = 1 = |x|$ und aus $|\xi \circ y| = |\xi|$ folgt

$$|(\xi, x) \circ y| = |\xi \circ y, x \circ y| = |\xi| + 1 = |\xi, x|$$

2) aus $|\xi \circ \eta| = |\xi| \cdot |\eta|$ folgt $|\xi \circ (\eta, y)| = |\xi \circ \eta, \xi \circ y| =$

$$= |\xi \circ \eta| + |\xi \circ y| = |\xi| \cdot |\eta| + |\xi| = |\xi| \cdot (|\eta| + 1) = |\xi| \cdot |\eta, y|.$$

Aus diesem Beweis ist zu sehen, warum wir — nachdem die Multiplikation für Zahlen durch D_7, D_8 definiert war — für Systeme die antilexikalische Multiplikation gewählt haben. Aus S_1^1 und S_2^1 folgt selbstverständlich

$$(S_{12}) \quad k_1 + (k_2 + k_3) = (k_1 + k_2) + k_3.$$

§ 3. Endliche Mengen.

Zur formalen Vereinfachung lassen wir jetzt auch ein leeres System \emptyset zu — und dementsprechend unter den Ordinalzahlen von Systemen ebenfalls die 0. Wir setzen

$$|\emptyset| = 0$$

$$\emptyset, \xi = \xi, \emptyset = \xi$$

$$\emptyset \circ \xi = \xi \circ \emptyset = \emptyset.$$

Jetzt definieren wir

$$(D_8^1) \quad x \in \{\xi\} \leftrightarrow \bigvee_{\xi_1, \xi_2} \xi_1, x, \xi_2 = \xi,$$

d. h. es gilt $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$ genau dann, wenn $x = x_1 \vee x = x_2 \vee \dots \vee x = x_k$. Für die Zeichen $\{\xi\}$ verwenden wir die Variablen M und N und setzen

$$(D_9^1) \quad M \subset N \leftrightarrow \bigwedge_x (x \in M \rightarrow x \in N)$$

$$(D_{10}^1) \quad M = N \leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M.$$

Wir nennen $\{\xi\}$ die aus ξ erzeugte Menge. Unter den Systemen, die dieselbe Menge erzeugen, sind die einfachen Systeme ausgezeichnet, die definiert sind durch

$$(D'_{11}) \quad \xi \text{ einfach} \leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2, x} (\xi_1, x, \xi_2 = \xi \rightarrow \neg x \in \{\xi_1, \xi_2\}).$$

Mit Hilfe von S'_1 folgt leicht, daß mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 auch ξ_2 und ξ_1, ξ_3 einfach sind.

$$(S'_4) \quad \xi \text{ einfach} \wedge \eta \text{ einfach} \wedge \{\xi\} = \{\eta\} \rightarrow |\xi| = |\eta|.$$

Beweis durch Induktion nach $|\xi|$

1. für leere Systeme ist S'_4 trivial,

2. es sei $\xi \neq \emptyset$ und $\xi = \xi_0, x$. Aus $\{\xi\} = \{\eta\}$ folgt $\eta = \eta_1, x, \eta_2$ und $\{\xi_0\} = \{\eta_1, \eta_2\}$ wegen der Einfachheit von ξ und η . Wegen $|\xi| = |\xi_0| + 1 > |\xi_0|$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $|\xi_0| = |\eta_1, \eta_2| = |\eta_1| + |\eta_2|$ und daher mit S_{12} , S_{13}

$$|\xi| = |\xi_0| + 1 = |\eta_1| + |\eta_2| + 1 = |\eta_1| + 1 + |\eta_2| = |\eta_1, \eta_2| = |\eta|.$$

Für jede Menge M definieren wir jetzt die — nach dem Minimalprinzip existierende — kleinste Ordinalzahl $|\xi|$ mit $M = \{\xi\}$ als Kardinalzahl $|M|$. Nach dieser Definition ist $|\{\xi\}| \leq |\xi|$

$$(S''_5) \quad |\{\xi\}| = \xi \rightarrow \xi \text{ einfach.}$$

Beweis: Wäre ξ nicht einfach, d. h. $\xi = \xi_1, x, \xi_2$ und $x \in \{\xi_1, \xi_2\}$, so wäre $\{\xi\} = \{\xi_1, \xi_2\}$ und daher $|\{\xi\}| = |\{\xi_1, \xi_2\}| \leq |\xi_1, \xi_2| = |\xi_1| + |\xi_2| < |\xi|$.

Nach S''_5 gibt es zu jeder Menge M ein einfaches System ξ mit $M = \{\xi\}$ und für dieses gilt $|\{\xi\}| = |\xi|$. Wegen S'_4 gilt also auch

$$(S''_6) \quad \xi \text{ einfach} \rightarrow |\{\xi\}| = |\xi|.$$

Definiert man für jede Zahl k das System $[k] = 1, 2, \dots, k$ durch

$$[1] = 1$$

$$[k+1] = [k], k+1,$$

so ist stets $[k]$ ein einfaches System. Aus der Definition folgt $|[k]| = k$, also gilt auch $|\{[k]\}| = k$.

§ 4. Abbildungen von Systemen und endlichen Mengen.

Unter einer Abbildung f von $\xi = x_1, \dots, x_k$ in η verstehen wir ein System von Paaren

$$x_1 \circ y_1, \dots, x_k \circ y_k \text{ mit } \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subset \{\eta\}.$$

Die induktive Definition von ' f ist Abbildung von ξ in η ' lautet:

1. \emptyset ist Abbildung von \emptyset in η ,
2. $y \in \{\eta\} \wedge f$ ist Abbildung von ξ in $\eta \rightarrow$
 $\rightarrow f, x \circ y$ ist Abbildung von ξ, x in η .

Eine Abbildung $f = x_1 \circ y_1, \dots, x_k \circ y_k$ heißt umkehrbar, wenn das System y_1, \dots, y_k einfach ist. (Die Zwischenpunkte ... ließen sich selbstverständlich auch für diese Definition vermeiden.)

Schubfachsatz: Eine Abbildung von ξ in η ist für $|\xi| > |\eta|$ nicht umkehrbar.

Beweis durch Induktion nach $|\xi|$

1. für $\xi = \emptyset$ trivial;
2. es sei $\xi = \xi_0, x$ und f eine umkehrbare Abbildung von ξ in η . Es ist $f = f', x \circ y$ mit $y \in \{\eta\}$. Streichen wir in η alle Elemente y , so bleibt ein System η_0 übrig mit $|\eta_0| + 1 \leq |\eta|$ — und wegen der Umkehrbarkeit von f ist auch f' eine umkehrbare Abbildung von ξ_0 in η_0 . Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|\xi_0| \leq |\eta_0|$ d. h. $|\xi| = |\xi_0| + 1 \leq |\eta_0| + 1 \leq |\eta|$.

Ist ξ einfach, dann heißt für eine (umkehrbare) Abbildung $f = x_1 \circ y_1, \dots, x_k \circ y_k$ die Menge $\{f\}$ eine (umkehrbare) Abbildung von $\{\xi\}$ auf $\{y_1, \dots, y_k\}$.

Aus dieser Definition folgt mit S_0^0 aus dem Schubfachsatz sofort der

Invarianzsatz: Gibt es eine umkehrbare Abbildung von M auf N , dann ist $|M| = |N|$.

Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial, denn, wenn $|M| = |N|$ gilt, dann gibt es einfache Systeme ξ und η mit $M = \{\xi\}$, $N = \{\eta\}$ und $|\xi| = |\eta|$. Für $\xi = x_1, \dots, x_k$ und $\eta = y_1, \dots, y_k$ ist $\{x_1 \circ y_1, x_2 \circ y_2, \dots, x_k \circ y_k\}$ die gesuchte Abbildung.

Als Anwendung des Invarianzsatzes ergibt sich z. B. sofort die Kommutativität der Multiplikation von Zahlen durch Konstruktion einer umkehrbaren Abbildung $\{f\}$ von $\{\xi \circ \eta\}$ auf $\{\eta \circ \xi\}$. Bei einfachem $\xi = x_1, \dots, x_{k_0}$ und $\eta = y_1, \dots, y_{l_0}$ genügt $\{f\} = \{\dots, (x_k \circ y_l) \circ (y_l \circ x_k), \dots\}$ mit $k \leq k_0$ und $l \leq l_0$.

§ 5. Das Invarianzprinzip.

Wir stellen uns — allerdings nur ironisch — auf den naiven Standpunkt und betrachten eine Zuordnung ϱ zwischen Zahlen. Wir schreiben $k \varrho l$ wenn die Zuordnung ϱ der Zahl k die Zahl l zuordnet.

Wir nennen die Zuordnung eindeutig, wenn

$$k \varrho l_1 \wedge k \varrho l_2 \rightarrow l_1 = l_2$$

gilt. Wir nennen die Zuordnung eine Zuordnung aus $[k_0]$ auf $[l_0]$, wenn

$$\bigwedge_{l \leq l_0} \bigvee_{k \leq k_0} k \varrho l \text{ gilt.}$$

Dann gilt zunächst das

Verallgemeinerte Schubfachprinzip: Eine Zuordnung aus $[k_0]$ auf $[l_0]$ ist für $k_0 < l_0$ nicht eindeutig, d. h.

$$\bigwedge_{l \leq l_0} \bigvee_{k \leq k_0} k \varrho l \rightarrow \bigvee_{l_1 + l_2 = l_0} (k \varrho l_1 \wedge k \varrho l_2).$$

Zum Beweis benutzen wir von ϱ nur, daß es ein Zeichen ist. Von den mit diesem Zeichen als Primaussagen¹⁾ zusammensetzbaren Aussagen bilden wir

$$(1) \quad \bigwedge_{l \leq l_0} \bigvee_{k \leq k_0} k \varrho l.$$

Die Aussage $\bigvee_{k \leq k_0} k \varrho l$ ist äquivalent mit $1 \varrho l \vee 2 \varrho l \vee \dots \vee k_0 \varrho l$ und, da $\bigwedge_{i \leq l_0} A(i)$ äquivalent ist mit $A(1) \wedge A(2) \wedge \dots \wedge A(l_0)$, erhalten wir als weitere äquivalente Umformung von (1):

$$(1 \varrho 1 \vee \dots \vee k_0 \varrho 1) \wedge (1 \varrho 2 \vee \dots \vee k_0 \varrho 2) \wedge \dots \wedge (1 \varrho l_0 \vee \dots \vee k_0 \varrho l_0).$$

(Wir verzichten hier auf die etwas mühsame Eliminierung der Zwischenpunkte.) Dies ist nach den distributiven Gesetzen für \wedge und \vee äquivalent mit

$$(2) \quad (1 \varrho 1 \wedge \dots \wedge 1 \varrho l_0) \vee \dots \vee (k_0 \varrho 1 \wedge \dots \wedge k_0 \varrho l_0).$$

Ersetzen wir $k \varrho l$ durch $l \circ k$, so liefert jedes Disjunktionsglied von (2) ein System

$$1 \circ y_1, \dots, l_0 \circ y_{l_0} \text{ mit } \{y_1, \dots, y_{l_0}\} \subset \{[k_0]\}.$$

Wir erhalten also eine Abbildung von $[l_0]$ in $[k_0]$. Diese ist nach dem Schubfachsatz unter Voraussetzung von $k_0 < l_0$ nicht umkehrbar, d. h. jedes Disjunktionsglied von (2) enthält zwei Glieder mit $y_{l_1} = y_{l_2}$ und $l_1 \neq l_2$. Jedes Disjunktionsglied von (2) impliziert also zunächst eine Aussage $k \varrho l_1 \wedge k \varrho l_2$ mit $l_1 \neq l_2$ und daher auch $\bigvee_{l_1 \neq l_2} (k \varrho l_1 \wedge k \varrho l_2)$ q. e. d.

Durch zweifache Anwendung dieses Prinzips folgt das

Invarianzprinzip: Gibt es eine eindeutige Zuordnung von $[k_0]$ auf $[l_0]$, dann ist

$$k_0 = l_0.$$

Das Invarianzprinzip ist hiernach nichts anderes als eine Anwendung des Invariansatzes auf die Logik, d. h. die Syntax beliebiger Kalküle.

(Eingegangen am 10. Dezember 1950.)

Berichtigung.

Corrections to my paper „New proof of two theorems concerning tauberian reduction of integrals“ by I. S. GÁL in Paris. Math. Ann. 122, 390—399 (1951).

This paper, which was recently published in Math. Annalen, Vol. 122, pp. 390—399 (1951), contains the following misprints:

p. 391, l. 15 above, p. 393, l. 8 and 10, p. 394, l. 2 twice, p. 397, l. 10 and l. 13 above, p. 398, l. 14 and p. 399, l. 16: should be $\int_{\ominus} \dots$ instead of \int_{\oplus} .
p. 391, l. 8 above: almost everywhere on the set \oplus should be in italics.

p. 391, l. 4 above: $\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu_{\lambda}=0}^{n-\lambda} 2^{\lambda-n}$ instead of $\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu_{\lambda}=0}^{n-\lambda} 2^{\lambda-n}$.

p. 392, l. 15: equality (4) instead of equality (5).

p. 392, l. 19: $\sum_{\lambda=1}^{n-1}$ instead of $\sum_{\lambda=1}^n$.

p. 393, l. 11: Denote by \bar{E}_n instead of Denote by E_n .

p. 393, l. 14: $\int_{\bar{E}_n} \dots$ instead of $\int \bar{E}_n \dots$ (twice).

p. 395, l. 3: the denominator of the formula should be written as follows:

$$R^{\frac{4p}{p-1}} \bar{\psi}(2^n) \varphi(2^n)$$

p. 395, l. 4: the last factor of the formula should be written thus, $n^{\frac{1-p}{1+p}}$.

p. 395, l. 3 above: the right hand side of the inequality should start
with $\leq 2 \varrho^{\frac{2p+2}{p-1}}$.

p. 397, l. 4: only repeat instead of only the repeat.

p. 397, l. 14 above: for every couple $(0, N)$ and (M, N) should be in italics.

p. 397, l. 2 above: $\bar{\psi}(N)$ instead of $\psi(N)$.

p. 398, l. 9: depending only on γ instead of depending only γ .

p. 398, l. 14: $\bar{\psi}(2^n)$ instead of $\psi(2^n)$.

p. 399, l. 7: $2^{-\frac{(\gamma-\alpha)\lambda}{p}}$ instead of $2^{-\frac{(\alpha-\gamma)\lambda}{p}}$.

p. 399, l. 20: and let $\alpha = \frac{1}{2}$ instead of and let $\gamma = 1$, and

choose $\bar{\psi}(N) = 8N$ instead of choose $\bar{\psi}(N) = 4N$.

p. 399, l. 6 above: $\dots 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \dots$ instead of $\dots 2^{(\lambda-n)(1+\gamma)} \dots$

p. 399, l. 5 above: the estimation should be

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu_{\lambda}=0}^{n-\lambda} 2^{\frac{3}{2}(\lambda-n)} = 2^{n+1} \sum_{\lambda=1}^n 2^{\frac{\lambda-n}{2}} < 2^{n+3} = \bar{\psi}(2^n).$$

p. 399, l. 2 above: $8N$ instead of $4N$.

Berichtigung

zur Arbeit von L. RÉDEI, Math. Ann. 122, 127–130 (1950).

Der Titel sollte richtig so lauten: Die endlichen Gruppen ohne direkt zerlegbare Untergruppen.

Herr SZEKERES machte mich freundlich aufmerksam, daß durch die Gleichungen (2), (2') zufolge der Assoziativitätsbedingungen nur die verallgemeinerten Quaternionengruppen (Fall $\varepsilon = 0$) definiert werden.

Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.

Von

FRIEDRICH BACHMANN in Kiel.

Bei der Entwicklung der ebenen metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, welche auf Untersuchungen von HESSENBERG¹⁾ und HJELMSLEV²⁾ zurückgeht, wird ein Gruppenkalkül verwendet, dessen Gegenstand Spiegelungsprodukte sind; geometrische Begriffe werden durch Spiegelungsrelationen ausgedrückt und geometrische Sätze durch Aussagen über die Gleichheit von Spiegelungsprodukten wiedergegeben. Als ein wichtiges Beweismittel erweist sich, wie z. B. der HESSENBERGSche Beweis des PASCALSchen Satzes zeigt, der „Satz von den drei Spiegelungen“, d. h. die Aussage, daß das Produkt von drei Spiegelungen, deren Achsen durch einen Punkt gehen bzw. auf einer Geraden senkrecht stehen, wiederum eine Spiegelung ist.

Ein Axiomensystem, welches den spiegelungsgeometrischen Standpunkt rein zur Geltung bringt und, von den Spiegelungen und ihrer Verknüpfung ausgehend, die Begründung der ebenen absoluten Geometrie (mit Einschluß der elliptischen) vorzunehmen gestattet, hat ARNOLD SCHMIDT angegeben³⁾. Im folgenden wird eine reduzierte Fassung dieses Axiomensystems vorgeschlagen und gezeigt, daß die weiteren, von ARNOLD SCHMIDT als Axiome aufgestellten Tatsachen beweisbar sind⁴⁾. Man erkennt so, daß es für die Begründung der ebenen absoluten Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff⁵⁾ genügt, als geometrische Axiome die Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden, die Existenz der Senkrechten und den Satz von den drei Spiegelungen anzunehmen. —

Das reduzierte Axiomensystem lautet:

Grundannahme. *Es sei ein System von involutorischen Erzeugenden einer Gruppe gegeben*⁶⁾. Die Elemente des Erzeugendensystems werden *Geraden-spiegelungen*, kurz auch *Geraden* genannt und mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Def. 1. *a* heiße *senkrecht* zu *b*, in Zeichen $a \perp b$, wenn $ab = ba$ und $a \neq b$.

Def. 2. Ein Produkt ab mit $a \perp b$ heiße eine *Punktspiegelung*, kurz ein *Punkt*. Punkte werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Def. 3. *P* heiße *inzident* mit *g*, in Zeichen $P \sqsubset g$ oder $g \sqsupset P$, wenn $Pg = gP$ und $P \neq g$.

¹⁾ HESSENBERG, G.: Neue Begründung der Sphärik. Sitzgsber. Berliner math. Ges. 4, 69—77 (1905). Grundlagen der Geometrie. §§ 36—39. Berlin 1930.

²⁾ HJELMSLEV, J.: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Math.-fys. Medd. kgl. danske Videnskabernes Selskab 8, 11 (1929); 10, 1 (1929); 19, 12 (1942); 22, 6 (1945); 22, 13 (1945); 25, 10 (1949).

³⁾ SCHMIDT, ARNOLD: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtheiten in der absoluten Geometrie, Math. Ann. 118, 609—625 (1943).

⁴⁾ ARNOLD SCHMIDT hatte die Frage der Unabhängigkeit der Axiome hinter gewissen anderen, beweistechnischen Gesichtspunkten, darunter dem der Dualität, zurückgestellt.

⁵⁾ Wie sie von ARNOLD SCHMIDT a. a. O. § 3 durchgeführt ist.

⁶⁾ Involutorisch bedeute Ordnung 2. — Den Inhalt der Grundannahme könnte man etwas sparsamer ohne Verwendung des Gruppenbegriffs aussprechen, ähnlich wie ARNOLD SCHMIDT a. a. O. S. 611.

Durch die Schreibweise $g \perp P, Q$ sollen die Aussagen $g \perp P$ und $g \perp Q$, durch $g, h \perp P, Q$ die Aussagen $g \perp P, g \perp Q, h \perp P, h \perp Q$, durch $a, b, c \perp g$ die Aussagen $a \perp g, b \perp g, c \perp g$ zusammengefaßt werden uaf.

Axiom 1. Wenn $P \neq Q$, gibt es ein g , so daß $g \perp P, Q$.

Axiom 2. Aus $P \neq Q$ und $g, h \perp P, Q$ folgt $g = h$.

Axiom 3. Zu P, g gibt es stets ein l , so daß $l \perp P$ und $l \perp g$.

Axiom 4. Wenn $a, b, c \perp P$, gibt es ein d , so daß $abc = d$.

Axiom 5. Wenn $a, b, c \perp g$, gibt es ein d , so daß $abc = d$.

Axiom 6. Es gibt g, h, j , so daß $g \perp h$ und weder $j \perp g$ noch $j \perp h$ noch $j \perp gh$.

Die Axiome besagen: 1. Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es stets eine Gerade, die mit beiden inzidiert. 2. Mit zwei verschiedenen Punkten inzidiert höchstens eine Gerade. 3. Durch jeden Punkt gibt es zu jeder Geraden eine Senkrechte⁷⁾. 4. Das Produkt von drei Geraden, die mit einem Punkt inzidieren, ist eine Gerade. 5. Das Produkt von drei Geraden, die auf einer Geraden senkrecht stehen, ist eine Gerade. 6. Es gibt zwei senkrechte Geraden g, h und eine Gerade j , die weder zu g noch zu h senkrecht ist und nicht mit dem Punkt gh inzidiert.

Gilt für einen Punkt P und eine Gerade g die Gleichung $P = g$, so heißen P und g zueinander *polar*. Existiert ein Pol-Polaren-Element P, g , so gibt es zu jedem Punkt eine Polare und zu jeder Geraden einen Pol⁸⁾; die Geometrie ist dann elliptisch.

Wir geben nun auf Grund des reduzierten Axiomensystems einen Beweis⁹⁾ für die „Umkehrung des Satzes von den drei Spiegelungen“, welche gleichfalls ein wichtiges Hilfsmittel des spiegelungsgeometrischen Schließens¹⁾ ist und besagt, daß das Produkt von drei Geraden, wenn die beiden ersten durch einen Punkt P gehen bzw. auf einer Geraden g senkrecht stehen, nur dann eine Gerade ist, wenn auch die dritte Gerade durch P geht bzw. auf g senkrecht steht (Satz 5, 11).

1. (Ergänzung zu Def. 2) Aus $P = ab$ folgt $a \perp b$ und $P \perp a, b$.

Da P nach Definition 2 involutorisch ist, folgt aus $P = ab$, daß ab involutorisch ist, also $a \perp b$. Aus $P = ab$ folgt ferner $aP = b$; also ist aP involutorisch, also $P \perp a$. Entsprechend $P \perp b$.

2. (Eindeutigkeit des Orthogonalenschnitts) Aus $a \perp b$ und $P \perp a, b$ folgt $P = ab$.

Wegen $a \perp b$ ist ab nach Definition 2 ein Punkt, und nach 1 gilt $ab \perp a, b$. Da nach Voraussetzung auch $P \perp a, b$ und $a \neq b$, gilt nach Axiom 2 $P = ab$.

3. Wenn $P \perp g$, gibt es ein h , so daß $h = gP$.

Nach Axiom 3 gibt es ein h mit $h \perp g, h \perp P$. Hieraus folgt wegen $P \perp g$ nach 2 $h = gP$.

4. (Ergänzung zu Axiom 4) Aus $a, b, c \perp P$ und $abc = d$ folgt $d \perp P$.

Von den behaupteten Beziehungen $dP = Pd$ und $d \neq P$ folgt die erste unmittelbar aus den Voraussetzungen. Wäre nun $d = P$, also $abc = P$, so wäre $bc = aP$. Da hierin die rechte Seite nach Voraussetzung involutorisch ist, muß dies auch die linke, also $b \perp c$ sein. Da zudem $b, c \perp P$, folgt nach 2

⁷⁾ Es würde nebenbei genügen, Axiom 3 für nicht-inzidierende P, g zu postulieren. Inzidiert P mit g , so folgt die Existenz einer Senkrechten aus Axiom 4.

⁸⁾ ARNOLD SCHMIDT a. a. O., Satz 4 (2).

⁹⁾ Bemerkenswert ist, daß hierbei die Existenz einer Verbindungsgeraden, also Axiom 1, nicht benutzt wird. Auch die Verwendung von Axiom 4 ließe sich vermeiden.

$P = bc$. Man hätte also $bc = aP$ und $bc = P$, daher $aP = P$, was unmöglich, da a vom Einselement der Gruppe verschieden ist.

5. (Umkehrung von Axiom 4) *Aus $a, b \perp P$, $a \neq b$, $abc = d$ folgt $c \perp P$.*

Nach Axiom 3 gibt es ein b' , so daß $b' \perp P$, $b' \perp c$. Nach Axiom 4 gibt es ein a' , so daß $ab = a'b'$; nach 4 ist $a' \perp P$, und es ist $a' \neq b'$, da $a \neq b$. Wegen $b' \perp c$ ist nach Definition 2 $b'c$ ein Punkt P' ; da $a'b'c = d$, ist dann auch $a'd = P'$ und nach 1 $P' \perp a'$, b' . Es gilt also $a', b' \perp P$, P' und $a' \neq b'$, also nach Axiom 2 $P = P'$. Hieraus folgt die Behauptung, da $b'c = P'$ nach 1 $c \perp P'$ zur Folge hat.

6. (Ergänzung zu Axiom 5) *Aus $a, b, c \perp g$ und $abc = d$ folgt $d \perp g$.*

Von den behaupteten Beziehungen $dg = gd$ und $d \neq g$ folgt die erste unmittelbar aus den Voraussetzungen. Wäre nun $d = g$, also $abc = g$, so wäre $bc = ag$. Setzt man nach Definition 2 $ag = P$, $bg = Q$, so wäre zugleich $bc = P$. Nach 1 würde dann $b, g \perp P, Q$, also da $b \neq g$, nach Axiom 2 $P = Q$, also $bc = bg$, $c = g$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung.

7. (Existenz des Spiegelpunktes) *gPg ist stets ein Punkt.*

Nach Axiom 3 gibt es ein l , so daß $l \perp g$, $l \perp P$, und nach 3 ein p , so daß $p = Pl$; nach 1 gilt hierbei $l \perp p$. Aus $l \perp g$, p folgt nach Axiom 5, daß $gpg = p'$, und nach 6 gilt $p' \perp l$. Es ist nun $gPg = gplg = p'l$ und $p'l$ ein Punkt, da $p' \perp l$.

8. *Aus $P \perp l$ und $l \perp g$ folgt $gPg \perp l$.*

Aus $Pl = lP$ und $gl = lg$ folgt zunächst $gPgl = lgPg$; und da wegen $P \perp l$ außerdem $P \neq l$, folgt $gPg \neq glg$, also $gPg \neq l$.

9. (Eindeutigkeit der Senkrechten) *Aus $P \neq g$, $a, b \perp P$, $a, b \perp g$ folgt $a = b$.*

1. Fall $P \neq gPg$: Nach 8 folgt aus $P \perp a$, $a \perp g$: $gPg \perp a$, und entsprechend aus $P \perp b$, $b \perp g$: $gPg \perp b$. Also kann nach Axiom 2 auf $a = b$ geschlossen werden, da nach Voraussetzung $P \perp a, b$ und $gPg \neq P$.

2. Fall $P = gPg$: Aus $P = gPg$ folgt $P \perp g$, da nach Voraussetzung $P \neq g$. Aus $P \perp g$, a und $g \perp a$ folgt nach 2 $P = ga$, und entsprechend aus $P \perp g$, b und $g \perp b$: $P = gb$. Also $ga = gb$, $a = b$.

10. *Zu jedem c gibt es ein P mit $P \perp c$.*

Betrachte den Grundpunkt gh aus Axiom 6. Nach Axiom 3 gibt es ein l , so daß $l \perp gh$, $l \perp c$. Nach Definition 2 ist lc ein Punkt, welcher nach 1 mit c inzidiert.

11. (Umkehrung von Axiom 5) *Aus $a, b \perp g$, $a \neq b$, $abc = d$ folgt $c \perp g$.*

Sei P ein beliebiger Punkt mit $P \perp c$ (existiert nach 10). Falls $P = g$, so $g \perp c$. Sei also $P \neq g$. Nach Axiom 3 gibt es ein c' , so daß $c' \perp P$, $c' \perp g$. Ist $c = c'$, so ist $c \perp g$. Ich zeige nun, daß $c \neq c'$ unmöglich ist: Da $a, b, c' \perp g$, gibt es nach Axiom 5 ein d' , so daß $ab = d'c'$; nach 6 ist $d' \perp g$, und es ist $c' \neq d'$, da $a \neq b$. Aus $ab = dc$, $ab = d'c'$ folgt $dc = d'c'$, $cc' = dd'$. Aus $c, c' \perp P$, $cc' = dd'$ würde, falls $c \neq c'$ wäre, nach 5 $d' \perp P$ folgen. Man hätte also $P \neq g$, $c', d' \perp P$, $c', d' \perp g$, $c' \neq d'$ — im Widerspruch zu 9.

Mit dem Beweis dieser Sätze ist der Anschluß an den Aufbau der absoluten Geometrie, wie ARNOLD SCHMIDT ihn gegeben hat, hergestellt. Von seinen Axiomen 1a, b bis 5a, b entsprechen die Axiome 1a, 3a, 1b, 4a, 4b unseren Axiomen 1, 2, 3, 4, 5 und die Axiome 2a, 5a, 3b, 5b unseren Sätzen 3, 5, 9, 11; das Axiom 2b ist eine unmittelbare Folge unserer Definition 2. Für den

Nachweis, daß alle Axiome von ARNOLD SCHMIDT aus dem reduzierten Axiomensystem folgen, bleibt nur zu zeigen, daß seine Axiome 6b und 6a, die die notwendige Reichhaltigkeit an axiomatisch gegebenen Elementen sichern, aus unserem Axiom 6, der Existenz eines „Grunddreiseits“ g, h, j gefolgt werden können. Dies ist mit einfachen Schlüssen zu sehen, sei aber der Vollständigkeit halber doch ausgeführt (Satz 12, 13).

12. Zu jedem a gibt es ein b , so daß $a \neq b$ und nicht $a \perp b$.

Die gesuchte Gerade kann bereits unter den Geraden g, h, j des Grunddreiseits gefunden werden. * Diese sind voneinander verschieden ($g \neq h$, da $g \perp h$; $j \neq g$, da ja $g \perp h$, nicht $j \perp h$; und entsprechend $j \neq h$), und es ist auch $j \neq gh$ (denn $gh = j$ würde $gj = jg$ und, wegen $g \neq j$, $g \perp j$ zur Folge haben). Daher kann, falls $a = g$ oder $a = h$ ist, $b = j$ gewählt werden und, falls $a = j$ ist, $b = g$. Sei nun $a \neq g, h, j$. Es kann nicht gleichzeitig $a \perp g, h, j$ sein; denn hieraus würde nach Axiom 5 $ghj = d$, also $ghj = jhg$ und, wegen $j \neq gh$, $j \perp gh$ folgen. Unter den Geraden g, h, j gibt es also mindestens eine, die nicht zu a senkrecht ist. Diese kann dann als b gewählt werden.

13. Zu jedem A gibt es ein b , so daß $A \neq b$ und nicht $A \perp b$.

Das gesuchte b kann wieder unter den Geraden g, h, j des Grunddreiseits gefunden werden. Daß gleichzeitig $A \perp g, h, j$ gilt, ist nicht möglich; denn aus $A \perp g, h$ folgt nach 2 $A = gh$, und wäre noch $A \perp j$, so würde sich $j \perp gh$ ergeben. Ist $A \perp g, h$, also $A = gh$, so kann, da $gh \neq j$ und nicht $gh \perp j$ gilt, $b = j$ gewählt werden. Ist $A \perp g, j$, so ist $A \neq h$ (denn $A \perp j$ und $A = h$ hätte $h \perp j$ zur Folge) und nicht $A \perp h$; also kann $b = h$ gewählt werden. Entsprechend kann, falls $A \perp h, j$ gilt, $b = g$ gewählt werden. Falls A nicht mit zweien der Geraden g, h, j inzidiert, gibt es unter den beiden, mit denen A nicht inzidiert, wenigstens eine, welche ungleich A ist. Diese kann dann als b gewählt werden.

Hiermit ist gezeigt: Ist eine Menge von Geradenspiegelungen gegeben, die dem reduzierten Axiomensystem genügt, so genügen diese Geradenspiegelungen und die durch Definition 2 eingeführten Punktspiegelungen dem Axiomensystem von ARNOLD SCHMIDT. Ist nun umgekehrt eine Menge von Punkt- und Geradenspiegelungen gegeben, die dem Axiomensystem von ARNOLD SCHMIDT genügt, so gilt für sie Definition 2 als Satz (folgt unmittelbar aus Axiom 1a, 2a, 2b), Axiom 1 bis 5 und auch Axiom 6. Um die Existenz von Geraden g, h, j einzusehen, die Axiom 6 erfüllen, bestätigt man etwa zunächst, daß es einen Punkt P gibt, durch den zwei nicht-orthogonale Geraden gehen; wählt man dann nach Axiom 6a j als eine Gerade, für die $j \neq P$ und nicht $j \perp P$ gilt, so gibt es also durch P zwei orthogonale Geraden, die beide von dem von P auf j gefälltten Lot verschieden sind; diese wähle man als g und h .

Das reduzierte Axiomensystem ist also dem Axiomensystem von ARNOLD SCHMIDT äquivalent.

(Eingegangen am 31. Oktober 1950).

Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern¹⁾.

Von

CLAUS MÜLLER in Bonn.

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern lautet folgendermaßen:

Es sind zwei Paare von Feldern \mathcal{E} , \mathcal{H} zu bestimmen, die außerhalb und innerhalb des reflektierenden Körpers jeweils den MAXWELLSchen Gleichungen genügen, wobei diese Gleichungen im Inneren und Äußeren des Körpers mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten und Permeabilitäten zu formulieren sind. Die Felder haben dabei die Randbedingung zu erfüllen, daß ihre Tangentialkomponenten an der Grenze des beugenden Körpers übereinstimmen.

Mathematisch gesehen stellt dieses Problem eine Art Randwertproblem aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichung mit eigentümlichen Schwierigkeiten dar. Bisher liegen meines Wissens explizite Lösungen erst für Spezialfälle vor, in denen der reflektierende Körper einfache geometrische Gestalt hat [10²⁾]. Das vielfach benutzte Verfahren der Separation der MAXWELLSchen Gleichungen durch Einführung krummliniger Koordinaten von BROWICH kann nicht mehr verallgemeinert werden, wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde [12].

Um eine allgemeine Behandlung dieses Fragenkreises zu ermöglichen, wurde in einer kürzlich erschienenen Abhandlung [1] eine Mathematische Theorie elektromagnetischer Schwingungen in inhomogenen Medien entwickelt, die weitgehend unabhängig von Voraussetzungen über die Natur der Inhomogenitäten ist. Diese Theorie benutzt als zentralen Begriff das HUYGENSSche Prinzip, wie es wohl zuerst von LAMOR und KOTTLER mathematisch formuliert worden ist. Um das Auftreten von Eigenschwingungen (stehenden Wellen) zu verhindern, mußten Ausstrahlungsbedingungen eingeführt werden, auf deren Notwendigkeit auch W. MAGNUS hingewiesen hat [11]. Die von A. SOMMERFELD für die Schwingungsgleichung benutzten Ausstrahlungsbedingungen wurden für die MAXWELLSchen Gleichungen durch andere ersetzt, mit deren Hilfe unter Benutzung eines Satzes von F. RELICH der Beweis der Eindeutigkeit des Beugungsproblems gelang. Aus dem HUYGENSSchen Prinzip läßt sich dann ein Ansatz zur Bestimmung der gebrochenen und reflektierten Felder herleiten, der die Lösung des Beugungsproblems auf die Bestimmung der von Grenzflächenströmen erzeugten Felder zurückführt. Unter Grenzflächenströmen werden dabei Flächenstromdichten verstanden, die sich an der Grenze des beugenden Körpers befinden.

¹⁾ Die vorliegende Arbeit wurde bereits im Mai 1948 von der Wolfenbütteler Verlagsanstalt als Teil einer Darstellung „Mathematische Theorie elektromagnetischer Schwingungen“ in Druck gegeben. Da die Verlagsanstalt inzwischen ihre Tätigkeit einstellen mußte, konnte diese Arbeit nicht mehr erscheinen.

²⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den Literaturnachweis.

Die Lösung dieses Fragenkreises kann mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen erfolgen, wobei wesentlich benutzt wird, daß die Integralgleichungen nach dem Eindeutigkeitssatz keine Eigenlösungen besitzen können. Es wird damit ebenfalls bei diesen Problemen eine auch bei der Schwingungsgleichung bestehende Beziehung zwischen Eindeutigkeit und Existenz herausgearbeitet.

Die Hauptschwierigkeit besteht dabei in einer Untersuchung der Singularitäten der auftretenden Integralgleichungen. In diesem Zusammenhang erscheint es wichtig, daß es gelingt, die Integralgleichungen auf den FREDHOLM-HILBERTSchen Typ zurückzuführen. Damit wird der Existenzbeweis des allgemeinen Beugungsproblems unter der Voraussetzung, daß der reflektierende Körper von einer analytischen Randfläche begrenzt wird, gewonnen.

In einer kurzen Note wurden die Grundzüge der obigen Theorie bereits mitgeteilt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem noch ausstehenden Existenzbeweis.

1. Einführung.

Wir werden das Beugungsproblem in der folgenden Formulierung untersuchen:

Es seien V und \mathfrak{B} zwei endliche, reguläre punktfremde Gebiete, die von den Flächen F und \mathfrak{F} berandet werden. Die Fläche F sei analytisch. Im abgeschlossenen Gebiet \mathfrak{B} werden die zweimal stetig differenzierbaren elektrischen und magnetischen Stromdichten \mathbf{j} und \mathbf{j}' vorgegeben.

Im Äußeren von V sei das elektromagnetische Verhalten durch ϵ_a und μ_a , im Inneren von V durch ϵ_i und μ_i beschrieben.

Wir wollen annehmen, daß ein rationelles Maßsystem eingeführt wurde und alle Felder den Zeitanteil in der Form $e^{-i\omega t}$ enthalten. Dann sind zwei Felder $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{H}_i$ so zu bestimmen, daß in V

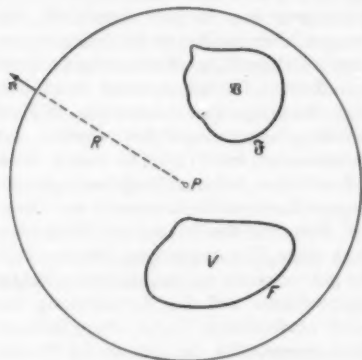


Fig. 1.

$$(1) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_i + i\omega \epsilon_i \mathfrak{E}_i = 0;$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}_i - i\omega \mu_i \mathfrak{H}_i = 0;$$

außerhalb V und außerhalb \mathfrak{B}

$$(2) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_a + i\omega \epsilon_a \mathfrak{H}_a = 0;$$

$$\nabla \times \mathfrak{H}_a - i\omega \mu_a \mathfrak{E}_a = 0.$$

außerhalb V und innerhalb \mathfrak{B}

$$(3) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_a + i\omega \epsilon_a \mathfrak{E}_a = \mathbf{j};$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}_a - i\omega \mu_a \mathfrak{H}_a = -\mathbf{j}'$$

ist. Die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{H}_i$ müssen auf F übereinstimmen. Es muß darüber hinaus $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ den Ausstrahlungsbedingungen

$$(4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R [\omega \epsilon_a (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_a) - k_a \mathfrak{H}_a] = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R [\omega \mu_a (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_a) + k_a \mathfrak{E}_a] = 0$$

bei beliebiger Wahl von P gleichmäßig für alle Richtungen genügen, während $R \mathfrak{E}_a$ und $R \mathfrak{H}_a$ gleichmäßig beschränkt bleiben*) (vgl. Fig. 1).

Einen Grenzfall dieses Problems stellt die sog. vollkommene Reflexion ($\varepsilon_i = \infty$) dar. Hier reduziert sich das Beugungsproblem auf die Bestimmung eines Feldes $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$, das den Bedingungen (2), (3) und den Ausstrahlungsbedingungen genügt, während die Übereinstimmung der Tangentialkomponenten durch $n \times \mathfrak{E}_a = 0$ ersetzt wird, wo n die Flächennormale auf der Randfläche F von V ist.

In einer früheren Arbeit [1] wurden vorbereitende Sätze bewiesen, die wir hier kurz zusammenstellen wollen.

Unter der Voraussetzung, daß

$$(5) \quad J m(\omega) \geq 0 \text{ und } R e(\omega) > 0 \text{ für } J m(\omega) = 0$$

ist, die ε und μ mit Hilfe der reellen Konstanten ε_0 und σ , sowie μ_0 und σ' in der Form

$$(6) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}; \mu = \mu_0 + \frac{i\sigma'}{\omega}; \mu_0 > 0; \varepsilon_0 > 0; \sigma \geq 0; \sigma' \geq 0$$

dargestellt werden und

$$(7) \quad k = \sqrt{k^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu}$$

so bestimmt wird, daß

$$(8) \quad J m(k) \geq 0 \text{ und } R e(k) > 0 \text{ für } J m(k) = 0$$

ist, wurde die Eindeutigkeit der Lösung des Beugungsproblems bewiesen [2].

Bevor wir uns dem Beweis der Existenz der Lösung zuwenden können, muß noch eine mit dem Beugungsproblem äquivalente Fragestellung entwickelt werden. Wir nehmen dazu an, das Beugungsproblem wäre gelöst, und die Tangentialkomponenten der Lösung $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$; $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{H}_i$ seien auf F differenzierbar, und ihre Ableitungen genügten HÖLDER-Bedingungen. Die Fläche F wollen wir als analytisch annehmen. Dann führen wir das einfallende Feld

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{B}} \left[i\omega \mu_a i \varphi_a - i' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_a \nabla \varphi_a \right] dV + \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon_a} \int_{\mathfrak{B}} (i'n) \nabla \varphi_a dF \\ \mathfrak{H}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{B}} \left[i\omega\varepsilon_a i' \varphi_a + i \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_a \nabla \varphi_a \right] dV + \frac{i}{4\pi\omega\mu_a} \int_{\mathfrak{B}} (i'n) \nabla \varphi_a dF \end{aligned}$$

ein, wobei n auf \mathfrak{B} ins Äußere von \mathfrak{B} weist,

$$(10) \quad \nabla j = i\omega \varrho; \nabla j' = i\omega \varrho'$$

ist, und

$$(11) \quad \varphi_a = \frac{e^{ik_a r}}{r}; k_a^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a$$

gesetzt wurde. Mit Hilfe der scheinbaren Ströme

$$(12) \quad \mathfrak{J} = i\omega(\varepsilon_a - \varepsilon_i)\mathfrak{E}_i; \mathfrak{J}' = i\omega(\mu_a - \mu_i)\mathfrak{H}_i$$

läßt sich dann das Feld $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ in der Form

$$(13) \quad \mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}'_a; \mathfrak{H}_a = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}'_a$$

*) Von W. K. SAUNDERS [13] wurde für reelle ω, ε und μ ein Eindeutigkeitsbeweis angegeben, der nur eine der beiden Bedingungen (4) benötigt (Anm. b. d. Korrektur).

mit

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}'_a = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left[i \omega \mu_a \mathfrak{I} \varphi_a - \right. \\ & \left. - \mathfrak{I}' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{i \omega \varepsilon_a} (\nabla \mathfrak{I}) \nabla \varphi_a \right] dV + \frac{i}{4\pi \omega \varepsilon_a} \int_F (\mathfrak{I} n) \nabla \varphi_a dF \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathfrak{H}'_a = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left[i \omega \varepsilon_a \mathfrak{I}' \varphi_a + \right. \\ & \left. + \mathfrak{I} \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{i \omega \mu_a} (\nabla \mathfrak{I}) \nabla \varphi_a \right] dV + \frac{i}{4\pi \omega \mu_a} \int_F (\mathfrak{I}' n) \nabla \varphi_a dF \end{aligned}$$

darstellen, wo \mathcal{E}'_a , \mathfrak{H}'_a üblicherweise als reflektiertes Feld bezeichnet wird. Es genügt \mathcal{E}'_a , \mathfrak{H}'_a im Äußeren von V den MAXWELLSchen Gleichungen und den Ausstrahlungsbedingungen. Ist n die ins Äußere von V gerichtete Normale auf F , so ergibt sich mit den auf F gebildeten Flächenströmen

$$(16) \quad j_a = -n \times \mathfrak{H}'_a; \quad j'_a = n \times \mathcal{E}'_a$$

und deren Flächendivergenzen

$$(17) \quad \nabla_F j_a = i \omega \varrho_a; \quad \nabla_F j'_a = i \omega \varrho'_a$$

nach dem HUYGENSSchen Prinzip, daß im Äußeren von V

$$(18) \quad \frac{1}{4\pi} \int_F \left[i \omega \mu_a j_a \cdot \varphi_a - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_a \nabla \varphi_a \right] dF = -\mathcal{E}'_a$$

$$(19) \quad \frac{1}{4\pi} \int_F \left[i \omega \varepsilon_a j'_a \cdot \varphi_a + j_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_a \nabla \varphi_a \right] dF = -\mathfrak{H}'_a$$

ist. Da (18) beim Durchgang durch F von innen nach außen den Sprung

$$(20) \quad n \times j'_a = n \times n \times \mathcal{E}'_a = -(\mathcal{E}'_a) \text{ tang}$$

und (19) den Sprung

$$(21) \quad -n \times j_a = n \times n \times \mathfrak{H}'_a = -(\mathfrak{H}'_a) \text{ tang}$$

erleidet, verschwinden die Tangentialkomponenten des Feldes (18), (19) an der Innenseite von F^3). Daraus ergibt sich aber, daß dieses Feld im Inneren von V identisch verschwindet.

Aus dem HUYGENSSchen Prinzip folgt weiterhin, daß mit den Flächenströmen

$$(22) \quad j_i = -n \times \mathfrak{H}_i; \quad j'_i = n \times \mathcal{E}_i$$

und deren Divergenzen

$$(23) \quad \nabla_F j_i = i \omega \varrho_i; \quad \nabla_F j'_i = i \omega \varrho'_i$$

im Äußeren von V

$$(24) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_F \left[i \omega \mu_i j_i \cdot \varphi_i - j'_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_i \nabla \varphi_i \right] dF = 0 \\ & \frac{1}{4\pi} \int_F \left[i \omega \varepsilon_i j'_i \cdot \varphi_i + j_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_i \nabla \varphi_i \right] dF = 0 \end{aligned}$$

³⁾ Wir meinen mit dieser Ausdrucksweise, daß die Grenzwerte der Komponenten in Tangentialrichtung bei Approximation von innen her verschwinden.

mit

$$(25) \quad \varphi_i = \frac{e^{ik_i r}}{r}; \quad k_i^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu_i$$

ist. Setzen wir noch

$$(26) \quad \begin{aligned} j_s &= -n \times \mathfrak{H}_s; \quad j'_s = n \times \mathfrak{H}_s \\ \nabla_F j_s &= i \omega \varrho_s, \quad \nabla_F j'_s = i \omega \varrho'_s, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Übereinstimmung der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}_s, \mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{H}_s, \mathfrak{H}_i$

$$(27) \quad i_s + j_s = i_i; \quad j'_s + j'_i = j'_i.$$

Da j_s und j'_s aus den Komponenten des einfallenden Feldes bestimmt werden, also als bekannt angesehen werden können, genügt es, zur Lösung des Beugungsproblems j_i, j'_i zu bestimmen.

Durch die Symbole $\int_{F_i}^{\rightarrow}$ und $\int_{F_a}^{\rightarrow}$ wollen wir nun die Grenzwerte der Integrale (18), (19) und (24), (25) bezeichnen, die bei Annäherung des Aufpunktes auf der inneren bzw. äußeren Normalen an F erhalten werden. Dann ist, wenn n die Normale im Aufpunkt bezeichnet,

$$(28) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \mu_a j_s \varphi_a - j'_s \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho'_s \nabla \varphi_a \right] dF = j'_s$$

$$(29) \quad -n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \varepsilon_a j'_s \varphi_a + j_s \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_s \nabla \varphi_a \right] dF = j_s.$$

Da weiterhin wegen (18), (19) und der Sprungrelationen (20), (21)

$$(30) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \mu_a j_s \varphi_a - j'_s \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho'_s \nabla \varphi_a \right] dF = 0$$

$$(31) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \varepsilon_a j'_s \varphi_a + j_s \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_s \nabla \varphi_a \right] dF = 0$$

ist, erhalten wir nach (27)

$$(32) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \mu_a j_i \varphi_a - j'_i \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho'_i \nabla \varphi_a \right] dF = j'_s$$

$$(33) \quad -n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i}^{\rightarrow} \left[i \omega \varepsilon_a j'_i \varphi_a + j_i \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_i \nabla \varphi_a \right] dF = j_s.$$

Andererseits ist nach (24), (25)

$$(34) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} \left[i \omega \mu_i j_i \varphi_i - j'_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho'_i \nabla \varphi_i \right] dF = 0$$

$$(35) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} \left[i \omega \varepsilon_i j'_i \varphi_i + j_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_i \nabla \varphi_i \right] dF = 0.$$

Genügen ϱ_i und ϱ'_i HÖLDER-Bedingungen, so ist auf Grund bekannter Sätze der Potentialtheorie

$$(36) \quad \begin{aligned} n \times \int_{F_i} \varrho_i \nabla \frac{1}{r} dF &= -n \times \nabla' \int_{F_i} \varrho_i \frac{1}{r} dF \\ &= -n \times \nabla' \int_{F_a} \varrho_i \frac{1}{r} dF = n \times \int_{F_a} \varrho_i \nabla \frac{1}{r} dF, \end{aligned}$$

wobei hier und im folgenden ∇' den bezüglich der Aufpunktskoordinaten angewandten ∇ -Operator bezeichnet, während ∇ auf die Quellpunktskoordinaten angewandt wird. Da $\nabla\left(\varphi_a - \frac{1}{r}\right)$ und $\nabla\left(\varphi_i - \frac{1}{r}\right)$ beim Grenzübergang gleichmäßig beschränkt bleiben, ist

$$(37) \quad n \times \int_{F_i} \varrho_i \nabla \varphi_a dF - n \times \int_{F_a} \varrho_i \nabla \varphi_i dF = n \times \int_F \varrho_i \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF,$$

wobei im letzten Integral auch der Aufpunkt auf F liegt. Nun ist

$$(38) \quad n \times \int_F \varrho_i \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF = -n \times \nabla' \int_F \varrho_i (\varphi_a - \varphi_i) dF.$$

Wegen

$$(39) \quad \nabla_F j_i = i \omega \varrho_i$$

ergibt sich

$$(40) \quad \begin{aligned} \int_F \varrho_i (\varphi_a - \varphi_i) dF &= \frac{1}{i\omega} \int_F \nabla_F [j_i (\varphi_a - \varphi_i)] dF + \frac{i}{\omega} \int_F j_i \nabla_F (\varphi_a - \varphi_i) dF \\ &= \frac{1}{i\omega} \int_F \nabla_F [j_i (\varphi_a - \varphi_i)] dF + \frac{i}{\omega} \int_F j_i \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF \end{aligned}$$

mit

$$(41) \quad \nabla_F (\varphi_a - \varphi_i) = \nabla (\varphi_a - \varphi_i) - n \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_a - \varphi_i); \quad j_i \nabla_F (\varphi_a - \varphi_i) = j_i \nabla (\varphi_a - \varphi_i).$$

Da F geschlossen ist, verschwindet das erste Integral der rechten Seite von (40), und wir erhalten

$$(42) \quad n \times \int_{F_i} \varrho_i \nabla \varphi_a dF - n \times \int_{F_a} \varrho_i \nabla \varphi_i dF = \frac{i}{\omega} n \times \int_F (j_i \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF.$$

Im letzten Integral ist es erlaubt, den Aufpunkt auf F anzunehmen, da die zweiten Ableitungen von $\varphi_a - \varphi_i$ höchstens von der Ordnung $\frac{1}{r}$ singulär werden. Weiterhin ist

$$(43) \quad \begin{aligned} n \times \int_{F_i} j_i \times \nabla \varphi_a dF &= n \times \nabla' \int_{F_i} j_i \varphi_a dF \\ &= \int_{F_i} (j_i n) \nabla' \varphi_a dF - \frac{\partial}{\partial n'} \int_{F_i} j_i \varphi_a dF \end{aligned}$$

mit

$$(44) \quad \frac{\partial}{\partial n'} \varphi_a = (n \nabla') \varphi_a = n \nabla' \varphi_a.$$

Es ist folglich $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Normalableitung hinsichtlich der Aufpunktkoordinaten. Nun ist nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie [2]

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial n'} \int_{F_i} \mathbf{j}_i \varphi_a dF = 2\pi \mathbf{j}_i' + \int_F \mathbf{j}_i' \frac{\partial \varphi_a}{\partial n'} dF,$$

so daß

$$(46) \quad \mathbf{n} \times \int_{F_i} \mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_a dF = -2\pi \mathbf{j}_i' + \int_F [\mathbf{n} \times (\mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_a)] dF$$

wird. Analog erhalten wir

$$(47) \quad \mathbf{n} \times \int_{F_a} \mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_i dF = 2\pi \mathbf{j}_i' + \int_F [\mathbf{n} \times (\mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_i)] dF.$$

Da

$$(48) \quad \int_{F_i} \mathbf{j}_i \varphi_a dF = \int_F \mathbf{j}_i \varphi_a dF$$

ist, ergibt sich aus (32) und (34)

$$(49) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_a \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} \left[i\omega \mu_a \mathbf{j}_i \varphi_a - \mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_i \nabla \varphi_a \right] dF \\ & - \varepsilon_i \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} \left[i\omega \mu_i \mathbf{j}_i \varphi_i - \mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_i \nabla \varphi_i \right] dF \\ & = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{2} \mathbf{j}_i' + \frac{i}{4\pi\omega} \mathbf{n} \times \int_F (\mathbf{j}_i \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_F \left[\frac{i}{\omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{j}_i) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) - \mathbf{n} \times \mathbf{j}_i \times \nabla' (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i) \right] dF \\ (50) \quad & = \varepsilon_a \mathbf{j}_i'. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Integralgleichung

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathbf{j}_i' &= \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \mathbf{j}_i' + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \cdot \int_F [\mathbf{n} \times \mathbf{j}_i \times \nabla' (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] dF \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega (\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \int_F [(\mathbf{n} \times \mathbf{j}_i) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + \mathbf{n} \times (\mathbf{j}_i \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF. \end{aligned}$$

Aus (33) bzw. (35) erhalten wir durch Multiplikation mit μ_a bzw. μ_i und nachfolgender Subtraktion analog

$$(52) \quad \begin{aligned} \mathbf{j}_i &= \frac{2\mu_a}{\mu_i + \mu_a} \mathbf{j}_i - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [\mathbf{n} \times \mathbf{j}_i \times \nabla' (\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i)] dF \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega (\mu_i + \mu_a)} \int_F [(\mathbf{n} \times \mathbf{j}_i) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + \mathbf{n} \times (\mathbf{j}_i \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF. \end{aligned}$$

Diese letzten Umformungen werden notwendig, damit aus den Gleichungen (32) bis (35) ein System von Integralgleichungen vom FREDHOLM-HILBERTSchen Typ gebildet werden kann.

Den Spezialfall $\varepsilon_i = \infty$ wollen wir später behandeln und wenden uns zunächst dem Studium der Singularitäten von (51) und (52) zu.

2. Die Singularitäten der Integralgleichungen.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen daß das System von Integralgleichungen (51), (52) von bekanntem Typus ist. Dazu ist die Ordnung der Singularitäten der Kernmatrix zu untersuchen.

Wir schreiben statt i_i, j_i einfacher i, j' . Die Fläche F zerlegen wir in endlich viele reguläre Oberflächenelemente, die in der Form

$$(1) \quad \xi = \xi(\xi^1, \xi^2)$$

dargestellt werden, wobei wir zur Beschreibung der Gesamtfläche endlich viele punktfremde Parameterbereiche benutzen, die einzeln jeweils ein Oberflächenelement in der Form (1) darstellen. Die Wahl der Parameterdarstellung und der Parameterbereiche ist weitgehend willkürlich. Wir können aber zu jedem Punkt P von F eine Parameterdarstellung der angegebenen Art so finden, daß

- a) P den Parametern $(0, 0)$ entspricht,
- b) $\xi(\xi^1, \xi^2)$ in einer Umgebung des Nullpunktes analytisch ist.

Den Vektor j stellen wir mit Hilfe seiner Komponenten j^1, j^2 in der Form

$$(2) \quad j = j^1 \xi_1 + j^2 \xi_2$$

dar, wobei

$$(3) \quad \xi_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \xi$$

ist. Vereinbaren wir noch, daß alle Indizes nur die Werte 1, 2 annehmen und über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis 2 zu summieren ist, so ergibt sich

$$(4) \quad j = j^k \xi_k; \quad j' = j'^k \xi_k.$$

Setzen wir, wie üblich

$$(5) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k,$$

so können wir unser Koordinatensystem noch so vereinfachen, daß in P

$$(6) \quad g_{ik} = \delta_{ik}; \quad \Gamma_{ik}^r = 0$$

ist. Für eingehendere Rechnungen empfiehlt sich die Benutzung des Tangenten-Normalensystems. Darunter wird ein *kartesisches* dreidimensionales Koordinatensystem verstanden, dessen Ursprung P ist und dessen Achsen so liegen, daß F in einer Umgebung von P in der Form

$$(7) \quad \xi^3 = F(\xi^1, \xi^2)$$

dargestellt werden kann, wobei im Punkte $\xi^1 = \xi^2 = 0$

$$(8) \quad F = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \xi^1} F = \frac{\partial}{\partial \xi^2} F = 0$$

ist. Sind e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen, so wird in (1)

$$(9) \quad \xi = \xi^k e_k + F e_3,$$

und es ist in P

$$(11) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k = e_i e_k = \delta_{ik}$$

sowie wegen (11)

$$(12) \quad \xi_{ik} \xi_j = \Gamma_{ik}^r g_{rj} = \Gamma_{ik}^j = -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^i \partial \xi^k} e_j e_a = 0,$$

so daß das Tangenten-Normalsystem nach (10) ein spezielles, in P geodätisches Koordinatensystem der Fläche F liefert.

Wir wollen das Integralgleichungssystem (51), (52) nun als System von vier Integralgleichungen für die vier Funktionen j^1, j^2, j'^1, j'^2 auffassen. Bezeichnen wir durch (x) die Abhängigkeit von den Aufpunktskoordinaten (x^1, x^2) , so lautet (51) dann z. B.

$$(13) \quad \begin{aligned} j'^i(x) &= \frac{2 \varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} j^i_e(x) + \\ &+ \frac{1}{2 \pi} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F g^{ik}(x) \xi_k(x) [n(x) \times j'^a(\xi) \xi_a(\xi) \times \nabla' (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] dF_\xi \\ &- \frac{1}{2 \pi} \frac{i}{\omega (\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \int_F g^{ik}(x) \xi_k(x) (n(x) \times j^a(\xi) \xi_a(\xi)) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) dF_\xi \\ &- \frac{1}{2 \pi} \frac{i}{\omega (\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \int_F g^{ik}(x) \xi_k(x) [n(x) \times (j^a(\xi) \xi_a(\xi) \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF_\xi, \end{aligned}$$

wobei g^{ik} die zu g_{ik} inverse Matrix darstellt und genau wie n von (x) abhängt. Die Integralgleichung (52) zerfällt entsprechend in zwei Gleichungen, die dadurch entstehen, daß wir beide Seiten skalar mit $g^{ik} \xi_k$ multiplizieren.

Wir setzen nun

$$(14) \quad \gamma_{ik}(x, \xi) = \xi_i(x) \xi_k(\xi)$$

und denken uns die Koordinaten so bezeichnet, daß

$$(15) \quad n = \frac{\xi_1 \times \xi_2}{|\xi_1 \times \xi_2|}$$

ist.

In der Umgebung von $(x) = (\xi)$ wird

$$(16) \quad \begin{aligned} \gamma_{ik}(x, \xi) &= \xi_i(x) (\xi_k(x) + \xi_{kr}(x) (\xi^r - x^r) + \dots) \\ &= g_{ik}(x) + \Gamma_{kr}^i g_{ri} (\xi^r - x^r) + \dots \\ \gamma_{ik}(0, \xi) &= \delta_{ik} + \dots, \end{aligned}$$

wobei die Restfunktionen mindestens quadratisch in den $(\xi^r - x^r)$ bzw. ξ^r sind. Wir wollen für die weiteren Rechnungen noch vereinbaren, daß alle differentialgeometrischen Größen⁴⁾ nur von (x) abhängen. Es verhält sich

$$(17) \quad \xi_i(x) (n(x) \times \xi_k(\xi)) = -n(x) (\xi_i(x) \times \xi_k(\xi)) = A_{ik}(x, \xi)$$

in der Umgebung von $(x) = (\xi)$ wie

$$(18) \quad -n(x) [\xi_i(x) \times (\xi_k + \xi_{kr} (\xi^r - x^r) + \dots)].$$

Führen wir $\alpha_{ik} = -\alpha_{ik}$ durch

$$(19) \quad n(x) (\xi_i(x) \times \xi_k(x)) = \sqrt{g} \alpha_{ik}$$

ein, so wird aus (11)

⁴⁾ Wir meinen damit die in den folgenden Formeln auftretenden Größen g, g_{ik}, L_{ik} usw.

$$(20) \quad \begin{aligned} A_{ik}(x, \xi) &= -\sqrt{g}(\alpha_{ik} + \alpha_{ir} A_{kj}(\xi^j - x^j) + \dots) \\ A_{ik}(0, \xi) &= -\alpha_{ik} + \dots, \end{aligned}$$

wobei auch hier die höheren Glieder mindestens quadratisch in den ξ^j bzw. $(\xi^j - x^j)$ sind.

Wir untersuchen weiterhin

$$(21) \quad \nabla' \frac{1}{r} = \nabla' \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|} = -\frac{\xi(x) - \xi(\xi)}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3}.$$

Hier ist

$$(22) \quad |\xi(x) - \xi(\xi)|^2 = g_{ik}(\xi^i - x^i)(\xi^k - x^k) + \dots$$

und es wird auf F

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} &= n \nabla' \frac{1}{r} = -\frac{n(\xi(x) - \xi(\xi))}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3} \\ &= \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3} (L_{ik}(\xi^i - x^i)(\xi^k - x^k) + \dots). \end{aligned}$$

In der Umgebung von P ist

$$(24) \quad |\xi(0) - \xi(\xi)|^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots,$$

so daß dort

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{r} = \frac{L_{ik} \xi^i \xi^k}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{3/2}} + \dots$$

wird. Die Glieder

$$(26) \quad (n(x) \xi_i(\xi)) \left(\xi_k(x) \nabla' \frac{1}{r} \right)$$

liefern auf Grund der gleichen Rechnungen

$$(27) \quad \begin{aligned} & - (n(x) \xi_i(\xi)) \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3} [\xi_k(x) (\xi^i(x) - \xi^i(\xi))] \\ &= \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3} (L_{ij} g_{ki}(\xi^j - x^j)(\xi^k - x^k) + \dots), \end{aligned}$$

so daß für $(x) = (0)$

$$(28) \quad (n(0) \xi_i(\xi)) \left(\xi_k(0) \nabla' \frac{1}{r} \right) = \frac{L_{ij} \xi^j \xi^k}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{3/2}} + \dots$$

wird. Schließlich untersuchen wir noch die Ausdrücke

$$(29) \quad \begin{aligned} & \xi_i(x) \{ n(x) \times (\xi_k(\xi) \nabla) \nabla |\xi(x) - \xi(\xi)| \} = \\ &= -\xi_i(x) \{ n(x) \times \nabla' (\xi_k(\xi) \nabla |\xi(x) - \xi(\xi)|) \} \\ &= \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|} \xi_i(x) (n(x) \times \xi_k(\xi)) \\ & \quad - \frac{1}{|\xi(x) - \xi(\xi)|^3} [\xi_i(x) (n(x) \times (\xi(\xi) - \xi(x)))] [\xi_k(\xi) (\xi(\xi) - \xi(x))] \end{aligned}$$

und erhalten für die Umgebung der Stelle $(x) = (0) = (\xi)$

$$(30) \quad \begin{aligned} & \xi_i(x) \{ n(x) \times (\xi_k(\xi) \nabla) \nabla |\xi(x) - \xi(\xi)| \} \\ &= \frac{-1}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{3/2}} \left(\alpha_{ik} - \frac{\alpha_{ij} \xi^j \xi^k}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Damit sind wir nun in der Lage, unser Integralgleichungssystem zu diskutieren. Zur Abkürzung schreiben wir für (1, 51)

$$(31) \quad j^i(x) = \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} j_s^i + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F [K_r^i(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^i(x, \xi) \tilde{j}^r(\xi)] dF_\xi.$$

wobei

$$(32) \quad \begin{aligned} K_r^i &= g^{ij}(x) \xi_j(x) [n(x) \times \xi_r(\xi) \times \nabla'(\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] \\ P_r^i &= \frac{i}{\omega} g^{ij}(x) \xi_j(x) [n(x) \times \xi_r(\xi)] (k_i^2 \varphi_i - k_a^2 \varphi_a) \\ &\quad - \frac{i}{\omega} g^{ij}(x) \xi_j(x) [n(x) \times \xi_r(\xi) \nabla'(\varphi_a - \varphi_i)] \end{aligned}$$

ist. In der Umgebung der Stelle $(x) = (0) = (\xi)$ wird

$$(33) \quad K_r^i(0, \xi) = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} (\delta_r^i L_{jc}(0) \xi^j \xi^c - L_{rj}(0) \xi^j \xi^i + \dots)$$

sowie

$$(34) \quad \begin{aligned} P_r^i(0, \xi) &= \frac{1}{2\omega} (k_i^2 - k_a^2) \frac{\alpha_r^i}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} \\ &\quad + \frac{i}{2\omega} (k_i^2 - k_a^2) \frac{\alpha_i^j \xi^j \xi^r}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} + \dots \end{aligned}$$

wobei

$$(35) \quad \alpha_r^i = \delta^{ij} \alpha_{jr}; \quad \alpha_i^1 = 1; \quad \alpha_i^2 = -1; \quad \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 0$$

ist.

Entsprechend wird aus (1,52)

$$(36) \quad j^i(x) = \frac{2\mu_a}{\mu_i + \mu_a} j_s^i(x) + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [K_r^i(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^i(x, \xi) \tilde{j}^r(\xi)] dF_\xi$$

mit

$$(37) \quad K_r^i(x, \xi) = P_r^i(x, \xi)$$

und

$$(38) \quad P_r^i(x, \xi) = -g^{ij}(x) \xi_j(x) [n(x) \times \xi_r(\xi) \times \nabla'(\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i)],$$

wobei wir in der Umgebung von $(\xi) = (x) = (0)$ bis auf höhere Glieder

$$(39) \quad \begin{aligned} K_r^i(x, \xi) &= -\frac{i}{2\omega} (k_i^2 - k_a^2) \frac{\alpha_r^i}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} \\ &\quad + \frac{i}{2\omega} (k_i^2 - k_a^2) \frac{\alpha_i^j \xi^j \xi^r}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} + \dots \end{aligned}$$

$$(40) \quad P_r^i(x, \xi) = -\frac{\mu_i - \mu_a}{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^{1/2}} (\delta_r^i L_{jc}(0) \xi^j \xi^c - L_{rj}(0) \xi^j \xi^i + \dots)$$

erhalten. Nach Wahl einer beliebigen Einteilung unserer Fläche in endlich viele analytische Flächenelemente stellen daher (1,51) und (1,52) ein System von Integralgleichungen dar, dessen Kernmatrix höchstens wie $\frac{1}{r}$ singular wird. Nach bekannten Sätzen kann dann noch FREDHOLM-HILBERTSche Theorie angewandt werden, und

$$(41) \quad j^s(x) = \frac{2\epsilon_a}{\epsilon_i + \epsilon_a} j^s_e(x) + \frac{1}{2\pi(\epsilon_i + \epsilon_a)} \int_P [K_r^s(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^s(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi$$

$$j^s(x) = \frac{2\mu_a}{\mu_i + \mu_a} j^s_e(x) + \frac{1}{2\pi(\mu_i + \mu_a)} \int_P [K_r^s(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^s(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi$$

besitzt demnach stets eine eindeutige Lösung, wenn es keine Eigenlösung j^s_e, j^s_e des homogenen Systems

$$(42) \quad j^s_e(x) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_i + \epsilon_a)} \int_P [K_r^s(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^s(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi$$

$$j^s_e(x) = \frac{1}{2\pi(\mu_i + \mu_a)} \int_P [K_r^s(x, \xi) j^r(\xi) + P_r^s(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi$$

gibt.

Zur eingehenden Untersuchung der Singularitäten benutzen wir nun zu einem beliebigen Punkt P das schon erwähnte Tangenten-Normalsensystem. Es bezeichne $\Phi(x, \xi)$ eine der Funktionen $P_r^s(x, \xi)$, $P_r^s(x, \xi)$, $K_r^s(x, \xi)$, $K_r^s(x, \xi)$. Ist K_c eine Kugel vom Radius c um P und

$$(43) \quad |\xi|^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2; \quad \xi^3 = F(\xi^1, \xi^2),$$

so ergibt sich aus den Entwicklungen (33), (34) und (39), (40), daß für die in K_c gelegenen Punkte (x) und (ξ) von F mit den Abkürzungen (47)

$$(44) \quad |\Phi(x, \xi)| \leq \frac{D}{|x - \xi|}$$

ist. Setzen wir

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi = \Phi_{,i},$$

so wird gleichmäßig für (x) und (ξ)

$$(46) \quad |\Phi_{,i}(x, \xi)| \leq \frac{D}{|x - \xi|^2},$$

wobei D in (44) und (46) sowie in allen folgenden Abschätzungen nicht dieselbe Konstante bezeichnen muß. Ist

$$(47) \quad \begin{aligned} |x - \xi|^2 &= (x^1 - \xi^1)^2 + (x^2 - \xi^2)^2 + (x^3 - \xi^3)^2 \\ |x|^2 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \end{aligned}$$

so wird

$$(48) \quad \frac{1}{|x|} |\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)| \leq \frac{D}{|\xi|} \left(\frac{1}{|x - \xi|} + \frac{1}{|\xi|} \right).$$

Zum Beweise dieser Ungleichung bemerken wir, daß die Singularitäten von $\Phi(x, \xi)$ durch die Funktionen

$$(49) \quad \frac{1}{|x - \xi|} \quad \text{oder} \quad \frac{(x^j - \xi^j)(x^j - \xi^j)}{|x - \xi|^3}$$

dargestellt werden können. Nun ist

$$(50) \quad \left| \frac{1}{|x|} \left(\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{|\xi|} \right) \right| = \left| \frac{|x - \xi|^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2 \cdot |\xi| \cdot |x| (|x - \xi| + |\xi|)} \right| \leq \frac{1}{|\xi| \cdot |x - \xi|}.$$

Wir setzen

$$(51) \quad \frac{(x^j - \xi^j)(x^j - \xi^j)}{|x - \xi|^3} = \frac{1}{|x - \xi|} B^{jj}(x, \xi)$$

mit

$$(52) \quad |B^{jl}(x, \xi)| \leq 1.$$

Nun wird

$$(53) \quad B^{jl}(x, \xi) - B^{jl}(0, \xi) = \frac{D^{jl}(x, \xi)}{|\xi|^3 |x - \xi|^3},$$

wobei

$$(54) \quad \begin{aligned} D^{jl}(x, \xi) &= \left| \frac{\xi^j \xi^l}{x - \xi} - \frac{\xi^j \xi^l}{x - \xi} \right| \\ &= \left| \frac{\xi^j \xi^l}{x - \xi} - \frac{\xi^j \xi^l}{x - \xi} \right| \end{aligned}$$

ist. Hieraus ergibt sich

$$(55) \quad \frac{1}{|x|} \left| \frac{D^{jl}(x, \xi)}{|\xi|^3 |x - \xi|^3} \right| \leq 2 \frac{|\xi| + |x - \xi|}{|\xi|^3},$$

und wir erhalten

$$(56) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{|x|} \left| \frac{1}{|x - \xi|} B^{jl}(x, \xi) - \frac{1}{|\xi|} B^{jl}(0, \xi) \right| \\ &\leq \frac{1}{|x|} \frac{1}{|x - \xi|} |B^{jl}(x, \xi) - B^{jl}(0, \xi)| + \frac{1}{|x|} \left| \frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{|\xi|} \right| \end{aligned}$$

$$(57) \quad \leq 2 \left(\frac{1}{|\xi|} \frac{1}{|x - \xi|} + \frac{1}{|\xi|^3} \right).$$

Da die restlichen Bestandteile von $\Phi(x, \xi)$ samt ihren Ableitungen höchstens von der Ordnung $\frac{1}{|x - \xi|}$ singulär werden, erhalten wir (48).

Da F analytisch vorausgesetzt wurde, ist

$$(58) \quad \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) dF_\xi$$

als Funktion von (x) betrachtet nach Sätzen der Potentialtheorie [3] in einer Umgebung von P analytisch, wenn $F^*(c)$ den in der Kugel K_c enthaltenen Teil von F darstellt.

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich nun einige Hilfssätze

Lemma 1: Ist $K(x, \tau)$ eine Kugel vom Radius τ um (x) und $F^*(x, \tau)$ der in $K(x, \tau)$ gelegene Teil von F , so gibt es eine Konstante A so, daß für

$$|x| \leq A; \quad \tau \leq A$$

mit stetigem $f(\xi)$

$$\int_{F^*(x, \tau)} |\Phi(x, \xi)| dF_\xi \leq D \tau$$

ist.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Eigenschaft (44).

Lemma 2: Ist $f(\xi)$ in F stetig, so genügt

$$\int \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi$$

in P einer HÖLDER-Bedingung.

Liegt nämlich (ξ) außerhalb einer Kugel $K(\tau)$ und ist

$$(59) \quad |x| \leq \alpha \tau < \tau,$$

so ergibt sich nach dem Mittelwertsatz aus der Darstellung der Elemente unserer Kernmatrix

$$(60) \quad |\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)| \leq \frac{D|x|}{\tau^2},$$

und es wird

$$(61) \quad \left| \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(c)} \Phi(0, \xi) f(\xi) dF_\xi \right| \leq A \int_{F^*(c)-F^*(\tau)} |\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)| dF_\xi + A \int_{F^*(\tau)} |\Phi(x, \xi)| dF_\xi + A \int_{F^*(\tau)} |\Phi(0, \xi)| dF_\xi.$$

Nun ist $F_K(\tau)$ ganz in $F_K(x, 2\tau)$ enthalten, so daß nach Lemma 1

$$(62) \quad \int_{F^*(\tau)} |\Phi(x, \xi)| dF_\xi \leq \int_{F^*(x, 2\tau)} |\Phi(x, \tau)| dF_\xi \leq D\tau$$

wird, und aus Gl. (61) wegen (60)

$$(63) \quad \left| \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(c)} \Phi(0, \xi) f(\xi) dF_\xi \right| \leq D \left(\frac{|x|}{\tau^2} + \tau \right)$$

entsteht. Setzen wir daher

$$(64) \quad |\tau| = |x|^{1/2},$$

so ergibt sich für

$$(65) \quad |x| < \alpha^{1/2}$$

schließlich

$$(66) \quad \left| \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(c)} \Phi(0, \xi) f(\xi) dF_\xi \right| \leq D|x|^{1/2}.$$

Wir benötigen noch die Differenzierbarkeit des in Lemma 2 untersuchten Integrals und beweisen nun

Lemma 3: Ist $f(\xi)$ in $F^*(\tau)$ stetig und genügt in P einer HÖLDER-Bedingung, so ist

$$\int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi$$

in P differenzierbar.

Zum Beweise setzen wir

$$(67) \quad \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi = f(0) \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) dF_\xi + \int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) (f(\xi) - f(0)) dF_\xi.$$

Nach den Ausführungen zu (58) ist das erste Integral analytisch. Für das zweite Integral bilden wir mit

$$(68) \quad |x| \leq \alpha\tau < \tau; \quad f_0(\xi) = f(\xi) - f(0)$$

$$(69) \quad \int_{F^*(c)} \frac{1}{|x|} (\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)) f_0(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(c)} \Phi_{11}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi$$

und wollen (x) auf einer fest gewählten, analytischen Kurve durch P , die die ξ^1 -Achse dort zur Tangente hat, gegen P gehen lassen. Es ist auf Grund des Mittelwertsatzes

$$(70) \quad \left| \int_{F^*(c)-F^*(\tau)} \frac{1}{|x|} (\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)) - \Phi_{11}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq \frac{D|x|}{\tau^2}.$$

Wir nehmen $\delta < 1$ an⁵⁾. Wegen

$$(71) \quad |f_0(\xi)| \leq D |\xi|^\delta$$

ergibt sich aus (45) dann

$$(72) \quad \left| \int_{F^*(\tau)} \Phi_{1i}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq D \tau^\delta$$

sowie

$$(73) \quad \left| \int_{F^*(\tau)} \frac{1}{|x|} (\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq D \int_{F^*(\tau)} |\xi|^\delta \left(\frac{1}{|\xi| \cdot |\xi - x|} + \frac{1}{|\xi|^\delta} \right) dF_\xi.$$

Nun ist mit den Bezeichnungen von Lemma 1

$$(74) \quad \int_{F^*(\tau)} |\xi|^\delta \frac{dF}{|\xi| \cdot |x - \xi|} \leq \int_{F^*(x, 2\tau)} |\xi|^\delta \frac{dF}{|\xi| \cdot |x - \xi|},$$

und daraus wird wegen $\delta < 1$ und

$$(75) \quad |\xi| \geq ||x - \xi| - |x||$$

$$(76) \quad \left| \int_{F^*(\tau)} |\xi|^\delta \frac{dF}{|\xi| \cdot |x - \xi|} \right| \leq \int_{F^*(x, 2\tau)} ||x - \xi| - |x||^{\delta-1} |x - \xi|^{-1} dF,$$

$$\leq D' \int_0^{2\tau} ||x - \xi| - |x||^{\delta-1} d_\xi |x - \xi| \leq D \tau^\delta,$$

wobei sich die letzte Abschätzung durch Einführung von Polarkoordinaten mit (x) als Ursprung ergibt. Es wird daher schließlich

$$(77) \quad \left| \int_{F^*(\epsilon)} \frac{1}{|x|} (\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)) f_0(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(\epsilon)} \Phi_{1i}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq D \left(\frac{|x|}{\tau^\delta} + \tau^\delta \right).$$

Für

$$(78) \quad \tau = |x|^{1/\delta}$$

und

$$(79) \quad |x| < \alpha^{1/\delta}$$

ergibt sich daher

$$(80) \quad \left| \int_{F^*(\epsilon)} \frac{1}{|x|} [\Phi(x, \xi) - \Phi(0, \xi)] f_0(\xi) dF_\xi - \int_{F^*(\epsilon)} \Phi_{1i}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq D |x|^\gamma$$

mit $\gamma = \delta/4$, so daß auch das zweite Integral in (67) in P differenzierbar ist und sich Lemma 3 ergibt.

Wir können über die Ableitung noch mehr aussagen und führen zur Abkürzung

$$(81) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{F^*(\tau)} \Phi(x, \xi) dF_\xi = H_i(x; \tau)$$

ein. Es wird in P nach (80)

$$(82) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{F^*(\tau)} \Phi(x, \xi) f_0(\xi) dF_\xi = \int_{F^*(\tau)} \Phi_{1i}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi.$$

⁵⁾ Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Genügt nämlich $f_0(\xi)$ einer HÖLDER-Bedingung mit $\delta \geq 1$, so genügt diese Funktion erst recht einer Hölderbedingung mit $\delta < 1$.

Mit (72) ergibt sich daher in $P((x) = (0))$

$$(83) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{F^*(\tau)} \Phi(x, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| = \left| \int_{F^*(\tau)} \Phi_{,i}(0, \xi) f_0(\xi) dF_\xi \right| \leq D \tau^d.$$

Wir beweisen nun

Lemma 4: Genügt $f(\xi)$ in allen Punkten von F einer HÖLDER-Bedingung, so genügen auch die ersten Ableitungen von

$$\int_{F^*(c)} \Phi(x, \xi) f(\xi) dF_\xi$$

HÖLDER-Bedingungen.

Zum Beweise setzen wir

$$(84) \quad |x| \leq \alpha \tau < \tau$$

und

$$(85) \quad \frac{\partial}{\partial y^i} \int_{F^*(c)} \Phi(y, \xi) dF_\xi = K_i(y).$$

Dann ist an der Stelle $(y) = (x)$

$$(86) \quad \frac{\partial}{\partial y^i} \int_{F^*(c)} \Phi(y, \xi) f(\xi) dF_\xi = \underbrace{f(x) K_i(x)}_{(x)=(y)} + \int_{F^*(c)-F^*(\tau)} \Phi_{,i}(x, \xi) (f(\xi) - f(x)) dF_\xi + \int_{F^*(\tau)} \Phi_{,i}(x, \xi) (f(\xi) - f(x)) dF_\xi,$$

und es ergibt sich für die Differenz der Ableitungen an den Stellen (x) und (0)

$$(87) \quad \begin{aligned} & f(x) K_i(x) - f(0) K_i(0) + \int_{F^*(c)-F^*(\tau)} \Phi_{,i}(x, \xi) (f(\xi) - f(x)) dF_\xi \\ & - \int_{F^*(c)-F^*(\tau)} \Phi_{,i}(0, \xi) (f(\xi) - f(0)) dF_\xi + \\ & + \int_{F^*(\tau)} \left[\Phi_{,i}(x, \xi) (f(\xi) - f(x)) - \Phi_{,i}(0, \xi) (f(\xi) - f(0)) \right] dF_\xi. \end{aligned}$$

Ist nun

$$(88) \quad |f(x) - f(0)| \leq D |x|^d,$$

so ist auch

$$(89) \quad |f(x) K_i(x) - f(0) K_i(0)| \leq D |x|^d,$$

da $K_i(x)$ analytisch ist. Andererseits ist nach (83)

$$(90) \quad \left| \int_{F^*(\tau)} \Phi_{,i}(x, \xi) \cdot (f(\xi) - f(x)) dF_\xi \right| \leq D \tau^d; \quad \left| \int_{F^*(\tau)} \Phi_{,i}(0, \xi) (f(\xi) - f(0)) dF_\xi \right| \leq D \tau^d,$$

da P keine Ausnahmestellung einnimmt und wir (83) auch im Punkte (x) anwenden können. Genügt nämlich $f(\xi)$ überall in $F^*(c)$ einer HÖLDER-Bedingung, so läßt sich zu einer abgeschlossenen Umgebung von P auch eine HÖLDER-Bedingung angeben, der $f(\xi)$ gleichmäßig genügt.

Für (ξ) in $F^*(c) - F^*(\tau)$ ist nach dem Mittelwertsatz

$$(91) \quad |\Phi_{,i}(x, \xi) - \Phi_{,i}(0, \xi)| \leq \frac{D |x|}{\tau^d},$$

so daß

$$(92) \leq \left| \frac{\int_{F^*(e)-F^*(r)} \Phi_{1i}(x, \xi) (f(\xi) - f(x)) dF - \int_{F^*(e)-F^*(r)} \Phi_{1i}(0, \xi) (f(\xi) - f(0)) dF}{F^*(e)-F^*(r)} \right| \\ + \left| \frac{\int_{F^*(e)-F^*(r)} (\Phi_{1i}(x, \xi) - \Phi_{1i}(0, \xi)) (f(\xi) - f(x)) dF}{F^*(e)-F^*(r)} \right| + |f(x) - f(0)| \int_{F^*(e)-F^*(r)} |\Phi_{1i}(0, \xi)| dF \\ \leq D \frac{|x|}{\tau^3} + D \frac{|x|^{1/2}}{\tau^3}$$

wird. Setzen wir nun

$$(93) \quad \tau = |x|^{1/2},$$

so wird der Betrag der Differenz der Ableitungen an den Stellen (x) und (0) für

$$(94) \quad |x| \leq \alpha^{1/2}$$

kleiner als $D|x|^\gamma$ mit $\gamma = \min\left(\frac{1}{12}, \frac{\delta}{8}\right) > 0$.

Da wir diese Betrachtung in jedem Punkt von F durchführen können, erhalten wir

Satz 1: Jede Eigenlösung des Systems von Integralgleichungen (42) ist differenzierbar und ihre Ableitungen genügen HÖLDER-Bedingungen.

Aus der FREDHOLM-HILBERTSchen Theorie ergibt sich nämlich, daß die Eigenlösungen stetig sind. Dann folgt aber nach Lemma 2, daß die Eigenfunktionen HÖLDER-Bedingungen genügen. Aus Lemma 4 folgt die Behauptung.

Da die Ableitungen der Eigenlösungen in allen Punkten einer abgeschlossenen Punktmenge, der Fläche F , HÖLDER-Bedingungen genügen, können wir die Konstanten der HÖLDER-Bedingung so wählen, daß die mit ihnen formulierte Bedingung in allen Punkten von F gleichmäßig erfüllt wird.

Analog erhalten wir

Satz 2: Sind j und j' stetige Lösungen des inhomogenen Systems (41) mit zweimal differenzierbaren j_e und j'_e , so existieren auch ihre ersten Ableitungen, und diese genügen auf F gleichmäßig HÖLDER-Bedingungen.

Nach Lemma 2 genügt nämlich

$$(95) \quad j - \frac{2\mu_a}{\mu_i + \mu_a} j_e \quad \text{und} \quad j' - \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} j'_e$$

jeweils einer HÖLDER-Bedingung. Da j_e und j'_e zweimal differenzierbar sind, genügen somit auch j und j' HÖLDER-Bedingungen. Aus Lemma 3 und Lemma 4 folgt dann, daß die in (95) genannten Ausdrücke differenzierbar sind und ihre Ableitungen HÖLDER-Bedingungen genügen. Daraus folgt aber wegen der zweimaligen Differenzierbarkeit von j_e und j'_e die Behauptung.

3. Der Existenzbeweis.

Wir beweisen

Satz 3: Es gibt keine Eigenlösungen des Integralgleichungssystems

$$j_0^k(x) = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \int_F [K_r^k(x, \xi) j'^r(\xi) + P_r^k(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi \\ j_0^k(x) = \frac{1}{2\pi(\mu_i + \mu_a)} \int_F [K_r^k(x, \xi) j'^r(\xi) + P_r^k(x, \xi) j^r(\xi)] dF_\xi$$

für endliche $\varepsilon_i, \varepsilon_a; \mu_i, \mu_a$.

Zum Beweise gehen wir zum Ausgangspunkt unseres Integralgleichungssystems zurück und setzen

$$(1) \quad \mathbf{j}_0 = j_0^k \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{j}'_0 = j_0'^k \mathbf{e}_k; \quad \nabla_F \mathbf{j}_0 = i \omega \varrho_0; \quad \nabla_F \mathbf{j}'_0 = i \omega \varrho'_0.$$

Dann können wir außerhalb V (in V_a) ein Feld

$$(2) \quad \mathbb{E}_a^0 = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \mu_i \varphi_i \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}'_0 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_0 \nabla \varphi_i] dF$$

$$(3) \quad \mathbb{H}_a^0 = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \varepsilon_i \varphi_i \mathbf{j}'_0 + \mathbf{j}_0 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_0 \nabla \varphi_i] dF$$

und in V ein Feld

$$(4) \quad \mathbb{E}_i^0 = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \mu_a \varphi_a \mathbf{j}_0 - \mathbf{j}'_0 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_0 \nabla \varphi_a] dF$$

$$(5) \quad \mathbb{H}_i^0 = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \varepsilon_a \varphi_a \mathbf{j}'_0 + \mathbf{j}_0 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_0 \nabla \varphi_a] dF$$

bilden. Da die $\mathbf{j}_0, \mathbf{j}'_0$ differenzierbar sind und ihre Differentialquotienten gleichmäßig HÖLDER-Bedingungen genügen, sind die Felder $\mathbb{E}_a^0, \mathbb{H}_a^0$ und $\mathbb{E}_i^0, \mathbb{H}_i^0$ auf Grund der laufend benutzten Sätze der Potentialtheorie [4] stetig auf F , wenn sie dort durch den Grenzübergang auf der Normalen definiert werden. Unser Integralgleichungssystem ist dann gleichbedeutend mit

$$(6) \quad \varepsilon_a (n \times \mathbb{E}_i^0)_F = \varepsilon_i (n \times \mathbb{E}_a^0)_F$$

$$(7) \quad \mu_a (n \times \mathbb{H}_i^0)_F = \mu_i (n \times \mathbb{H}_a^0)_F,$$

wobei durch den Index F angedeutet werden soll, daß es sich um die Werte auf der Fläche F handelt; n weist dabei ins Äußere von F . Es genügt $\mathbb{E}_i^0, \mathbb{H}_i^0$ in V den Gleichungen

$$(8) \quad \nabla \times \mathbb{H}_i^0 + i \omega \varepsilon_a \mathbb{E}_i^0 = 0; \quad \nabla \times \mathbb{E}_i^0 - i \omega \mu_a \mathbb{H}_i^0 = 0$$

sowie $\mathbb{E}_a^0, \mathbb{H}_a^0$ in V_a

$$(9) \quad \nabla \times \mathbb{H}_a^0 + i \omega \varepsilon_i \mathbb{E}_a^0 = 0; \quad \nabla \times \mathbb{E}_a^0 - i \omega \mu_i \mathbb{H}_a^0 = 0.$$

Für $\mathbb{E}_a^0, \mathbb{H}_a^0$ gelten darüber hinaus die Ausstrahlungsbedingungen mit ε_i, μ_i . Für (8) können wir auch schreiben

$$(10) \quad \nabla \times (\mu_a \mathbb{H}_i^0) + i \omega \mu_a (\varepsilon_a \mathbb{E}_i^0) = 0; \quad \nabla \times (\varepsilon_a \mathbb{E}_i^0) - i \omega \varepsilon_a (\mu_a \mathbb{H}_i^0) = 0$$

und für (9)

$$(11) \quad \nabla \times (\mu_i \mathbb{H}_a^0) + i \omega \mu_i (\varepsilon_i \mathbb{E}_a^0) = 0; \quad \nabla \times (\varepsilon_i \mathbb{E}_a^0) - i \omega \varepsilon_i (\mu_i \mathbb{H}_a^0) = 0.$$

In gleicher Weise lassen sich die Ausstrahlungsbedingungen für $\mathbb{E}_a^0, \mathbb{H}_a^0$ in die Form

$$(12) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R [\omega \mu_i (n \times \varepsilon_i \mathbb{E}_a^0) - k_i (\mu_i \mathbb{H}_a^0)] = \lim_{R \rightarrow \infty} R [\omega \varepsilon_i (n \times \mu_i \mathbb{H}_a^0) + k_i (\varepsilon_i \mathbb{E}_a^0)] = 0$$

bringen. Unser Beweis läuft nun darauf hinaus, die Felder $\varepsilon_a \mathbb{E}_i^0, \mu_a \mathbb{H}_i^0$ in V und $\varepsilon_i \mathbb{E}_a^0, \mu_i \mathbb{H}_a^0$ in V_a zu untersuchen. Bei dieser Betrachtungsweise werden jeweils die Permeabilitäten und Dielektrizitätskonstanten vertauscht. Weil nach unserem Aufbau Permeabilitäten und Dielektrizitätskonstanten den gleichen Einschränkungen unterworfen sind, können wir den Eindeutigkeits-

satz anwenden, da die Tangentialkomponenten der neu bestimmten Felder nach (6) auf F übereinstimmen. Damit folgt

$$(13) \quad \mathcal{E}_a^2 = \mathcal{H}_a^2 = 0; \quad \mathcal{E}_i^2 = \mathcal{H}_i^2 = 0.$$

Dann verschwinden aber auch die Tangentialkomponenten von $\mathcal{E}_a^2, \mathcal{H}_a^2$ und $\mathcal{E}_i^2, \mathcal{H}_i^2$ auf F . Wir setzen das Feld $\mathcal{E}_a^2, \mathcal{H}_a^2$ nun vermittle (4), (5) ins Innere von V fort. Im Äußeren ist das Feld identisch Null. Auf Grund der Sprungrelationen muß dann aber

$$(14) \quad \underbrace{(n \times \mathcal{E}_a^2)}_{F_i} = n \times j_0; \quad \underbrace{(n \times \mathcal{H}_a^2)}_{F_i} = -(n \times j_0)$$

sein, wenn durch diese Schreibweise angedeutet wird, daß es sich um die Grenzwerte bei Annäherung an den Rand auf der inneren Normalen handelt. Eine entsprechende Beziehung gilt für $\mathcal{E}_i^2, \mathcal{H}_i^2$. Dies Feld wird vermittle (12), (13) ins Äußere von V fortgesetzt und genügt dort vermöge seiner Darstellung den Ausstrahlungsbedingungen mit ε_a und μ_a . Hier ist mit den Bezeichnungen von (14)

$$(15) \quad \underbrace{(n \times \mathcal{E}_i^2)}_{F_a} = -(n \times j_0); \quad \underbrace{(n \times \mathcal{H}_i^2)}_{F_a} = n \times j_0.$$

Bilden wir nun ein Feld dadurch, daß wir (2) und (3) im Inneren von V ausrechnen und für das Äußere von V das Negative von (4) und (5) wählen, so erhalten wir ein Feld, das im Äußeren den MAXWELLSchen Gleichungen mit ε_a, μ_a und im Inneren den MAXWELLSchen Gleichungen mit ε_i, μ_i genügt. Im Äußeren gelten dabei auch die Ausstrahlungsbedingungen mit ε_a, μ_a . Es ist nach (14), (15)

$$(16) \quad n(\underbrace{\mathcal{E}_a^2}_{F_a} \times \underbrace{\mathcal{H}_i^2}_{F_i}) = n(\underbrace{\mathcal{E}_i^2}_{F_i} \times \underbrace{\mathcal{H}_a^2}_{F_a}),$$

da sich die Vorzeichenunterschiede im Produkt aufheben. Die Schlußweise des Eindeutigkeitsatzes fordert auch hier

$$(17) \quad \mathcal{E}_i^2 = \mathcal{H}_i^2 = 0 \text{ in } V_a; \quad \mathcal{E}_a^2 = \mathcal{H}_a^2 = 0 \text{ in } V.$$

Aus den vorausgegangenen Überlegungen ergab sich, daß auch in V_a $\mathcal{E}_a^2 = \mathcal{H}_a^2 = 0$ ist. Das Feld (2), (3) verschwindet demnach identisch. Dann muß wegen der Sprungrelationen auch $j_0 = j_0' = 0$ sein.

Es gibt also unter den in Satz 2 genannten Bedingungen keine Eigenlösungen des Integralgleichungssystems.

Damit ist dann auch die Existenz der Lösung des Integralgleichungssystems nach den FREDHOLM-HILBERTSchen Sätzen bewiesen. Es bleibt uns abschließend noch zu zeigen, daß damit unsere Aufgabe gelöst ist. Das heißt, wir zeigen, daß die vier Gleichungen (1,32), (1,33); und (1,34), (1,35) mit den beiden Gleichungen (1,51) und (1,52) äquivalent sind. Dazu bilden wir analog zu den vorausgegangenen Überlegungen zwei Felder

$$(18) \quad \mathcal{E}_a = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \mu_i i \varphi_i - j' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dF$$

$$(19) \quad \mathcal{H}_a = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \varepsilon_i j' \varphi_i + j \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dF$$

sowie

$$(20) \quad \mathfrak{E}_i = -\mathfrak{E}_e + \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i\omega\mu_a j \varphi_a - j' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF$$

$$(21) \quad \mathfrak{H}_i = -\mathfrak{H}_e + \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i\omega\varepsilon_a j' \varphi_a + j \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF,$$

wobei j und j' die Lösungen j_i, j'_i des Integralgleichungssystems (1,51); (1,52) sind. Nach (1,50) ist

$$(22) \quad \varepsilon_a \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{E}_i} = \varepsilon_i \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{E}_a}$$

und entsprechend

$$(23) \quad \mu_a \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{H}_i} = \mu_i \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{H}_a}.$$

Im Äußeren von V genügen \mathfrak{E}_a und \mathfrak{H}_a den Gleichungen

$$(24) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_a + i\omega\varepsilon_i \mathfrak{E}_a = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{E}_a - i\omega\mu_i \mathfrak{H}_a = 0,$$

und im Inneren von V gilt

$$(25) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_i + i\omega\varepsilon_a \mathfrak{E}_i = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{E}_i - i\omega\mu_a \mathfrak{H}_i = 0.$$

Darüber hinaus genügt $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ den Ausstrahlungsbedingungen mit ε_i und μ_i . Bilden wir nun wieder (vgl. 10 ff.)

$$(26) \quad \mathfrak{E}_a^* = \varepsilon_i \mathfrak{E}_a; \quad \mathfrak{H}_a^* = \mu_i \mathfrak{H}_a; \quad \mathfrak{E}_i^* = \varepsilon_a \mathfrak{E}_i; \quad \mathfrak{H}_i^* = \mu_a \mathfrak{H}_i;$$

so genügen auch diese Felder MAXWELLSchen Gleichungen, Ausstrahlungsbedingungen, und es ist

$$(27) \quad \begin{aligned} \text{in } V: \quad & \nabla \times \mathfrak{H}_i^* + i\omega\mu_a \mathfrak{E}_i^* = \nabla \times \mathfrak{E}_i^* - i\omega\varepsilon_a \mathfrak{H}_i^* = 0 \\ \text{in } V_a: \quad & \nabla \times \mathfrak{H}_a^* + i\omega\mu_i \mathfrak{E}_a^* = \nabla \times \mathfrak{E}_a^* - i\omega\varepsilon_i \mathfrak{H}_a^* = 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der schon benutzten, an den Eindeutigkeitsbeweis angeschlossenen Überlegungen können wir wiederum

$$(28) \quad \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{H}_a} = \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{E}_a} = \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{H}_i} = \underset{\rightarrow}{n \times \mathfrak{E}_i} = 0$$

folgern. Dies sind aber die Gleichungen (1,32), (1,33) und (1,34), (1,35). Es bleibt uns noch zu zeigen, daß wir durch die Bestimmung von j und j' in der Lage sind, das reflektierte und gebrochene Feld anzugeben. Wir untersuchen zunächst das Feld (18) und (19) im Inneren von V . Aus (28) ergibt sich

$$(29) \quad \begin{aligned} & \underset{\rightarrow}{n \times \int_{F_a} [i\omega\mu_i j \varphi_i - j' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dF} = 0 \\ & \underset{\rightarrow}{n \times \int_{F_a} [i\omega\varepsilon_i j' \varphi_i + j \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dF} = 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der Sprungrelationen ist daher

$$(30) \quad \begin{aligned} n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i \omega \mu_i j \varphi_i - j' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dF &= j' \\ \eta \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i \omega \varepsilon_i j' \varphi_i + j \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dF &= -j. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich aus (20), (21) und (28)

$$(31) \quad \begin{aligned} n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i \omega \mu_a j \varphi_a - j' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF &= n \times \mathfrak{E}_s = -j'_s \\ n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i \omega \varepsilon_a j' \varphi_a + j \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF &= n \times \mathfrak{H}_s = j_s \end{aligned}$$

und hieraus auf Grund der Sprungrelationen

$$(32) \quad \begin{aligned} n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i \omega \mu_a j \varphi_a - j' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF &= -j'_s - j' \\ n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i \omega \varepsilon_a j' \varphi_a + j \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF &= j_s + j. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

Satz 4: Sind j und j' die eindeutig bestimmten Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} j &= \frac{2\mu_a}{\mu_i + \mu_a} j_s + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F n \times [j \times \nabla' (\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i)] dF \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [(n \times j') (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j' \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \\ j' &= \frac{2\varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} j'_s - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F n \times [j' \times \nabla (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] dF \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F [(n \times j) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \end{aligned}$$

mit

$$j_s = -n \times \mathfrak{H}_s; \quad j'_s = n \times \mathfrak{E}_s,$$

wobei die Quellen des einfallenden Feldes $\mathfrak{E}_s, \mathfrak{H}_s$ außerhalb des von der analytischen Fläche F berandeten Gebietes V liegen, so ist das gebrochene Feld $\mathfrak{E}_g, \mathfrak{H}_g$ (im Inneren von V) gleich

$$\mathfrak{E}_g = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \mu_i j \varphi_i - j' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dF$$

$$\mathfrak{H}_g = \frac{1}{4\pi} \int_F [i \omega \varepsilon_i j' \varphi_i + j \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dF,$$

während das reflektierte Feld $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{H}_r$ (im Äußeren von V) durch

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_r &= \frac{-1}{4\pi} \int_V [i\omega\mu_a \mathfrak{j} \varphi_a - \mathfrak{j}' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF \\ \mathfrak{H}_r &= \frac{-1}{4\pi} \int_V [i\omega\varepsilon_a \mathfrak{j}' \varphi_a + \mathfrak{j} \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF\end{aligned}$$

dargestellt wird. Die Ladungen ϱ und ϱ' ergeben sich dabei aus den Flächendivergenzen von \mathfrak{j} und \mathfrak{j}' in der Form

$$\nabla_F \mathfrak{j} = i\omega \varrho; \quad \nabla_F \mathfrak{j}' = i\omega \varrho'.$$

Es folgt nämlich aus (30) und (32)

$$\begin{aligned}(33) \quad \mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}_a + \mathfrak{E}_r) &= \mathfrak{j}' = (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_g) \\ \mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}_a + \mathfrak{H}_r) &= -\mathfrak{j} = (\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_g).\end{aligned}$$

Es ist somit das Beugungsproblem durch die Berechnung der Tangentialkomponenten des gebrochenen Feldes $\mathfrak{E}_g, \mathfrak{H}_g$ auf der Grenzfläche der beiden Medien gelöst worden, da auf Grund der Randbedingungen damit auch die Tangentialkomponenten des reflektierten Feldes bestimmt sind. Es lassen sich in dieser Weise auch die praktisch wichtigen Fälle spezieller einfallender Felder behandeln, die in der eingangs formulierten Fassung des Beugungsproblems nicht enthalten sind. Wird das einfallende Feld etwa durch eine ebene Welle — die im Rahmen unserer Theorie als nicht zulässige Idealisierung angesehen werden muß, da sie die Ausstrahlungsbedingungen nicht erfüllt — dargestellt, so können die inhomogenen Bestandteile der Integralgleichung, d. h.

$$(34) \quad \mathfrak{j}_e = -\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_e; \quad \mathfrak{j}'_e = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_e$$

aus den Tangentialkomponenten des einfallenden Feldes gebildet werden, und die reflektierten und gebrochenen Felder ergeben sich wieder aus den Lösungen der oben diskutierten Integralgleichungen. Hier werden die Ausstrahlungsbedingungen vom reflektierten Feld erfüllt. Ebenso lassen sich weitere Spezialfälle, wie die Beugung des Feldes HERTZscher Oszillatoren oder magnetischer Dipole behandeln.

Eine Modifikation des Verfahrens ist notwendig, wenn sich die Quellen der Strahlung im Inneren von V befinden.

Dann bilden wir nämlich

$$\begin{aligned}(35) \quad \mathfrak{E}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega\mu_i \mathfrak{j} \varphi_i - \mathfrak{j}' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dV + \frac{i}{\omega\varepsilon_i} \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathfrak{j} \mathfrak{n}) \nabla \varphi_i dF \\ \mathfrak{H}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega\varepsilon_i \mathfrak{j}' \varphi_i + \mathfrak{j} \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dV + \frac{i}{\omega\mu_i} \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathfrak{j}' \mathfrak{n}) \nabla \varphi_i dF,\end{aligned}$$

wobei \mathfrak{j} und \mathfrak{j}' hier die vorgegebenen Volumenströme darstellen und nicht mit den oben benutzten Flächenströmen zu verwechseln sind. Wir bilden die Flächenströme

$$(36) \quad \mathfrak{j}_e = -\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_e; \quad \mathfrak{j}'_e = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_e.$$

Hier ist nun im Gegensatz zu (1,28) und (1,29)

$$(37) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho'_a \nabla \varphi_i] dF = -j'_e$$

$$(38) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \varepsilon_i j'_e \varphi_i + j_e \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_e \nabla \varphi_i] dF = j_e,$$

während (1,30) und (1,31), sowie (1,34) und (1,35) mit den in Abschnitt 1 eingeführten Bezeichnungen erhalten bleiben. Der wesentliche Unterschied zu den oben durchgeführten Betrachtungen besteht also in der Bildung des einfallenden Feldes, das hier im Inneren von V mit ε_i, μ_i gebildet wird.

Dementsprechend setzen wir hier im Gegensatz zu (1,27)

$$(39) \quad j_a = j_e + j_i \quad j'_a = j'_e + j'_i,$$

und es ergibt sich nach (31) und (32) wegen (1,34) und (1,35)

$$(40) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho'_a \nabla \varphi_i] dF = -j'_e$$

$$(41) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \varepsilon_i j'_a \varphi_i + j_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_a \nabla \varphi_i] dF = j_e,$$

so daß wir analog zu (1,50) mit von (x) abhängigem n

$$(42) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_a n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \mu_a j_a \varphi_a - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho'_a \nabla \varphi_a] dF \\ & - \varepsilon_i n \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a}^{\rightarrow} [i \omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho'_a \nabla \varphi_i] dF \\ & = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{\omega} \int_F (n \times j_a) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j_a \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i) dF \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_F n \times [j'_a \times \nabla (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] dF \end{aligned}$$

erhalten.

Wir finden daher für j_a und j'_a in Analogie zu (1,51) und (1,52) das Integralgleichungssystem

$$(43) \quad \begin{aligned} j'_a &= \frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} j'_e + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F n \times j'_a \times \nabla (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i) dF \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F [(n \times j_a) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j_a \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \end{aligned}$$

und

$$(44) \quad \begin{aligned} j_a &= \frac{2\mu_i}{\mu_a + \mu_i} j_e - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F n \times j_a \times \nabla (\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i) dF \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [(n \times j'_a) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j'_a \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF. \end{aligned}$$

Da es keine Eigenlösung des Integralgleichungssystems gibt, existiert eine eindeutige bestimmte Lösung j_a, j'_a . Um zu zeigen, daß damit das Beugungsproblem gelöst ist, bilden wir im Inneren von V

$$(45) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}_i &= \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_a j_a \varphi_a - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_a \nabla \varphi_a] dV \\ \mathfrak{H}_i &= \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \varepsilon_a j'_a \varphi_a + j_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_a \nabla \varphi_a] dV \end{aligned}$$

und außerhalb

$$(46) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= \mathfrak{E}_i + \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_a \nabla \varphi_i] dV \\ \mathfrak{H}_a &= \mathfrak{H}_i + \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \varepsilon_i j'_a \varphi_i + j_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_a \nabla \varphi_i] dV. \end{aligned}$$

Dann ist in V

$$(47) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_i + i\omega \varepsilon_a \mathfrak{E}_i = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{E}_i - i\omega \mu_a \mathfrak{H}_i = 0$$

und außerhalb V

$$(48) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_a + i\omega \varepsilon_i \mathfrak{E}_a = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{E}_a - i\omega \mu_i \mathfrak{H}_a = 0,$$

während $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{H}_i$ den Ausstrahlungsbedingungen mit ε_i und μ_i genügt.

$$(49) \quad \varepsilon_a (n \times \mathfrak{E}_i) = \varepsilon_i (n \times \mathfrak{E}_a); \quad \mu_a (n \times \mathfrak{H}_i) = \mu_i (n \times \mathfrak{H}_a),$$

so daß die Felder

$$(50) \quad \mathfrak{E}_i^* = \varepsilon_a \mathfrak{E}_i; \quad \mathfrak{H}_i^* = \mu_a \mathfrak{H}_i; \quad \mathfrak{E}_a^* = \varepsilon_i \mathfrak{E}_a; \quad \mathfrak{H}_a^* = \mu_i \mathfrak{H}_a$$

die Voraussetzungen unseres Eindeutigkeitsatzes erfüllen und

$$(51) \quad n \times \mathfrak{E}_i = n \times \mathfrak{H}_i = n \times \mathfrak{E}_a = n \times \mathfrak{H}_a = 0$$

ist. Es wird daher

$$(52) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_a j_a \varphi_a - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_a \nabla \varphi_a] dV = 0$$

und auf Grund der Sprungrelationen

$$(53) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_a j_a \varphi_a - j'_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_a \nabla \varphi_a] dV = -j'_a.$$

Entsprechend wird

$$(54) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_a \nabla \varphi_i] dV = -n \times \mathfrak{E}_a,$$

so daß

$$(55) \quad n \times \frac{1}{4\pi} \int_V [i\omega \mu_i j_a \varphi_i - j'_a \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_a \nabla \varphi_i] dV = -n \times \mathfrak{E}_a + j'_a$$

ist. Analog erhalten wir

$$(56) \quad \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i\omega \varepsilon_a \mathbf{j}'_a \varphi_a + \mathbf{j}_a \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_a \nabla \varphi_a] dF = \mathbf{j}_a$$

und

$$(57) \quad \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i\omega \varepsilon_i \mathbf{j}'_i \varphi_i + \mathbf{j}_i \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_i \nabla \varphi_i] dF = -\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_e - \mathbf{j}'_a.$$

Daraus folgt nun

Satz 5: Die Lösungen j und j' des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_a} \mathbf{j}_e - \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \frac{1}{2\pi} \int_F \mathbf{n} \times [i \times \nabla (\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i)] dF \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [(n \times j') (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j' \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \\ \mathbf{j}' &= \frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \mathbf{j}'_e + \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \frac{1}{2\pi} \int_F \mathbf{n} \times [j' \times \nabla (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i)] dF \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F [(n \times j) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + n \times (j \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{j}_e = -\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_e; \quad \mathbf{j}'_e = \mathbf{n} \times \mathfrak{E}_e,$$

wobei die Quellen des einfallenden Feldes $\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}_e$ innerhalb des von der analytischen Fläche F berandeten Gebietes V liegen, liefern das gebrochene Feld $\mathfrak{E}_g, \mathfrak{H}_g$ im Äußeren von V durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_g &= -\frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \mu_a \mathbf{j} \varphi_a - j' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF \\ \mathfrak{H}_g &= -\frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon_a j' \varphi_a + \mathbf{j} \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF, \end{aligned}$$

während das reflektierte Feld $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{H}_r$ im Inneren von V durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \mu_i \mathbf{j} \varphi_i - j' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho \nabla \varphi_i] dF \\ \mathfrak{H}_r &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon_i j' \varphi_i + \mathbf{j} \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho' \nabla \varphi_i] dF \end{aligned}$$

dargestellt wird.

Die Ladungen ϱ und ϱ' ergeben sich dabei aus den Flächendivergenzen von \mathbf{j} und \mathbf{j}' in der Form

$$\nabla_F \mathbf{j} = i\omega \varrho; \quad \nabla_F \mathbf{j}' = i\omega \varrho'.$$

Zum Beweise bemerken wir nach (53) und (54), daß

$$(58) \quad \mathbf{n} \times (\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r) = \mathbf{j}' = (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_g)$$

und nach (56) und (57)

$$(59) \quad n \times (\vec{\mathfrak{H}}_e + \vec{\mathfrak{H}}_r) = -\vec{j}' = (n \times \vec{\mathfrak{H}}_e)$$

ist.

Es läßt sich nun auch die Reflexion im Rahmen des HUYGENSschen Prinzips diskutieren. Es werden nämlich, wie früher gezeigt wurde [5], das gebrochene und das reflektierte Feld durch die Ströme \vec{j}_e und \vec{j}'_e erzeugt, die in der Grenze der beiden Medien fließen. Die Berechnung der reflektierten und gebrochenen Felder läuft bei dieser Formulierung darauf hinaus, \vec{j}_e und \vec{j}'_e in zwei Paare von Strömen \vec{j}_1, \vec{j}'_1 und \vec{j}_2, \vec{j}'_2 so aufzuteilen, daß

$$(60) \quad \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_e; \quad \vec{j}'_1 + \vec{j}'_2 = \vec{j}'_e$$

ist und \vec{j}_1, \vec{j}'_1 das reflektierte Feld, \vec{j}_2, \vec{j}'_2 das gebrochene Feld erzeugen. Anschaulich hätten wir uns den in Satz 4 formulierten Sachverhalt dann so vorzustellen, daß sich \vec{j}_1, \vec{j}'_1 an der „Außenseite“ von F und \vec{j}_2, \vec{j}'_2 an der „Innenseite“ von F befinden.

Nehmen wir zunächst einmal an, der ganze Raum wäre homogen und würde durch die Konstanten ε_a und μ_a beschrieben, es wäre also die Inhomogenität beseitigt und der von ihr eingenommene Raum mit der Substanz des Außenraumes gefüllt. Dann müssen \vec{j}_1, \vec{j}'_1 so beschaffen sein, daß nichts ins Innere von V gestrahlt wird. Denken wir uns andererseits im Außenraum die Substanz des Innenraumes, so müssen \vec{j}_2, \vec{j}'_2 so beschaffen sein, daß nichts ins Äußere gestrahlt wird. Die Ströme \vec{j}_e, \vec{j}'_e müssen also in zwei Summanden zerlegt werden, die sich bildlich gesprochen an der Innen- bzw. Außenseite der Trennfläche befinden und die Trennfläche nicht „durchstrahlen“.

Wir können diese Aufteilung aus Satz 2 sofort entnehmen. Es ist nämlich

$$(61) \quad \vec{j}_1 = -\vec{j}_a; \quad \vec{j}'_1 = -\vec{j}'_a; \quad \vec{j}_2 = \vec{j}_a; \quad \vec{j}'_2 = \vec{j}'_a.$$

Daß \vec{j}_2, \vec{j}'_2 nicht durch die Fläche F strahlt, ergibt sich aus (29), denn das von $\vec{j} = \vec{j}_2$ und $\vec{j}' = \vec{j}'_2$ erzeugte Feld verschwindet identisch in dem mit Substanz der Konstanten ε_i, μ_i gefüllten Außenraum von V .

Aus (1,30) und (1,31) entnehmen wir, daß $\vec{j}_1 = -\vec{j}_a; \vec{j}'_1 = -\vec{j}'_a$ ebenfalls nicht durch die Fläche F strahlen, da das von ihnen erzeugte Feld an der „Innenseite“ von F verschwindet.

Durch (61) erklärt sich auch das negative Vorzeichen in der Darstellung des reflektierten Feldes nach Satz 2. Es ist nämlich außerhalb V wegen

$$(62) \quad \vec{i}_1 = \vec{j}_e - \vec{j}; \quad \vec{i}'_1 = \vec{j}'_e - \vec{j}'$$

$$(63) \quad \frac{1}{4\pi} \int_V [\vec{i} \omega \mu_a \vec{j}_1 \varphi_a - \vec{j}_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_1 \nabla \varphi_a] dF$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_V [\vec{i} \omega \mu_a \vec{j} \varphi_a - \vec{j} \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho \nabla \varphi_a] dF,$$

da das von \vec{j}_e, \vec{j}'_e erzeugte Feld außerhalb V verschwindet. Entsprechend erhalten wir

$$(64) \quad \frac{1}{4\pi} \int_V [\vec{i} \omega \varepsilon_a \vec{j}'_1 \varphi_a + \vec{j}_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_1 \nabla \varphi_a] dF$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_V [\vec{i} \omega \varepsilon_a \vec{j}' \varphi_a + \vec{j} \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho' \nabla \varphi_a] dF,$$

so daß das reflektierte Feld durch \vec{j}_1, \vec{j}'_1 erzeugt wird.

Für den in Satz 5 behandelten Fall ergibt sich analog, wenn sich j_1, j_1' wieder an der Außenseite und j_2, j_2' an der Innenseite befinden,

$$(65) \quad j_1 = -j; \quad j_1' = -j; \quad j_2 = j_e + j; \quad j_2' = j' + j';$$

wobei hier benutzt wird, daß das von j_e, j_e' erzeugte Feld im Inneren von V , und folglich auch an der „Innenseite“ von F verschwindet.

Das Problem der Reflexion erscheint damit als Spezialfall einer allgemeinen Aufgabe, die wir als die Bestimmung des Feldes von Grenzflächenströmen bezeichnen können.

Wir geben uns dazu auf F beliebige zweimal differenzierbare j_e und j_e' vor und wollen zwei Felder $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{E}_i, \mathfrak{H}_i$ so bestimmen, daß außerhalb V

$$(66) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_a + i\omega \varepsilon_a \mathfrak{H}_a = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{H}_a - i\omega \mu_a \mathfrak{E}_a = 0$$

und innerhalb V

$$(67) \quad \nabla \times \mathfrak{E}_i + i\omega \varepsilon_i \mathfrak{H}_i = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{H}_i - i\omega \mu_i \mathfrak{E}_i = 0$$

ist, wobei $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{H}_a$ den Ausstrahlungsbedingungen genügt. Es soll weiterhin

$$(68) \quad \begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_a) - (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_i) &= -j_e' \\ (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_a) - (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_i) &= j_e \end{aligned}$$

sein. Wir setzen

$$(69) \quad j_1 + j_2 = j_e; \quad j_1' + j_2' = j_e'$$

und

$$(70) \quad \begin{aligned} \mathfrak{H}_e &= \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i\omega \mu_i j_e \varphi_i - j_e' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_e \nabla \varphi_i] dF \\ \mathfrak{H}_e' &= -\mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i\omega \varepsilon_i j_e' \varphi_i + j_e \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho_e' \nabla \varphi_i] dF \end{aligned}$$

und verlangen, daß

$$(71) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i\omega \mu_a j_1 \varphi_a - j_1' \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_1 \nabla \varphi_a] dF &= 0 \\ -\mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_i} [i\omega \varepsilon_a j_1' \varphi_a + j_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho_1' \nabla \varphi_a] dF &= 0 \end{aligned}$$

ist und

$$(72) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i\omega \mu_i j_1 \varphi_i - j_1' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_1 \nabla \varphi_i] dF &= \mathfrak{H}_e' \\ -\mathbf{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{F_a} [i\omega \varepsilon_i j_1' \varphi_i + j_1 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho_1' \nabla \varphi_i] dF &= \mathfrak{H}_e \end{aligned}$$

wird. Hieraus ergeben sich die Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}'_1 &= \frac{-2\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \mathbf{j}'_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F \mathbf{n} \times \mathbf{j}'_1 \times \nabla (\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i) dF \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \int_F [(\mathbf{n} \times \mathbf{j}_1) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + \mathbf{n} \times (\mathbf{j}_1 \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF \\
 (73) \quad \mathbf{j}_1 &= \frac{-2\mu_i}{\mu_i + \mu_a} \mathbf{j}_0 - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F \mathbf{n} \times \mathbf{j}_1 \times \nabla (\mu_a \varphi_a - \mu_i \varphi_i) dF \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \frac{1}{\mu_i + \mu_a} \int_F [(\mathbf{n} \times \mathbf{j}'_1) (k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + \mathbf{n} \times (\mathbf{j}'_1 \nabla) \nabla (\varphi_a - \varphi_i)] dF
 \end{aligned}$$

mit deren eindeutig bestimmten Lösungen \mathbf{j}_1 und \mathbf{j}'_1 die Felder

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \mu_a \mathbf{j}_1 \varphi_a - \mathbf{j}'_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_1 \nabla \varphi_a] dF \\
 (74) \quad \mathfrak{H}_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon_a \mathbf{j}'_1 \varphi_a + \mathbf{j}_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho'_1 \nabla \varphi_a] dF
 \end{aligned}$$

im Inneren von V und

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \mu_i \mathbf{j}_1 \varphi_i - \mathbf{j}'_1 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_1 \nabla \varphi_i] dF \\
 (75) \quad &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \mu_i \mathbf{j}'_1 \varphi_i - \mathbf{j}_1 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho'_1 \nabla \varphi_i] dF
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon_i \mathbf{j}'_1 \varphi_i + \mathbf{j}_1 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho_1 \nabla \varphi_i] dF \\
 (76) \quad &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon_i \mathbf{j}_1 \varphi_i + \mathbf{j}'_1 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho'_1 \nabla \varphi_i] dF
 \end{aligned}$$

im Äußeren von V gebildet werden. Dann ist

$$(77) \quad \varepsilon_i (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_1) = \varepsilon_a (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_2); \quad \mu_i (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_1) = \mu_a (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_2),$$

$\xrightarrow{F_a}$

$\xrightarrow{F_i}$

so daß sich nach dem üblichen Vorgang

$$(78) \quad (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_2) = (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_1) = (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_2) = (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_1) = 0$$

$\xrightarrow{F_a}$

$\xrightarrow{F_i}$

$\xrightarrow{F_a}$

$\xrightarrow{F_i}$

ergibt. Auf Grund der Sprungrelationen folgt dann

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_1) &= \mathbf{j}'_1 - \mathbf{j}'_0; & (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_1) &= -\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_0 \\
 (79) \quad (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}_2) &= -\mathbf{j}'_1; & (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_2) &= \mathbf{j}_1,
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{F_i}$

$\xrightarrow{F_i}$

und wir erhalten die Lösung des durch (66) bis (68) formulierten Sprungwertproblems in der Form

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_a &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega\mu_a \mathbf{j}_a - \mathbf{j}_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\varepsilon_a} \varrho_1 \nabla \varphi_a] dF \\
 \mathfrak{H}_a &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega\varepsilon_a \mathbf{j}_1' \varphi_a + \mathbf{j}_1 \times \nabla \varphi_a + \frac{1}{\mu_a} \varrho_1' \nabla \varphi_a] dF
 \end{aligned}
 \quad (80)$$

und mit

$$\mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_e - \mathbf{j}_1; \quad \mathbf{j}_2' = \mathbf{j}_e' - \mathbf{j}_1' \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_i &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega\mu_i \mathbf{j}_2 \varphi_i - \mathbf{j}_2' \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\varepsilon_i} \varrho_2 \nabla \varphi_i] dF \\
 \mathfrak{H}_i &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega\varepsilon_i \mathbf{j}_2' \varphi_i + \mathbf{j}_2 \times \nabla \varphi_i + \frac{1}{\mu_i} \varrho_2' \nabla \varphi_i] dF,
 \end{aligned}
 \quad (82)$$

wobei offensichtlich $\mathcal{E}_i = -\mathcal{E}_1$; $\mathfrak{H}_i = -\mathfrak{H}_1$ und $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_2$; $\mathfrak{H}_a = \mathfrak{H}_2$ ist, so daß sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \times \mathcal{E}_a &= -\mathbf{j}_1'; & \mathbf{n} \times \mathfrak{H}_a &= \mathbf{j}_1 \\
 \mathbf{n} \times \mathcal{E}_i &= \mathbf{j}_e' - \mathbf{j}_1'; & \mathbf{n} \times \mathfrak{H}_i &= \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_e
 \end{aligned}
 \quad (83)$$

ergibt, woraus die Sprungrelationen (68) folgen.

Es läßt sich die Reflexion elektromagnetischer Wellen an endlichen homogenen Körpern also auf die Berechnung der Felder von Grenzflächenströmen zurückführen, die mit Hilfe der Integralgleichungen durchgeführt werden kann.

Ohne näher auf die Lösungen unserer Integralgleichungen einzugehen, können wir die Frage nach der Abhängigkeit des reflektierten Feldes von den Konstanten ε_i, μ_i bei festem V und $\varepsilon_a, \mu_a, \omega$ nicht beantworten. Wir müssen daher auch darauf verzichten, den Grenzübergang $\varepsilon_i \rightarrow \infty$ in unseren Integralgleichungen streng durchzuführen und formulieren den unter der Bezeichnung „vollkommene Reflexion“ bekannten Grenzfall $\varepsilon_i = \infty$ gesondert.

4. Die vollkommene Reflexion.

Die vollkommene Reflexion erfordert die Lösung der folgenden Aufgabe:

Es ist das Feld $\mathcal{E}, \mathfrak{H}$ zu bestimmen, das im Äußeren eines regulären, von der analytischen Randfläche F berandeten Gebietes V den Ausstrahlungsbedingungen und den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathfrak{H} + i\omega\varepsilon \mathcal{E} &= \mathbf{j} \\
 \nabla \times \mathcal{E} - i\omega\mu \mathfrak{H} &= -\mathbf{j}'
 \end{aligned}$$

genügt, wobei \mathbf{j} und \mathbf{j}' in einem regulären, ganz außerhalb V gelegenen Gebiet \mathfrak{B} zweimal differenzierbar sind. Außerhalb \mathfrak{B} verschwinden \mathbf{j} und \mathbf{j}' identisch. Auf der Randfläche F von V muß

$$\mathbf{n} \times \mathcal{E} = 0$$

sein.

Wir bilden wiederum das einfallende Feld

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} [i\omega\mu \mathfrak{j} \varphi - \mathfrak{j}' \times \nabla \varphi + \frac{1}{\epsilon} \varrho \nabla \varphi] dV + \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} (i\mathfrak{n}) V \varphi dF \\ (1) \quad \mathfrak{H}_e &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} [i\omega\epsilon \mathfrak{j}' \varphi + \mathfrak{j} \times \nabla \varphi + \frac{1}{\mu} \varrho' \nabla \varphi] dV + \frac{i}{\omega\mu} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} (i' \mathfrak{n}) \nabla \varphi dF \end{aligned}$$

und setzen

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_r,$$

wobei $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{H}_r$ in der üblichen Bezeichnungsweise das reflektierte Feld darstellt. Wir machen für dieses Feld den Ansatz*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{j}'_R \times \nabla \varphi dF \\ (3) \quad \mathfrak{H}_r &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}} [i\omega\epsilon \mathfrak{j}'_R \varphi + \frac{1}{\mu} \varrho'_R \nabla \varphi] dF, \end{aligned}$$

stellen es also lediglich durch magnetische Flächenströme dar. Die Randbedingung $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} = 0$ ergibt dann

$$(4) \quad 0 = \underbrace{\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_e}_{\mathfrak{F}_a} + \underbrace{\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_r}_{\mathfrak{F}_a} = \mathfrak{j}'_e - \mathfrak{n} \times \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}_a} \mathfrak{j}'_R \times \nabla \varphi dF.$$

Nun ist aber nach (1, 47)

$$(5) \quad \mathfrak{n} \times \int_{\mathfrak{F}_a} \mathfrak{j}'_R \times \nabla \varphi dF = 2\pi \mathfrak{j}'_R + \int_{\mathfrak{F}} [\mathfrak{n} \times (i'_R \times \nabla \varphi)] dF,$$

so daß aus (4) die Integralgleichung

$$(6) \quad \mathfrak{j}'_R = -2 \mathfrak{j}'_e - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{n} \times (i'_R \times \nabla \varphi) dF$$

wird. Der Kern dieser Integralgleichung wird nicht stärker als $\frac{1}{r}$ singulär, wie sich aus den Untersuchungen des vorigen Abschnitts ergibt, so daß die FREDHOLM-HILBERTSche Theorie anwendbar ist. Wir haben daher zum Nachweis der Existenz der Lösung dieser Integralgleichung die Eigenlösungen zu untersuchen. Es sei

$$(7) \quad \mathfrak{j}'_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{n} \times \mathfrak{j}'_0 \times \nabla \varphi dF.$$

Dies besagt, da \mathfrak{j}'_0 als Eigenlösung stetig differenzierbar ist und die Ableitungen HÖLDER-Bedingungen genügen, daß

$$(8) \quad \mathfrak{n} \times \int_{\mathfrak{F}_a} \mathfrak{j}'_0 \times \nabla \varphi dF = 0$$

ist. Dann ist aber

$$(9) \quad \mathfrak{n} \times \int_{\mathfrak{F}_i} \mathfrak{j}'_0 \times \nabla \varphi dF = 4\pi \mathfrak{j}'_0.$$

*) Auf einem anderen Wege löst W. K. SAUNDERS die Fragestellung dieses Paragraphen [13], während sich nach C. J. BOUWKAMP [14] ein Ansatz von W. MAUE [8] ebenfalls zu einem Existenzbeweis für das Problem der vollkommenen Reflexion ausbauen läßt (Anm. b. d. Korrektur).

Es gibt Eigenlösungen dieser Art. Wir erhalten sie aus den „magnetischen Eigenschwingungen“ des Gebietes V und verstehen darunter ein Feld $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$, das den Gleichungen

$$(10) \quad \nabla \times \mathfrak{H}_0 + i \omega \varepsilon \mathfrak{E}_0 = 0; \quad \nabla \times \mathfrak{E}_0 - i \omega \mu \mathfrak{H}_0 = 0$$

im Inneren von V genügt und so beschaffen ist, daß

$$(11) \quad \mathbf{n} \times \mathfrak{H}_0 = 0$$

wird. Felder dieser Art sind mehrfach angegeben worden [6]. Nach dem HUYGENSSCHEN Prinzip ist innerhalb V

$$(12) \quad \mathfrak{E}_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{j}_0 \times \nabla \varphi dF; \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V (i \omega \varepsilon \mathbf{j}_0 \varphi + \frac{1}{\mu} \rho_0 \nabla \varphi) dF$$

mit

$$(13) \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{n} \times \mathfrak{E}_0.$$

Außerhalb V verschwindet (12) identisch, so daß

$$(14) \quad \mathbf{n} \times \int_V \mathbf{j}_0 \times \nabla \varphi dF = 0$$

und folglich

$$(15) \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{n} \times \mathfrak{E}_0$$

Eigenlösung der Integralgleichung (7) ist.

Wir beweisen nun

Lemma 5: Ist

$$Im(k^2) = Im(\omega^2 \varepsilon \mu) \neq 0,$$

so gibt es keine Eigenlösungen von (7).

Zunächst bemerken wir, daß zu jeder Eigenlösung von (7) auch eine „magnetische Eigenschwingung“ $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ gehört, denn das Feld

$$(16) \quad \mathfrak{E}_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{j}_0 \times \nabla \varphi dF; \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V (i \omega \varepsilon \mathbf{j}_0 \varphi + \frac{1}{\mu} \rho_0 \nabla \varphi) dF$$

erfüllt (10) und (11), so daß es zu zeigen genügt, daß nur zu reellen k^2 Eigenschwingungen möglich sind. Aus (10) ergibt sich

$$(17) \quad \nabla \times \nabla \times \mathfrak{H}_0 - k^2 \mathfrak{H}_0 = 0,$$

und es wird

$$(18) \quad \int_V (\bar{\mathfrak{H}}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{H}_0 - \bar{\mathfrak{H}}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\mathfrak{H}}_0) dV = \\ = \int_V [\mathbf{n} (\bar{\mathfrak{H}}_0 \times \nabla \times \mathfrak{H}_0 - \bar{\mathfrak{H}}_0 \times \nabla \times \bar{\mathfrak{H}}_0)] dF.$$

Wegen (11) verschwindet das Flächenintegral, und aus (8) folgt

$$(19) \quad (k^2 - \bar{k}^2) \int_V \bar{\mathfrak{H}}_0 \cdot \mathfrak{H}_0 dV = 0.$$

Wir wollen nun zu dem zu (7) transponierten System übergehen. Dazu setzen wir

$$(20) \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_0' \mathfrak{E}$$

und erhalten für (7)

$$(21) \quad \begin{aligned} j_0^r(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_F g^{rj}(x) \mathfrak{L}_j(x) \mathfrak{L}_m(\xi) j_0^m(\xi) (n(x) \nabla \varphi) dF_\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_F g^{rj}(x) (\mathfrak{L}_j(x) \nabla \varphi) (n(x) \mathfrak{L}_m(\xi)) j_0^m(\xi) dF_\xi. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(22) \quad g^{rj}(x) \mathfrak{L}_j(x) = \mathfrak{L}^r(x); \quad \mathfrak{L}^r \mathfrak{L}_j = \delta_j^r,$$

so wird aus (7) das Integralgleichungssystem

$$(23) \quad \begin{aligned} j_0^1(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_F [(\mathfrak{L}^1(x) \mathfrak{L}_r(\xi)) (n(x) \nabla \varphi) - (\mathfrak{L}^1(x) \nabla \varphi) (n(x) \mathfrak{L}_r(\xi))] j_0^r(\xi) dF_\xi \\ j_0^2(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_F [(\mathfrak{L}^2(x) \mathfrak{L}_r(\xi)) (n(x) \nabla \varphi) - (\mathfrak{L}^2(x) \nabla \varphi) (n(x) \mathfrak{L}_r(\xi))] j_0^r(\xi) dF_\xi. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$(24) \quad t = t_r \mathfrak{L}^r$$

die Eigenlösung des transponierten konjugiert komplexen Systems, so wird

$$(25) \quad \begin{aligned} t_1(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_F [(\mathfrak{L}_1(x) \mathfrak{L}^r(\xi)) (n(\xi) \nabla' \bar{\varphi}) - (\mathfrak{L}^r(\xi) \nabla' \bar{\varphi}) (n(\xi) \mathfrak{L}_1(x))] t_r(\xi) dF_\xi \\ t_2(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_F [(\mathfrak{L}_2(x) \mathfrak{L}^r(\xi)) (n(\xi) \nabla' \bar{\varphi}) - (\mathfrak{L}^r(\xi) \nabla' \bar{\varphi}) (n(\xi) \mathfrak{L}_2(x))] t_r(\xi) dF_\xi, \end{aligned}$$

wobei wir beide Gleichungen wegen (24) zu

$$(26) \quad t(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_F [t(\xi) (n(\xi) \nabla' \bar{\varphi}) - (n(\xi) t(\xi) \nabla' \bar{\varphi})] dF$$

oder

$$(27) \quad t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_F \nabla \bar{\varphi} \times (n \times t) dF$$

zusammenfassen können. Die hier auftretende Singularität ist nach (25) nur scheinbar, und wir können sie durch Einführung von

$$(28) \quad \mathfrak{h} = n \times t; \quad t = -n \times \mathfrak{h}$$

formal beseitigen, denn dann wird aus (27)

$$(29) \quad \mathfrak{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_F n(x) \times (\nabla \bar{\varphi} \times \mathfrak{h}(\xi)) dF$$

oder

$$(30) \quad \mathfrak{h}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_F n(x) \times (\mathfrak{h} \times \nabla \bar{\varphi}) dF.$$

Damit beweisen wir

Lemma 6: Ist $\mathfrak{E}_e, \mathfrak{H}_e$ ein Feld, das von ganz im Äußeren von V gelegenen Strömen erzeugt wird, und t eine Lösung von

$$t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_F \nabla \bar{\varphi} \times (n(\xi) \times t(\xi)) dF,$$

so wird

$$\int_F (\mathbf{n} \times \mathbb{E}_e) \bar{\mathbf{t}} dF = 0.$$

Wir bilden das Feld

$$(31) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{h} \times \nabla \bar{\varphi} dF; & \mathfrak{h} &= \mathbf{n} \times \mathbf{t}; & \nabla_F \mathfrak{h} &= i\omega \varrho \\ \mathfrak{H}_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_F [i\omega \varepsilon \mathfrak{h} \bar{\varphi} + \frac{1}{\mu} \varrho \nabla \bar{\varphi}] dF, \end{aligned}$$

das den Gleichungen (10) und (11) genügt, da wegen $Im(k^2) = 0$

$$(32) \quad \Delta \bar{\varphi} + k^2 \bar{\varphi} = 0$$

ist. Es wird

$$(33) \quad \mathbf{n} \times \mathbb{E}_0 = \mathfrak{h}$$

und

$$(34) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbb{E}_0 = 0,$$

da das Feld (31) im Äußeren von V identisch verschwindet und die Normalkomponenten von \mathbb{E}_0 beim Durchgang durch F stetig sind. Es ist also auch

$$(35) \quad \mathbf{n} \times \mathfrak{h} = -\mathbf{t} = -\mathbb{E}_0 + (\mathbb{E}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = -\mathbb{E}_0,$$

wobei \mathbb{E}_0 die Werte auf F bezeichnet. Die Behauptung von Lemma 6 ist daher gleichbedeutend mit

$$(36) \quad \int_F (\mathbf{n} \times \mathbb{E}_e) \bar{\mathbb{E}}_0 dF = \int_F \mathbf{n} (\mathbb{E}_e \times \bar{\mathbb{E}}_0) dF = 0.$$

Wir tragen nun auf den Normalen zu F ins Innere von V die Strecke λ ab und erhalten für genügend kleine λ eine analytische Parallelfäche F_λ zu F . Das von ihr umschlossene Gebiet sei V_λ . Dann wird

$$(37) \quad \begin{aligned} & \int_{F_\lambda} [\mathbf{n} (\bar{\mathbb{E}}_0 \times \nabla \times \mathfrak{H}_e) - \mathbf{n} (\mathfrak{H}_e \times \nabla \times \bar{\mathbb{E}}_0)] dF_\lambda \\ &= \int_{V_\lambda} [\mathfrak{H}_e \cdot \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbb{E}}_0 - \bar{\mathbb{E}}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathfrak{H}_e] dV \\ &= (k^2 - k^2) \int_{V_\lambda} \mathfrak{H}_e \bar{\mathbb{E}}_0 dV = 0. \end{aligned}$$

Daraus wird nach (10)

$$(38) \quad -i\omega \varepsilon \int_{F_\lambda} \mathbf{n} (\bar{\mathbb{E}}_0 \times \mathbb{E}_e) dF_\lambda + i\omega \mu \int_{F_\lambda} \mathbf{n} (\mathfrak{H}_e \times \bar{\mathfrak{H}}_0) dF_\lambda = 0.$$

Bezeichnen wir durch den Index λ die Werte auf der Fläche F_λ , so gilt gleichmäßig in λ

$$(39) \quad \begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathbf{n} \times \mathbb{E}_0)_\lambda &= \mathbf{n} \times \mathbb{E}_0; & \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathbf{n} \times \mathbb{E}_e)_\lambda &= \mathbf{n} \times \mathbb{E}_e, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_0)_\lambda &= 0; & \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathbf{n} \times \mathfrak{H}_e)_\lambda &= \mathbf{n} \times \mathfrak{H}_e, \end{aligned}$$

da \mathfrak{h} und ϱ in (31) gleichmäßig HÖLDER-Bedingungen genügen. Strebt nämlich der Aufpunkt auf der Normalen von innen her gegen F , so folgt aus Sätzen

der Potentialtheorie, daß die zugehörigen Werte der Integrale (31) gleichmäßig (bezüglich λ) konvergieren. Durch den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ erhalten wir somit

$$(40) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_n (\bar{\mathcal{E}}_0 \times \mathcal{E}_r) dF = \int_n (\bar{\mathcal{E}}_0 \times \mathcal{E}_r) dF = 0.$$

Nach Lemma 6 ergibt sich daher, daß es stets eine Lösung der Integralgleichung (6) gibt. Die Ströme j_R sind dabei nicht eindeutig bestimmt, wohl aber das reflektierte Feld \mathcal{E}_r , \mathcal{H}_r , denn die Eigenlösungen j_0 strahlen nach (8) nichts ins Äußere von V .

Literaturnachweis.

- [1] MÜLLER, CL.: Arch. Math. 1, 296 (1948/49). — MÜLLER, CL.: Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen, Abh. dtach. Akad. Berlin Jahrgang 45/46, Nr. 3 (Auf diese Arbeit wird im folgenden mit l. c. verwiesen.) — [2] KELLOGG, O. D.: Foundations of Potential Theory, S. 164. Die Tatsache, daß bei der Benutzung dieses Ergebnisses $\frac{1}{r}$ statt $\frac{1}{r}$ verwandt wird, ist leicht zu berücksichtigen. — [3] SCHMIDT, E.: Math. Ann. 68, 107—118 (1910). — [4] KELLOGG, O. D.: l. c. S. 165. — [5] MÜLLER, CL.: l. c. S. 26. — [6] DE BROGLIE, L.: Problèmes de Propagation Guidée des Ondes Electromagnétiques, S. 42ff. Paris 1941. — [7] POINCARÉ, H.: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig 1910. — [8] MAUE, W.: Z. Phys. 126, 601 (1949). — [9] CORSON u. BAKER: Huygens' Principle, New York 1947. (Dort auch weitere Literaturangaben.) — [10] EFSTEIN, P. S.: Enzykl. d. Math. Wiss. V, III, 488. WOLFSOHN, G.: Hdb. d. Phys. XX, 307. — [11] MAGNUS, W.: Iber. d. DMV 52, 177 (1942). — [12] MÜLLER, CL.: Abh. Math. Sem. Hamburg, 16, 95 (1948). [13] SAUNDERS, W.K.: Private Mitteilung. [14] BOUWKAMP, C. J.: Private Mitteilung.

(Eingegangen am 10. November 1950.)

Über Ringe mit Poisson-Klammern *).

Von

GOTTFRIED FALK in Marburg.

Klassische wie Quantenmechanik zeigen, daß die physikalischen Größen — definiert durch Meßvorschriften — einen Ring im algebraischen Sinn bilden. In der klassischen Mechanik werden die Größen durch Funktionen der kanonischen Variablen, in der Quantenmechanik durch lineare Operatoren im Hilbert-Raum repräsentiert, wobei alle Operatoren sich aus den nichtvertauschbaren (kanonischen) Operatoren, welche Impuls und Koordinate repräsentieren, durch Anwendung von Multiplikationen und Additionen aufbauen lassen. In beiden Theorien handelt es sich also um einen Ring, welcher aus einem System von Grundvariablen aufgebaut werden kann. Beschränkt man sich zunächst auf Ringe formaler Potenzreihen in den kanonischen Variablen, so lassen sich die durch die Bewegungsgleichungen definierten grundlegenden Beziehungen zwischen Elementen des Ringes im Fall der klassischen sowie der Quantenmechanik unter Verwendung der algebraischen Eigenschaften der Poisson-Klammern gleichartig fassen¹⁾. Dies führt zu der mathematischen Aufgabe, Ringe mit einem derartigen Klammerbildungsprozeß axiomatisch zu untersuchen. Da die betrachteten Prozesse sich im Bereich der Polynome bereits völlig übersehen lassen und dabei unnötige Komplikationen vermieden werden, ist es zweckmäßig, sich zunächst auf Polynomringe zu beschränken.

In § 1 werden Ringe mit Erzeugenden und definierenden Relationen betrachtet. Sodann wird ein den Erfordernissen entsprechender freier Ring eingeführt und der Heisenberg-Ring als ein bestimmter Restklassenring des freien Ringes charakterisiert. § 2 enthält eine axiomatische Untersuchung von Ringen mit einer Klammerbildung, welche die algebraischen Eigenschaften der Poisson-Klammern besitzt. Der kommutative sowie der Heisenberg-Ring können als Ringe mit einer derartigen Klammerbildung axiomatisch gekennzeichnet werden; die Unabhängigkeit der hierbei benutzten Forderungen wird durch Konstruktionen im freien Ring mit Hilfe der durch F. HAUSDORFF eingeführten Differentialoperationen bewiesen. In § 3 wird die Aufgabe behandelt, Homomorphismen des freien Ringes aufzusuchen, bei denen bestimmte Hausdorff-Operationen im homomorphen Bild Prozesse induzieren, welche wieder die Eigenschaften der Hausdorff-Operationen haben. Es wird nachgewiesen, daß der kommutative und der Heisenberg-Ring homomorphe Abbildungen des freien Ringes sind, bei welchen eine bestimmte, für die

*) Herrn REIDEMEISTER, unter dessen Anleitung und ständiger Teilnahme, insbesondere bei Behandlung der Differentiationshomomorphismen, die Arbeit ausgeführt wurde, bin ich zu größtem Dank verpflichtet. Mein Dank gilt ebenfalls der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft für die mir erwiesene Hilfe.

¹⁾ Die zeitliche Änderung einer Größe wird dabei durch eine eingliedrige Schar von Automorphismen des Ringes beschrieben, die durch die Hamilton-Funktion des physikalischen Systems bestimmt ist. Vgl. G. FALK: Axiomatik als Methode physikalischer Theorienbildung. Z. Physik 130, 51 (1951).

Mechanik charakteristische Hausdorff-Operation in die Poisson-Klammern übergeht. Die entwickelte Methode gibt eine Möglichkeit, den algebraischen Inhalt von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung von kommutativen in nichtkommutative Bereiche zu übertragen.

§ 1.

Ist \mathcal{G} ein Ring und m eine Klasse von Elementen aus \mathcal{G} , aus denen sich alle Elemente von \mathcal{G} durch endlich oftmalige Anwendung der Ringoperationen — Additionen und Multiplikationen — aufbauen lassen, so heißen die Elemente von m ein *System von Erzeugenden* des Ringes (\mathcal{G}^2). Dabei kann es vorkommen, daß zwei aus den Erzeugenden formal *verschieden* aufgebaute Elemente trotzdem *dasselbe* Element in \mathcal{G} darstellen. Die Gesamtheit aller aus den Erzeugenden formal gebildeten Elemente wollen wir mit \mathfrak{F} bezeichnen. Um die Verknüpfungseigenschaften der Elemente von \mathcal{G} aus denen von \mathfrak{F} abzulesen, muß man also entscheiden, welche Elemente von \mathfrak{F} ein und dasselbe Element von \mathcal{G} repräsentieren. Dies wieder ist äquivalent mit der Kenntnis aller derjenigen Elemente aus \mathfrak{F} , welche das Nullelement von \mathcal{G} darstellen.

Jedes Element aus \mathfrak{F} , welches dem Nullelement von \mathcal{G} entspricht, heiße eine *Relation*. Die Gesamtheit aller Relationen werde mit \mathfrak{R} bezeichnet. Ist r eine Relation und $f \in \mathcal{G}$, so sind offenbar f und $f + r$ dasselbe Element in \mathcal{G} . Sind umgekehrt f und f' zwei verschiedene Elemente von \mathfrak{F} , welche dasselbe Element von \mathcal{G} darstellen, so ist $f - f' = r$ eine Relation. Es gilt weiter:

$$\text{Mit } r, r' \in \mathfrak{R} \text{ ist auch } r - r' \in \mathfrak{R} \quad (\text{A})$$

$$\text{und ist } f \in \mathfrak{F}, r \in \mathfrak{R}, \text{ so ist } f \cdot r \in \mathfrak{R} \text{ und } r \cdot f \in \mathfrak{R}. \quad (\text{B})$$

Aus (A) folgt, daß die Relationen eine additive Gruppe bilden. (B) läßt sich symbolisch in der Form schreiben

$$\mathfrak{F}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{F} = \mathfrak{R}.$$

Gibt es in \mathfrak{R} eine Klasse τ von Relationen, aus denen sich alle Relationen von \mathfrak{R} gewinnen lassen durch die Prozesse: a) Bildung des additiv Inversen, b) Addition, c) links- und rechtsseitige Multiplikation mit beliebigen Elementen von \mathfrak{F} , so heiße τ ein *System von definierenden Relationen*.

Im weiteren Verlauf werden Ringe \mathcal{G} betrachtet, die folgenden Bedingungen genügen: 1. \mathcal{G} hat ein Einselement, 2. \mathcal{G} enthält den Körper K der reellen Zahlen, 3. Jedes Element aus K ist mit jedem Element von \mathcal{G} vertauschbar, 4. Die Elemente von K und x_1, x_2, \dots, x_n bilden ein System von Erzeugenden von \mathcal{G} . Damit sind alle Elemente von \mathcal{G} darstellbar in der Form

$$a + \sum a_i w_i(x),$$

wobei die $a, a_i \in K$ und die $w_i(x)$ Potenzprodukte in den x_1, x_2, \dots, x_n bedeuten. Wir konstruieren nun einen Ring \mathcal{G} , der frei ist von Relationen, den sog. *freien Polynomring* \mathfrak{F} ; er ist der allgemeinste Ring, welcher die Bedingungen 1.—4. erfüllt.

Mit den Elementen x_1, x_2, \dots, x_n bilden wir die nicht-kommutativen Potenzprodukte mit positiven Exponenten. Die Gesamtheit dieser bildet eine

²⁾ Terminologie und Aufbau wurden in Anlehnung an die Begriffsbildungen der Theorie der Gruppen mit Erzeugenden und definierenden Relationen gewählt. Vgl.: K. REIDEMEISTER: Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig 1932, II. Kap.

(freie) Halbgruppe mit den x_1, x_2, \dots, x_n als Erzeugenden. Jedem Potenzprodukt

$$x_{a_1}^{e_1} x_{a_2}^{e_2} \dots x_{a_k}^{e_k}$$

läßt sich eine positive Zahl, seine *Dimension* d zuordnen:

$$d = \sum_{i=1}^k e_i.$$

$d = 0$ werde dem Einheitslement zugeordnet. Weiter heiße die Exponentensumme eines bestimmten Faktors x_j

$$\omega_j = \sum_{a_i=j} e_i$$

die *Ordnung* des Potenzproduktes in x_j . Es gilt stets $\omega_j \leq d$. Es gibt nur endlich viele Potenzprodukte einer festen Dimension.

Für die Potenzprodukte werde nun eine assoziative und kommutative Addition erklärt, der gegenüber die obige Multiplikation distributiv sei. Unter einem *homogenen Polynom* f_d verstehen wir eine Linearkombination der Potenzprodukte der Dimension d mit reellen Koeffizienten, unter einem *Polynom* vom Grade N eine Summe $\sum_{d=0}^N f_d$.

Seien mit $g_{r,d}$ die in einer festen Anordnung vorgegebenen Potenzprodukte der Dimension d bezeichnet, so folgt für zwei homogene Polynome $f_a = \sum_r a_r g_{r,a}$, $f'_a = \sum_r b_r g_{r,a}$

$$f_a \cdot f'_a = \left(\sum_r a_r g_{r,a} \right) \left(\sum_r b_r g_{r,a} \right) = \sum_r c_r g_{r,a+a} = f_{a+a}.$$

Ebenso folgt für die Multiplikation homogener Polynome das assoziative Gesetz, da dieses für die $g_{r,d}$ gilt. Die Multiplikation zweier Polynome $\varphi = \sum_{d=0}^{N'} f_d$,

$\psi = \sum_{d''=0}^{N''} f'_{d''}$ ist demnach gegeben durch

$$\varphi \cdot \psi = \left(\sum_{d'}^{N'} f_{d'} \right) \left(\sum_{d''}^{N''} f'_{d''} \right) = \sum_{d=0}^{N'+N''} f_d, \quad f_d = \sum_{d'+d''=d} f_{d'} f'_{d''}.$$

Da für die homogenen Bestandteile das assoziative sowie das distributive Gesetz gelten, sind sie auch für Polynome gültig. Die Polynome bilden also einen Ring, den freien Ring \mathfrak{F} . In \mathfrak{F} sind *Elemente dann und nur dann gleich, wenn sie formal gleich aufgebaut sind*.

Konstruieren wir nun einen Polynomring, welcher wieder die Bedingungen 1. – 4. erfüllt. Er habe die *definierenden Relationen*

$$5. \quad r_1(a, x), r_2(a, x), \dots, r_m(a, x),$$

wobei die $r_i(a, x)$ bestimmte Polynome in den x_1, x_2, \dots, x_n mit Koeffizienten aus K bezeichnen. Zunächst bilden wir wieder den freien Ring \mathfrak{F} . Aus den $r_i(a, x)$ erzeugen wir sodann unter Anwendung der obigen Prozesse b) und c) — da \mathfrak{F} ein Einselement hat, fällt a) unter c) — den Bereich \mathfrak{R} , der aus allen Elementen der Form

$$\sum_{i=1}^m f_i r_i g_i, \quad f_i, g_i \in \mathfrak{F}$$

besteht. \mathfrak{N} ist also ein (zweiseitiges) Ideal in \mathfrak{F} . Mit diesem bilden wir den Restklassenring $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Dann sind die Restklassen

$$x_1 + \mathfrak{N}, x_2 + \mathfrak{N}, \dots, x_n + \mathfrak{N}$$

zusammen mit den Zahlen aus K ein Erzeugendensystem und die r_i ein System definierender Relationen des Ringes \mathfrak{F}' in diesen Erzeugenden, wenn überdies in den r_i die x_k durch $x_k + \mathfrak{N}$ ersetzt werden. Die Polynome $r_i(a, x + \mathfrak{N})$ sind nämlich wieder Relationen; dies folgt aus der Bemerkung, daß für ein Potenzprodukt $x_{a_1}^{i_1} x_{a_2}^{i_2} \dots x_{a_l}^{i_l}$ bei der Ersetzung der x_k durch $x_k + \mathfrak{N}$ gilt

$$(x_{a_1} + \mathfrak{N})^{i_1} (x_{a_2} + \mathfrak{N})^{i_2} \dots (x_{a_l} + \mathfrak{N})^{i_l} = x_{a_1}^{i_1} x_{a_2}^{i_2} \dots x_{a_l}^{i_l} + r'; \quad r' \in \mathfrak{N}.$$

Dabei bedeutet r' eine Summe von Elementen, die alle mindestens einen Faktor aus \mathfrak{N} enthalten, selbst also ebenso wie auch r' Elemente von \mathfrak{N} sind. Somit gilt für beliebige Polynome, also auch für r_i

$$r_i(a, x + \mathfrak{N}) = r_i(a, x) + r'', \quad r'' \in \mathfrak{N}.$$

Da $r_i(a, x)$ aber Element von \mathfrak{N} ist, folgt dasselbe auch für die linke Seite. Ebenso zeigt man, wenn $r(a, x + \mathfrak{N})$ irgendeine Relation des Restklassenringes \mathfrak{F}' ist, so ist $r(a, x) \in \mathfrak{N}$, d. h. $r(a, x)$ muß sich in der Form $\sum f_i r_i g_i$ mit $f_i, g_i \in \mathfrak{F}$ darstellen lassen.

Da jedem Polynom in den x_i ein bestimmtes Element von $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ entspricht, kann man jene Polynome als Bezeichnung der Elemente von \mathfrak{F}' benutzen: \mathfrak{F}' heiße dann der Ring mit den Erzeugenden x_1, x_2, \dots, x_n — und den reellen Zahlen — und den definierenden Relationen r_1, r_2, \dots, r_m . Wir erhalten somit den

Satz 1: Ist \mathfrak{G} ein Ring mit den Bedingungen 1.—4. und den definierenden Relationen 5., so ist \mathfrak{G} zu einem bestimmten Restklassenring des freien Ringes \mathfrak{F} isomorph.

Analog zum freien Ring \mathfrak{F} kann man auch den kommutativen Polynomring \mathfrak{F}_K konstruieren. Es soll gezeigt werden, daß der Homomorphismus $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_K$ durch das von den „Kommutatoren“ $(x_i, x_k) = x_i x_k - x_k x_i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) erzeugte (zweiseitige) Ideal \mathfrak{N}_K vermittelt wird.

Für jedes Potenzprodukt in \mathfrak{F} von gegebener Dimension d und Ordnung $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ läßt sich ein Repräsentant, z. B. das Potenzprodukt der Form

$$x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \dots x_n^{\omega_n}$$

auswählen; jedes andere Potenzprodukt gleicher Dimension und Ordnung kann durch endlich oftmalige Anwendung von $x_i x_k = x_k x_i + (x_i, x_k)$ in eine Summe verwandelt werden, welche aus dem Repräsentanten und einer Anzahl von Gliedern besteht, die alle mindestens einen Faktor (x_i, x_k) enthalten, also Elemente von \mathfrak{N}_K sind.

Jedes homogene Polynom einer Dimension d zerlegen wir in homogene Bestandteile gleicher Ordnung. Nach obigem Verfahren kann nun jeder solche homogene Bestandteil auf die Form gebracht werden: Zugehöriger Repräsentant, multipliziert mit der Summe aller Koeffizienten des homogenen Bestandteiles, und eine Summe von Gliedern, die alle in \mathfrak{N}_K liegen. Für allgemeine homogene Polynome gilt dann eine entsprechende additive Zusammensetzung. Bei der Multiplikation zweier in dieser „Normalform“ befindlicher homogener Bestandteile gleicher Ordnung resultiert i. a. nicht sofort

wieder die Normalform des Produktes, vielmehr muß man durch obiges Verfahren diese Normalform erst herstellen. Für die Multiplikation kann man sich von vornherein auf die Repräsentanten beschränken, da alle übrigen Glieder bereits in \mathfrak{R}_K liegen. Das durch multiplikative Verbindung erhaltene Potenzprodukt läßt sich sodann wieder in die Normalform bringen, wobei der Koeffizient nicht geändert wird. Für allgemeine homogene Polynome gilt dann Entsprechendes und somit auch für Polynome.

Zeigen wir nun noch, daß alle Ausdrücke der Form $(\varphi, \psi) = \varphi\psi - \psi\varphi$, wobei $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$, in \mathfrak{R}_K liegen. Jedes Polynom in \mathfrak{F} ist eine Summe homogener Polynome und somit eine Summe homogener Bestandteile gleicher Ordnung. Beim Übergang zur Normalform entspricht jedem dieser homogenen Bestandteile genau ein Repräsentant. Wie oben kann man sich bei der Multiplikation auf die Betrachtung dieser Repräsentanten beschränken. Seien mit h_i die in einer festgelegten Reihenfolge vorgegebenen Repräsentanten bezeichnet, so haben die Polynome φ und ψ die Normalform

$$\varphi = \sum_{\nu}^N a_{\nu} h_{\nu} + \varphi', \quad \psi = \sum_{\nu}^{N'} b_{\nu} h_{\nu} + \psi'; \quad \varphi', \psi' \in \mathfrak{R}_K.$$

Bildet man nun $\varphi\psi = \sum_{\nu, \mu}^{N, N'} a_{\nu} b_{\mu} h_{\nu} h_{\mu} + \chi'$ und $\psi\varphi = \sum_{\nu, \mu}^{N, N'} a_{\nu} b_{\mu} h_{\mu} h_{\nu} + \chi''$, wobei $\chi', \chi'' \in \mathfrak{R}_K$, so erkennt man nach dem Bewiesenen sofort, daß diese beiden Produkte auch in ihrer Normalform die gleichen Koeffizienten der Repräsentanten haben. Somit hat (φ, ψ) den Repräsentanten Null, d. h. es liegt ganz in \mathfrak{R}_K . Wir formulieren schließlich den

Satz 2: Der Restklassenring $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}_K$ ist isomorph zum kommutativen Ring \mathfrak{F}_K .

Die Anzahl der Erzeugenden x_1, x_2, \dots, x_n des Ringes sei eine gerade Zahl $n = 2s$. Der bequemen Formulierung wegen treffen wir folgende Bezeichnungsverabredung: Alle x_{2i-1} werden mit q_i und alle x_{2i} mit p_i bezeichnet. Wir definieren nun: Der Ring mit den Bedingungen 1.—4. — wobei die x_k durch die q_i, p_i ersetzt sind — und den definierenden Relationen

$$(q_i, q_k), (p_i, p_k), (p_i, q_k) \text{ für } i \neq k, (p_i, q_i) = (p_k, q_k); \quad (i, k = 1, 2, \dots, s)$$

werde als Heisenberg-Ring \mathfrak{F}_H bezeichnet.

Ist \mathfrak{R}_H das von den Relationen erzeugte Ideal in \mathfrak{F} , so ist \mathfrak{F}_H isomorph $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}_H$. Aus der letzten Relation folgt, daß in \mathfrak{F}_H alle (p_i, q_i) ($i = 1, 2, \dots, s$) durch dasselbe Element k dargestellt werden. Außerdem ist k aber mit allen Elementen von \mathfrak{F}_H vertauschbar. Dies folgt so: Das Element $(q_k, (p_i, q_i)) = (q_k, (p_k, q_k))$ liegt in \mathfrak{R}_H ; wegen der Identität

$$(q_k, (p_i, q_i)) = (p_i, (q_k, q_i)) + (q_i, (p_i, q_k))$$

liegt aber das erste Glied schon in \mathfrak{R}_H , also auch $(q_k, (p_k, q_k))$. Somit ist k in \mathfrak{F}_H mit allen q_i vertauschbar. Denselben Schluß kann man auch für p_i anwenden; also ist k mit allen Elementen von \mathfrak{F}_H vertauschbar.

Man kann k als zu K adjungierte Unbestimmte ansehen. Bildet man z. B. das von $k - a$ mit $a \in K$ erzeugte Ideal in \mathfrak{F}_H , so vermittelt dieses einen Homomorphismus von \mathfrak{F}_H in einen speziellen Heisenberg-Ring. Einen anderen speziellen Heisenberg-Ring vermittelt das von $k^2 + 1$ erzeugte Ideal. Dieser Fall kann allerdings auf den ersten zurückgeführt werden, wenn K durch Adjunktion der imaginären Einheit zum Körper der komplexen Zahlen erweitert wird.

Das Beispiel des Heisenberg-Ringes in nur zwei Erzeugenden q, p , erlaubt sehr einfach, eine bemerkenswerte Eigenschaft dieses Ringes zu konstatieren. In ihm gilt $(p, q) = k$. Durch Induktion stellt man sehr leicht fest, daß in \mathfrak{H}_H

$$(p^n, q) = k n p^{n-1}, \quad (q^m, p) = -k m q^{m-1}.$$

Den Faktor $n p^{n-1}$ bzw. $m q^{m-1}$ wollen wir die „Ableitung“ von p^n bzw. q^m nennen und mit $(p^n)'$ bzw. $(q^m)'$ bezeichnen. Die Ableitung $\mathfrak{P}'_{(p)}$ bzw. $\mathfrak{Q}'_{(q)}$ eines Polynoms $\mathfrak{P}_{(p)}$ bzw. $\mathfrak{Q}_{(q)}$ wird so gebildet, daß von jedem seiner Glieder die Ableitung genommen und diese alle addiert werden. Demnach gilt also

$$(\mathfrak{P}_{(p)}, q) = k \mathfrak{P}'_{(p)}, \quad (\mathfrak{Q}_{(q)}, p) = -k \mathfrak{Q}'_{(q)}.$$

Benutzt man z. B. die erste dieser Gln. in der Form

$$q \cdot \mathfrak{P}_{(p)} = \mathfrak{P}_{(p)} \cdot q - k \mathfrak{P}'_{(p)},$$

so beweist man durch Induktion die Beziehung

$$\begin{aligned} q^n \cdot \mathfrak{P}_{(p)} &= \mathfrak{P}_{(p)} \cdot q^n + (-k) \binom{n}{1} \mathfrak{P}'_{(p)} \cdot q^{n-1} + \\ &+ (-k)^2 \binom{n}{2} \mathfrak{P}''_{(p)} q^{n-2} + \dots + (-k)^n \binom{n}{n} \mathfrak{P}_{(p)}^{(n)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man, wenn $\mathfrak{Q}_{(q)}$ ein beliebiges Polynom vom Grad n in q ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{(q)} \mathfrak{P}_{(p)} &= \left(\sum_{r=0}^n a_r q^r \right) \mathfrak{P}_{(p)} = \\ &= \sum_{r=0}^n a_r \left\{ \mathfrak{P}_{(p)} \cdot q^r + (-k) \binom{r}{1} \mathfrak{P}'_{(p)} \cdot q^{r-1} + \dots + (-k)^r \mathfrak{P}_{(p)}^{(r)} \right\} \end{aligned}$$

und schließlich die übersichtliche Formel

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{(q)} \cdot \mathfrak{P}_{(p)} &= \mathfrak{P}_{(p)} \mathfrak{Q}_{(q)} + \frac{(-k)}{1!} \mathfrak{P}'_{(p)} \mathfrak{Q}'_{(q)} + \\ &+ \frac{(-k)^2}{2!} \mathfrak{P}''_{(p)} \mathfrak{Q}''_{(q)} + \dots + \frac{(-k)^n}{n!} \mathfrak{P}_{(p)}^{(n)} \mathfrak{Q}_{(q)}^{(n)}. \end{aligned}$$

Man kann also im Heisenberg-Ring jedes Polynom in eine Gestalt bringen, in der jedes seiner Glieder z. B. nur Potenzprodukte der Form $p^n q^m$ enthält.

§ 2.

Es interessieren nun Ringe von der bisher betrachteten Art, in denen überdies eine Klammeroperation erklärt ist, welche die algebraischen Eigenschaften der Poisson-Klammern hat. Diese Forderungen werden in einem Axiomensystem formuliert, das folgendermaßen lautet:

I 1. \mathfrak{G} ist ein Ring mit Einselement.

2. \mathfrak{G} enthält den Körper K der reellen Zahlen.

3. Jedes $a \in K$ ist mit jedem $\varphi \in \mathfrak{G}$ vertauschbar.

4. Die Elemente aus K und $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ bilden ein Erzeugendensystem von \mathfrak{G} .

II. In \mathfrak{G} existiert eine Operation, „Klammerbildung“ genannt, die je zwei Elementen ein drittes Element von \mathfrak{G} zuordnet. Sie hat folgende Eigenschaften^{a)}

^{a)} Das Axiomensystem II 1.–4. ist dem kürzeren (aber für axiomatische Zwecke weniger geeigneten) äquivalent:

$$[\varphi, \varphi] = -[\varphi, \varphi], [\varphi, \varphi_1 + \varphi_2] = [\varphi, \varphi_1] + [\varphi, \varphi_2], [\varphi, a \varphi] = a [\varphi, \varphi]$$

$$[\varphi, \varphi_1 \cdot \varphi_2] = [\varphi, \varphi_1] \varphi_2 + \varphi_1 [\varphi, \varphi_2], [q_i, q_k] = 0, [p_i, p_k] = 0, [p_i, q_k] = \delta_{ik}$$

1. a) $[q_i, q_k] = 0$, b) $[p_i, p_k] = 0$, c) $[p_i, q_k] = \delta_{ik}$, d) $[q_i, p_k] = -\delta_{ik}$
2. a) $[\varphi_1 + \varphi_2, q_i] = [\varphi_1, q_i] + [\varphi_2, q_i]$, $[\varphi_1 + \varphi_2, p_i] = [\varphi_1, p_i] + [\varphi_2, p_i]$
 b) $[a \varphi, q_i] = a [\varphi, q_i]$, $[a \varphi, p_i] = a [\varphi, p_i]$
 c) $[\varphi_1 \cdot \varphi_2, q_i] = [\varphi_1, q_i] \varphi_2 + \varphi_1 [\varphi_2, q_i]$, $[\varphi_1 \cdot \varphi_2, p_i] = [\varphi_1, p_i] \varphi_2 + \varphi_1 [\varphi_2, p_i]$
3. a) $[\varphi, \psi_1 + \psi_2] = [\varphi, \psi_1] + [\varphi, \psi_2]$
 b) $[\varphi, a \psi] = a [\varphi, \psi]$
 c) $[\varphi, \psi_1 \cdot \psi_2] = [\varphi, \psi_1] \psi_2 + \psi_1 [\varphi, \psi_2]$
4. $[\varphi, \varphi] = 0$.

Dabei sind φ, ψ, \dots beliebige Elemente aus \mathfrak{G} und $a \in K$. Man erkennt leicht, daß die Axiome II 1.—3. den Prozeß $[\varphi, \psi]$ festlegen, d. h. für vorgegebene φ und ψ aus \mathfrak{G} ist die Klammerbildung $[\varphi, \psi]$ nach II 1.—3. als Element von \mathfrak{G} eindeutig angebbar. Dasselbe gilt bezüglich der Axiome II 1., 2. für den speziellen Prozeß $[\varphi, q_i]$ bzw. $[\varphi, p_i]$.

Zunächst werde die Widerspruchslosigkeit dieses Axiomensystems gezeigt. Wir benutzen dazu den kommutativen Polynomring \mathfrak{F}_K . In § 1 wurde gezeigt, daß \mathfrak{F}_K den Axiomen I 1.—4. genügt. In \mathfrak{F}_K erklären wir in gewohnter Weise⁴⁾ eine partielle Differentiation $\frac{\partial}{\partial q_i}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial p_i}$. Sie genügt den Rechenregeln

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial q_k}{\partial q_i} &= \delta_{ik}, & \frac{\partial p_k}{\partial q_i} &= 0, \\ \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial q_i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}, & \frac{\partial (a \varphi)}{\partial q_i} &= a \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial (\varphi_1 \cdot \varphi_2)}{\partial q_i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \varphi_2 + \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Analoge Regeln gelten auch für $\frac{\partial}{\partial p_i}$. Andererseits kann man durch diese Regeln den Differentiationsprozeß in \mathfrak{F}_K auch axiomatisch erklären. Vergleicht man (1) mit den Axiomen II 1., 2., so erkennt man, daß die Prozesse $[\varphi, q_i]$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ bzw. $[\varphi, p_i]$ und $-\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$ die durch II 1., 2. geforderten Eigenschaften haben. Da aber der Prozeß der Klammerbildung $[\varphi, q_i]$ bzw. $[\varphi, p_i]$ durch diese Axiome eindeutig bestimmt ist, folgt, daß in \mathfrak{F}_K

$$[\varphi, q_i] = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad [\varphi, p_i] = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}.$$

Weiter stellt man fest, daß die Poisson-Klammer

$$\sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \right\}$$

alle Axiome II 1.—3. erfüllt. Da der Prozeß $[\varphi, \psi]$ durch diese Axiome aber eindeutig bestimmt ist und der obige Ausdruck auch II 4. erfüllt, gilt in \mathfrak{F}_K

$$[\varphi, \psi] = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \right\}.$$

⁴⁾ Vgl. etwa v. D. WAERDEN: Moderne Algebra I, 2. Aufl. 1937, § 20.

Damit ist die Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems I, II gezeigt. Es gilt nun noch nachzuweisen, daß die Axiome unabhängig sind, insbesondere daß das Axiom II 4. nicht aus den übrigen gefolgert werden kann.

Nach F. HAUSDORFF⁶⁾ führen wir im freien (nicht-kommutativen) Ring \mathfrak{F} lineare Operationen $u_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ bzw. $v_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ ein, welche in ihrer Anwendung auf ein beliebiges Potenzprodukt der $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ darin bestehen, daß man je einen Faktor q_i bzw. p_i durch u_i bzw. v_i ersetzt und alle so entstandenen Ausdrücke addiert. Sind A, B Potenzprodukte, die von q_i frei sind, so ist z. B.

$$u_i \frac{\partial}{\partial q_i} (A q_i^2 B q_i) = A u_i q_i B q_i + A q_i u_i B q_i + A q_i^2 B u_i.$$

Dabei kann u_i als neues, zu \mathfrak{F} adjungiertes Element aufgefaßt werden, es kann aber auch selbst ein Element aus \mathfrak{F} repräsentieren.

Die Hausdorff-Operation genügt folgenden Regeln

$$(2) \quad \begin{cases} u_i \frac{\partial}{\partial q_i} q_k = \delta_{ik} u_i, & u_i \frac{\partial}{\partial q_i} p_k = 0, \\ u_i \frac{\partial}{\partial q_i} (\psi_1 + \psi_2) = u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \psi_1 + u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \psi_2, \\ u_i \frac{\partial}{\partial q_i} (a \psi) = a \left(u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \psi \right), \\ u_i \frac{\partial}{\partial q_i} (\psi_1 \cdot \psi_2) = \left(u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \psi_1 \right) \psi_2 + \psi_1 \left(u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \psi_2 \right), \end{cases}$$

wobei $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{F}$ und $a \in K$. Analoges gilt natürlich auch für $v_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Die spezielle Hausdorff-Operation mit $u_i = 1$ ist ein Prozeß im nicht-kommutativen Ring \mathfrak{F} , der als sinngemäße Verallgemeinerung der kommutativen Differentiation aufgefaßt werden kann. Wenn im folgenden also von „Differentiation“ in \mathfrak{F} die Rede ist, so ist damit die Hausdorff-Operation $u_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ mit $u_i = 1$ gemeint. Diese Differentiation genügt ebenfalls den Regeln (1). Es sei an dieser Stelle betont, daß der Prozeß $u_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ nicht verwechselt werden darf mit dem Prozeß: Differentiation $\frac{\partial}{\partial q_i}$ und anschließende linksseitige Multiplikation des Resultates mit u_i !

Wir können nun dieselbe Schlußweise anwenden wie oben. Da die Axiome II 1., 2. die Klammerbildungen $[\varphi, q_i]$ bzw. $[\varphi, p_i]$ eindeutig festlegen, die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial p_i}$ bzw. $-\frac{\partial}{\partial q_i}$ aber dieselben Axiome erfüllen, folgt in \mathfrak{F}

$$[\varphi, q_i] = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad [\varphi, p_i] = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}.$$

Schließlich bilden wir die Hausdorff-Operation

$$(3) \quad \sum_{r=1}^s \left\{ u_r \frac{\partial}{\partial q_r} - v_r \frac{\partial}{\partial p_r} \right\} \psi; \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial q_r}.$$

Man erkennt, daß (3) alle Axiome II 1.—3. erfüllt, jedoch keineswegs II 4.; man kann leicht Elemente von \mathfrak{F} angeben — z. B. $\varphi = q_i^4 p_i^3$ —, für die

⁶⁾ F. HAUSDORFF: Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie. Ber. d. Ges. d. Wissensch. Leipzig, math.-phys. Klasse 58, 19 (1906).

$\sum_{r=1}^s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \frac{\partial}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial}{\partial p_r} \right\} \varphi \neq 0$ ist. Damit ist gezeigt, daß der freie Ring \mathfrak{F} mit der Hausdorff-Operation (3) ein System bildet, in welchem alle Axiome I, II mit Ausnahme von II 4. erfüllt sind. Daraus folgt die Unabhängigkeit des Axioms II 4. Die Stellung der übrigen Axiome zueinander ist durch die Konstruktion der Hausdorff-Operation klar erkennbar.

Die obigen Ausführungen zeigen, daß der Prozeß der Klammerbildung bereits durch die Axiome II 1.—3. in \mathfrak{G} festgelegt ist. Die Hinzunahme von II 4. schränkt also den Ring ein; wir sahen ja eben, daß II 4. im freien Ring \mathfrak{F} nicht gilt. Es ist nun die Frage zu klären, welche Konsequenzen die Hinzunahme von II 4. hat. Zunächst folgt aus II 2., 3.

$$[\varphi + \psi, \varphi + \psi] = [\varphi, \varphi] + [\psi, \psi] + [\varphi, \psi] + [\psi, \varphi],$$

und nach II 4. gilt somit

$$(4) \quad [\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi].$$

Da andererseits II 4. aus (4) gefolgert werden kann, ist die Hinzunahme von II 4. oder (4) zu dem übrigen Axiomensystem gleichwertig.

Bildet man nun mit $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ und $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$ die Klammerbildung $[\varphi, \psi]$ und berechnet sie unter Anwendung von II 3.c) und (4) einmal in der Reihenfolge: II 3.c) \rightarrow (4) \rightarrow II 3.c) \rightarrow (4) und zum anderen in der Reihenfolge: (4) \rightarrow II 3.c) \rightarrow (4) \rightarrow II 3.c), so erhält man

$$[\varphi, \psi] = [\varphi_1, \psi_1] \varphi_2 \psi_2 + \varphi_1 [\varphi_2, \psi_1] \psi_2 + \psi_1 [\varphi_1, \psi_2] \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 [\varphi_2, \psi_2]$$

$$[\varphi, \psi] = [\varphi_1, \psi_1] \varphi_2 \psi_2 + \varphi_1 [\varphi_2, \psi_1] \psi_2 + \psi_1 [\varphi_1, \psi_2] \varphi_2 + \varphi_1 \psi_1 [\varphi_2, \psi_2].$$

Daraus folgt die allgemeingültige Identität

$$(5) \quad [\varphi_1, \psi_1] (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1, \psi_1) [\varphi_2, \psi_2],$$

wobei wieder $(\varphi_2, \psi_2) = \varphi_2 \psi_2 - \psi_2 \varphi_2$. Da über $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ keinerlei Voraussetzungen gemacht worden sind, kann nun willkürlich über sie verfügt werden. Setzen wir z. B. $\varphi_1 = p_i, \psi_1 = q_i, \varphi_2 = q_i, \psi_2 = q_k$, so folgt nach II 1.

$$(6a) \quad (q_i, q_k) = 0.$$

Ebenso findet man mit $\varphi_2 = p_i, \psi_2 = p_k$,

$$(6b) \quad (p_i, p_k) = 0$$

und schließlich mit $\varphi_2 = p_i, \psi_2 = q_k (i \neq k)$,

$$(6c) \quad (p_i, q_k) = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Führen wir die Abkürzung $k_i = (p_i, q_i)$ ein, so erhalten wir aus (5) mit $q_1 = p_i, \psi_1 = q_i, \varphi_2 = p_i, \psi_2 = q_i$, nach II 1.

$$(6d) \quad k_i = k_i, \quad (i, l = 1, 2, \dots, s),$$

d. h. $k_1 = k_2 = \dots = k_s = k$. Lassen wir dagegen φ_1, ψ_1 beliebig und setzen wieder $\varphi_2 = p_i, \psi_2 = q_i$, so folgt aus (5)

$$[\varphi_1, \psi_1] k = (\varphi_1, \psi_1),$$

und ebenso durch Umbenennung der Indizes 1, 2 in (5)

$$k [\varphi_1, \psi_1] = (\varphi_1, \psi_1).$$

Daraus folgt, daß k mit jeder Klammerbildung und damit auch mit jedem Ringelement vertauschbar ist, da sich die $q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_s$ selbst als Klammerbildungen schreiben lassen (z. B. $q_i = \frac{1}{2} [p_i, q_i^*]$). Damit folgt also endgültig

$$(7) \quad k[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi)$$

für beliebige Elemente φ, ψ von \mathfrak{G} . Die Relationen (6a, b, c, d.) sind aber für $k \neq 0$ nichts anderes als die definierenden Relationen des Heisenberg-Ringes \mathfrak{H}_H . Damit haben wir den

Satz 3: Durch das Axiomensystem I, II wird — außer dem trivialen Fall, daß \mathfrak{G} der kommutative Ring ist — der Heisenberg-Ring eindeutig gekennzeichnet. Für die Klammerbildung gilt in ihm (7).

§ 3.

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen lassen erkennen, daß die Klammersymbole $[\varphi, \psi]$ eng mit der Hausdorff-Operation (3) zusammenhängen. Wir betrachteten einmal den freien Ring \mathfrak{F} und die in ihm erklärte Hausdorff-Operation (3) und zum anderen homomorphe Abbilder von \mathfrak{F} — den kommutativen Ring \mathfrak{F}_K und den Heisenberg-Ring \mathfrak{F}_H —, in denen Prozesse erklärt wurden, welche (bis auf II 4.) denselben Regeln genügen wie (3) in \mathfrak{F} : In \mathfrak{F}_K die Poisson-Klammern und in \mathfrak{F}_H die Beziehung (7). Somit erscheint die Frage naheliegend, ob bei den Homomorphismen von \mathfrak{F} auf \mathfrak{F}_K bzw. \mathfrak{F}_H durch die in \mathfrak{F} erklärte Hausdorff-Operation (3) in den beiden anderen Ringen die genannten Prozesse induziert werden.

Zu diesem Zweck werde zunächst die einfache Differentiation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — der bequemer Schreibweise wegen verwenden wir wieder die x_1, x_2, \dots, x_n — in \mathfrak{F} und ihr Verhalten bei Homomorphismen betrachtet. Die Differentiation erfüllt die Regeln (1); es ist klar, daß sie andererseits auch durch diese Regeln definiert werden kann.

Homomorphismen von \mathfrak{F} , bei welchen durch den in \mathfrak{F} erklärten Differentiationsprozeß im homomorphen Bild von \mathfrak{F} Prozesse induziert werden, die wieder den Regeln (1) genügen, mögen als *Differentiations-Homomorphismen* und die zugehörigen Ideale als *Differentiations-Ideale* bezeichnet werden. Man sieht sofort: \mathfrak{D} ist dann und nur dann ein *Differentiations-Ideal*, wenn mit jedem $f \in \mathfrak{D}$ auch $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathfrak{D}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist.

Bemerkenswerte Differentiations-Ideale erhalten wir aus den Konstanzelementen von \mathfrak{F} . Dabei heißt χ ein *Konstanzelement*, wenn alle $\frac{\partial \chi}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sind. (Die Elemente des Körpers K sind triviale Konstanzelemente.) Die Kommutatoren $(x_i, x_k) = x_i x_k - x_k x_i$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) sind Konstanzelemente. Ist weiter χ ein Konstanzelement, so sind auch die Ausdrücke (x_i, χ) ($i = 1, 2, \dots, n$) wieder Konstanzelemente. Da Summe und Produkt von Konstanzelementen wieder solche sind, erhält man den

Satz 4: Die Konstanzelemente bilden einen (echten) Unterring \mathfrak{K} in \mathfrak{F} , welcher bei der Klammerung^{a)} mit den Elementen x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in sich übergeht.

^{a)} Unter *Klammerung* eines Elementes φ mit einem anderen ψ ist der Ausdruck $(\varphi, \psi) = \varphi \psi - \psi \varphi$ verstanden. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem in § 2) gebrauchten Terminus „Klammerbildung“.

Ob \mathfrak{K} sich aus den iterierten Klammerungen $(x_i, x_k), (x_i, (x_k, x_l)), \dots$ erzeugen läßt, ist nicht entschieden. Wir zeigen nun

Satz 5: Jedes von Elementen aus \mathfrak{K} erzeugte (zweiseitige) Ideal \mathfrak{D} ist ein Differentiations-Ideal.

Denn jedes Element von \mathfrak{D} läßt sich in der Form darstellen $\sum \varphi_l \chi_l \psi_l$, wobei $\chi_l \in \mathfrak{K}$ und $\varphi_l, \psi_l \in \mathfrak{F}$ sind. Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi_l \chi_l \psi_l) = \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \right) \chi_l \psi_l + \varphi_l \chi_l \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \right),$$

und die rechte Seite ist selbst wieder Element von \mathfrak{D} . Dasselbe gilt natürlich auch für jede Summe solcher Ausdrücke. \mathfrak{D} ist also ein Differentiations-Ideal.

Das von den Kommutatoren (x_i, x_k) erzeugte Ideal \mathfrak{K} , welches den Homomorphismus $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_K$ vermittelt, ist nach Satz 5 ein Differentiations-Ideal. Bei dieser Abbildung wird also in \mathfrak{F}_K ein Prozeß induziert, der wieder den Regeln (1) genügt. Dieser muß aber mit der gewöhnlichen partiellen Differentiation kommutativer Polynome identisch sein, da die Regeln (1) die Differentiation eindeutig festlegen. Wir sehen also: Bei dem Homomorphismus $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_K$ geht die Hausdorff-Differentiation in \mathfrak{F} in die gewöhnliche Differentiation in \mathfrak{F}_K über.

Ein anderes bemerkenswertes Beispiel eines Differentiations-Ideals bildet das von den definierenden Relationen des Heisenberg-Ringes \mathfrak{F}_H — der Übersichtlichkeit halber verwenden wir für dieses Beispiel die $q_1, q_2, \dots, q_r, p_1, p_2, \dots, p_r$ — erzeugte Ideal \mathfrak{K}_H ; alle Relationen sind wieder Konstanzelemente in \mathfrak{F} . In \mathfrak{F}_H gilt

$$(8) \quad (q_i, q_l) = 0, (p_i, p_l) = 0, (p_i, q_l) = \delta_{il} k.$$

Weiter erfüllt der Prozeß (φ, q_i) bzw. (φ, p_i) als algebraische Beziehung sowohl in \mathfrak{F} als auch in \mathfrak{F}_H die bekannten Regeln

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2, q_i) &= (\varphi_1, q_i) + (\varphi_2, q_i), & (a \varphi, q_i) &= a (\varphi, q_i), \\ (\varphi_1 \cdot \varphi_2, q_i) &= (\varphi_1, q_i) \varphi_2 + \varphi_1 (\varphi_2, q_i) \end{aligned}$$

bzw. analoge mit p_i . Diese Regeln zusammen mit (8) sind nun den Regeln (1) äquivalent, wenn man die Differentiation in \mathfrak{F}_H noch mit dem Faktor k bzw. in \mathfrak{F} mit (p_l, q_l) multipliziert. Wegen der Eindeigkeitseigenschaft von (1) folgt damit in \mathfrak{F}_H

$$(9) \quad k \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = (\varphi, q_i), \quad -k \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = (\varphi, p_i).$$

Bei der homomorphen Abbildung $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_H$ induziert also die — mit (p_l, q_l) multiplizierte — Differentiation in \mathfrak{F} den Prozeß (φ, q_i) bzw. (φ, p_i) in \mathfrak{F}_H . Geht man zu einem speziellen Heisenberg-Ring über, in dem k ein Inverses k^{-1} besitzt, so induziert die Differentiation in \mathfrak{F} in diesem Heisenberg-Ring den Prozeß $k^{-1}(\varphi, q_i)$ bzw. $k^{-1}(\varphi, p_i)$.

Nunmehr wenden wir uns der eingangs aufgeworfenen Frage nach Homomorphismen für die Hausdorff-Operation $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (mit $u_i \in \mathfrak{F}$) zu. Zweckmäßigerweise wird man die Hausdorff-Operation durch die Regeln (2) definieren. Bei dem Problem, Homomorphismen von \mathfrak{F} anzugeben, bei welchem die Hausdorff-Operation in \mathfrak{F} Prozesse im homomorphen Bild von \mathfrak{F} induziert,

die wieder die Regeln (2) erfüllen?), handelt es sich um das Aufsuchen von Idealen zusammen mit einer Charakterisierung von Funktionenklassen in \mathfrak{F} , denen die u_i angehören müssen. Wir zeigen dazu folgenden

Satz 6: Die Hausdorff-Operation $\sum_{i=1}^n (\varphi, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $\varphi \in \mathfrak{F}$ hat die Eigenschaft

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ (\varphi, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \psi = (\varphi, \psi),$$

wobei $\psi \in \mathfrak{F}$. Sie führt also jedes Ideal von \mathfrak{F} in sich über.

Für den Beweis genügt es, ψ als Potenzprodukt $\psi = x_j x_k x_l \dots x_m$ anzunehmen; dabei brauchen aufeinanderfolgende Indizes nicht verschieden zu sein. Dann ist

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left\{ (\varphi, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \psi = \\ & = (\varphi, x_j) x_k x_l \dots x_m + x_j (\varphi, x_k) x_l \dots x_m + \dots + x_j x_k x_l \dots (\varphi, x_m). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist aber gleich (φ, ψ) , wovon man sich durch wiederholte Anwendung von $(\varphi, \psi_1 \cdot \psi_2) = (\varphi, \psi_1) \psi_2 + \psi_1 (\varphi, \psi_2)$ überzeugt. Wegen der gleichartigen Linearitätseigenschaften der beiden Seiten von (10) folgt damit die Gültigkeit für beliebiges $\psi \in \mathfrak{F}$.

Mit Satz 6 beweist man nun leicht, daß die für die Mechanik wesentliche Hausdorff-Operation (3) — sie werde noch mit den für die Abbildung belanglosen Faktoren (p_i, q_i) multipliziert — bei dem durch \mathfrak{R}_H vermittelten Homomorphismus $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_H$ in \mathfrak{F}_H den Prozeß (φ, ψ) induziert. Die Gln. (9) besagen, daß

$$\begin{aligned} (p_i, q_i) \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} &= (\varphi, q_i) + \Phi_{2i-1}, \\ -(p_i, q_i) \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} &= (\varphi, p_i) + \Phi_{2i}, \\ \Phi_{2i-1}, \Phi_{2i} &\in \mathfrak{R}_H \quad (i = 1, 2, \dots, s). \end{aligned}$$

Damit geht die — mit (p_i, q_i) multiplizierte — Hausdorff-Operation (3) über in

$$\left\{ \sum_{v=1}^n (\varphi, x_v) \frac{\partial}{\partial x_v} + \sum_{v=1}^n \Phi_v \frac{\partial}{\partial x_v} \right\} \psi, \quad \Phi_v \in \mathfrak{R}_H \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Die Anwendung von $\sum_v \Phi_v \frac{\partial}{\partial x_v}$ auf ein beliebiges $\psi \in \mathfrak{F}$ ergibt aber ein Element von \mathfrak{R}_H , während der erste Teil der Hausdorff-Operation nach Satz 6 jeden Homomorphismus gestattet, also auch den von \mathfrak{R}_H vermittelten. Damit erhalten wir

Satz 7: Bei dem durch das Ideal \mathfrak{R}_H vermittelten Homomorphismus des freien Ringes \mathfrak{F} auf den Heisenberg-Ring induziert die in \mathfrak{F} erklärte — mit beliebigem (p_i, q_i) multiplizierte — Hausdorff-Operation (3) in \mathfrak{F}_H den Prozeß (φ, ψ) .

⁷⁾ Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß mit jedem f , welches Element des den Homomorphismus vermittelnden Ideals ist, auch $u_i \frac{\partial}{\partial x_i} f$ wieder im Ideal liegt.

Geht man wieder zu einem speziellen Heisenberg-Ring über, in dem k ein Inverses k^{-1} besitzt, so entspricht der Hausdorff-Operation (3) in ihm also der Prozeß $k^{-1}(\varphi, \psi)$.

Das zu der homomorphen Abbildung von \mathfrak{F} auf den kommutativen Ring \mathfrak{F}_K gehörige Ideal \mathfrak{R}_K vermittelt ebenfalls einen Hausdorff-Homomorphismus; die u_i können dabei beliebige Elemente aus \mathfrak{F} sein. Dazu genügt es festzustellen, daß

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \cdot (x_k, x_l) \cdot \psi &= \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) \cdot (x_k, x_l) \cdot \psi + \\ &+ \varphi \cdot (x_k, x_l) \cdot \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \right) + \varphi \cdot \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k, x_l) \right) \cdot \psi, \end{aligned}$$

wobei $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$. Die beiden ersten Summanden rechter Hand sind wieder Elemente von \mathfrak{R}_K . Der dritte verschwindet, wenn $k, l \neq i$ oder $k = l = i$, andernfalls aber ($k = i, l \neq i$), ist er gleich $\varphi(u_i, x_l)\psi$, und dieser Ausdruck liegt ebenfalls in \mathfrak{R}_K , da nach § 1 für beliebiges $u_i \in \mathfrak{F}$ die Bildung $(u_i, x_l) \in \mathfrak{R}_K$ ist. Da bei dem Homomorphismus die Regeln (2) erhalten bleiben, diese aber in \mathfrak{F}_K lineare Differentialoperationen definieren, gilt der

Satz 8: Bei dem Homomorphismus des freien Ringes \mathfrak{F} auf den kommutativen Ring \mathfrak{F}_K induziert eine beliebige in \mathfrak{F} erklärte Hausdorff-Operation $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (mit $u_i \in \mathfrak{F}$) in \mathfrak{F}_K eine lineare Differentialoperation $u_i' \frac{\partial}{\partial x_i}$, wobei $u_i = u_i' \pmod{\mathfrak{R}_K}$ ist.

Wir haben also gesehen, daß die Hausdorff-Operation (3) bei dem Homomorphismus $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_K$ übergeht in die Differentialoperation der Poisson-Klammern und bei der Abbildung in einen speziellen Heisenberg-Ring, in dem der Repräsentant k von (p_i, q_i) ($i = 1, 2, \dots, s$) ein Inverses besitzt, in die algebraische Operation $k^{-1}(\varphi, \psi)$. Schließlich hat die Hausdorff-Operation (10) die Eigenschaft, bei jedem Homomorphismus von \mathfrak{F} (also auch bei $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_H$) in den Prozeß (φ, ψ) überzugehen, wohingegen sie bei $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_K$ auf Null abgebildet wird.

Die behandelten Polynomringe lassen sich nachträglich jeweils — wie aus den Beispielen des kommutativen und des Heisenberg-Ringes bekannt ist — zu Potenzreihenringen erweitern. Die betrachteten Prozesse gestatten es dann, den Begriff eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit seinen Lösungen in nicht-kommutative Potenzreihenringe zu übertragen. Damit scheinen sie mannigfacher Anwendung fähig.

(Eingegangen am 30. Januar 1951).

Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche. I.

Von

HERBERT MESCHKOWSKI in Berlin.

I. Übersicht.

Es ist bekannt, daß man Bereiche von endlichem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche abbilden kann. Für Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang behandeln die Dissertationen von FISCHER¹⁾ und GEORGI²⁾ Spezialfälle, und zwar die Arbeit von FISCHER symmetrische Bereiche, die Arbeit von GEORGI Bereiche, deren Randkomponenten sich gegen einen Punkt häufen und weiteren sehr speziellen Randbedingungen genügen.

Die vorliegende Arbeit erledigt im ersten Teil den Fall, daß sich die Ränder gegen endlich viele Punkte häufen. Dabei müssen gewisse Randbedingungen erfüllt sein.

Im zweiten Teil betrachten wir Bereiche mit endlich vielen Häufungsrändern, die nicht punktförmig sind. Wenn gewisse Abstandsbedingungen erfüllt sind, ist eine Abbildung auf einen Vollkreisbereich möglich. Vollkreisbereich heißt ein Bereich, bei dem jedes Randkontinuum Kreis oder Punkt ist. Ein Randkontinuum heißt isoliert, wenn sein Abstand von der Menge der übrigen Randkontinua positiv ist. Die übrigen Randkontinua heißen Häufungsränder.

II. Hilfssätze.

Hilfssatz I:

$W = f(z)$ möge den Kreisring $1 \leq |z| \leq r$ abbilden auf ein zweifach zusammenhängendes Gebiet G mit dem inneren Inhalt J . l sei die untere Grenze der Längen aller geschlossenen Kurven in G , die die innere Begrenzung umschließen. — Dann gilt:

$$(1) \quad J \geq \frac{l^2}{2\pi} \log r.$$

Beweis:

$z_1 = \log z$ bildet den längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen Kreisring auf ein Rechteck R der z_1 -Ebene mit den Seiten $\log r$ und 2π ab.

$w = f(z_1) = \varphi(z_1)$ leistet dann die Abbildung des Rechtecks R auf den längs des Bildes von $[1, r]$ aufgeschnittenen Bereich G . Der Flächeninhalt dieses Gebietes wird:

$$J = \iint_R |\varphi'|^2 d\xi d\eta = \int_0^{\log r} \int_0^{2\pi} |\varphi'|^2 d\eta d\xi.$$

Nach der SCHWARZSchen Ungleichung wird dann:

$$\int_0^{2\pi} 1^2 d\eta \int_0^{2\pi} |\varphi'|^2 d\eta \geq \left(\int_0^{2\pi} |\varphi'| d\eta \right)^2.$$

¹⁾ FISCHER, A.: Über die konforme Abbildung symmetrischer unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche. — Diss. Jena 1915.

²⁾ GEORGI, K.: Über die konforme Abbildung gewisser nichtsymmetrischer unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. — Diss. Jena 1915.

Der rechts in Klammern stehende Ausdruck ist aber die Bogenlänge des Bildes einer Parallelen zur imaginären Achse in der z_1 -Ebene. Nach Voraussetzung ist diese Länge $\geq l$. Also:

$$\int_0^{2\pi} |\varphi'|^2 d\eta \geq \frac{l^2}{2\pi}.$$

Daraus folgt:

$$J = \int_0^{\log r} \int_0^{2\pi} |\varphi'|^2 d\eta d\xi \geq \frac{l^2}{2\pi} \log r.$$

Das Gleichheitszeichen kann in (1) nur in dem für uns uninteressanten Fall $|\varphi'| = c$ stehen. Dieser Satz ist eine Modifikation des Hilfssatzes I von RENGEL³⁾.

Hilfssatz II:

$w = f(z)$ möge den Kreisring $1 \leq |z| \leq r$ abbilden auf ein zweifach zusammenhängendes Gebiet G mit der Minimalbreite d und der „Mittellänge“ λ . Dann gilt:

$$r - 1 \geq \frac{\pi d}{2\lambda}.$$

Dabei ist die „Mittellänge“ definiert als die untere Grenze der Längen aller die innere Begrenzung von G umschlingenden Kurven in G , die von jedem der beiden Ränder einen Abstand $\geq \frac{d}{2}$ haben.

Beweis:

Es bezeichne $\varphi(w)$ die Umkehrfunktion von $f(z)$. R sei der Radius eines Kreises, der ganz in G Platz hat. Sein Bild in der z -Ebene liegt also im Kreisring. Nach dem Verzerrungssatz muß im Bildgebiet des Kreises ein Kreis vom Radius $\frac{R}{4} \left| \frac{dz}{dw} \right|$ untergebracht werden können. Dabei ist $\frac{dz}{dw}$ die Ableitung im Mittelpunkt des Kreises mit R .

Es muß also sein:

$$\frac{r-1}{2} \geq \left| \frac{dz}{dw} \right| \cdot \frac{R}{4},$$

folglich

$$(3) \quad \left| \frac{dz}{dw} \right| \leq \frac{2(r-1)}{R}.$$

L_1 sei jetzt eine Kurve in G , die von beiden Rändern von G einen Abstand $\geq \frac{d}{2}$ hat. Dann gilt die Abschätzung (3) für $\left| \frac{dz}{dw} \right|$ für alle Punkte w der Kurve, wenn R durch $\frac{d}{2}$ ersetzt wird. Also:

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| \leq \frac{4(r-1)}{d}.$$

L^* sei das Bild von L_1 in der z -Ebene. λ_1 sei die Länge von L , λ^* die Länge von L^* . Dann gilt:

$$\lambda^* = \int \left| \frac{dz}{dw} \right| ds \leq \frac{4\lambda_1(r-1)}{d}.$$

λ^* muß aber größer als 2π sein, sofern L_1 den inneren Rand umschließt. Daraus folgt:

$$r - 1 \geq \frac{d\pi}{2\lambda_1}.$$

³⁾ RENGEL, E.: Über einige Schlitzprobleme der konformen Abbildung. „Schriften des Mathematischen Seminars Bd. I, 4 Berlin“ 1932.

Da diese Ungleichung gilt für alle Kurven L_1 in G , die den geforderten Abstand von den beiden Rändern haben und den inneren Rand umschließen, gilt sie auch für λ .

Hilfssatz III:

$B_{(1)}$ sei ein zweifach zusammenhängender Bereich mit dem inneren Inhalt $J_{(1)}$ und $l_{(1)}$ als unterer Grenze für die Länge der Kurven in $B_{(1)}$, die die innere Begrenzung umschlingen. — $B_{(2)}$ sei ein zweifach zusammenhängender Bereich mit der Minimalbreite $d_{(2)}$ und der „Mittellänge“ $\lambda_{(2)}$. Wenn eine umkehrbar eindeutige schlichte Abbildung zwischen beiden Bereichen möglich ist, so gilt:

$$(4) \quad J_{(1)} \geq \frac{l_{(1)}^2}{2\pi} \log \left(\frac{\pi d_{(2)}}{2\lambda_{(2)}} + 1 \right).$$

Zum Beweis braucht man nur $B_{(1)}$ auf einen Kreisring abzubilden und die beiden Hilfssätze I und II anzuwenden.

III. Ein Abbildungssatz.

\mathfrak{B} sei ein Bereich der z -Ebene, der von abzählbar vielen Randkomponenten begrenzt wird. Die Häufungsränder seien n einzelne Punkte. Wenn die den n punktförmigen Häufungsrändern zugeordneten Sperrstreifensysteme $\mathfrak{S}_{v\mu}$ ($v = 1 \dots n$, $\mu = 1, \dots, m, \dots$) einen positiven Modul haben, so ist eine Abbildung von \mathfrak{B} auf einen nur von Kreisen begrenzten Bereich möglich, die sich gegen n Punkte häufen.

Das dem Häufungsrandpunkt H_v zugeordnete Sperrstreifensystem ist eine Folge von untereinander punktfremden zweifach zusammenhängenden Bereichen, die nur innere Punkte von \mathfrak{B} enthalten und für $\mu > \mu_0$ ganz innerhalb eines beliebig kleinen Kreises um den Häufungspunkt H_v liegen. Innerhalb des von der inneren Begrenzung von $\mathfrak{S}_{v\mu}$ begrenzten Gebiets soll kein Häufungspunkt mit einer Nummer $\neq v$ liegen.

$$\text{Modul: } k = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{d_{v\mu}}{\lambda_{v\mu}}$$

Dabei ist $d_{v\mu}$ die Minimalbreite, $\lambda_{v\mu}$ die „Mittellänge“ des Bereichs mit der Nummer μ .

Beweis:

1. Das Iterationsverfahren.

∞ sei innerer Punkt von \mathfrak{B} . Das kann durch eine lineare Transformation stets erreicht werden. — Dann gibt es einen Kreis mit dem Radius R um den Nullpunkt, der alle Randkomponenten von \mathfrak{B} enthält.

$z_n = z_n(z)$ sei die Funktion, die den von den n Randkomponenten ($1, \dots, n$) begrenzten Bereich auf einen Kreisbereich abbildet, so daß $z_n(z)$ im Unendlichen die Entwicklung

$$(5) \quad z_n = z + \{o\}$$

hat. Dabei werden nur die isolierten Ränder (in beliebiger Reihenfolge) erfaßt. Durch (5) ist nach KOEBE die Funktion $z_n(z)$ eindeutig festgelegt.

Es ist zu zeigen, daß die Folge $z_n(z)$ oder jedenfalls eine Teilfolge $z_{n_k}(z)$ gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die die geforderte Abbildung leistet.

Wegen der Normierung (5) kann das Bild des Kreises K mit dem Radius R in der z_n -Ebene nicht beliebig nahe an ∞ heranreichen. Es gilt vielmehr nach dem Verzerrungssatz von BIEBERBACH:

$$|z_n(z)| \leq 4R \quad \text{für} \quad |z| = R,$$

$z_n - z$ ist dann eine außerhalb von K reguläre beschränkte Funktion. Auf K gilt:

$$|z_n(z) - z| \leq 5R.$$

Deshalb kann aus der Folge $z_n(z) - z$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $z_{n_k}(z) - z$ herausgegriffen werden. Also konvergiert auch $z_{n_k}(z)$ gegen eine Grenzfunktion $\zeta(z)$. Das gilt zunächst außerhalb von K . Nach dem Vitalischen Doppelreihensatz folgt aber daraus die Konvergenz in jedem inneren Teilgebiet von \mathfrak{B} . Als Grenzfunktion von schlicht abbildenden Funktionen ist $\zeta(z)$ wieder schlicht.

Der Einfachheit wegen soll im folgenden immer die konvergierende Teilfolge mit $z_n(z)$ bezeichnet werden.

Jede Randkomponente b_v wird durch alle Funktionen $z_n(z)$ mit $n > v$ immer wieder auf einen Kreis abgebildet. Daraus folgt, daß auch die Grenzfunktion $\zeta(z)$ diese Randkomponente auf einen Kreis abbildet. Das kann so begründet werden:

$K_n^{(A)}$ sei eine kreisförmige Randkomponente in der z_n -Ebene. Die Funktionen $z_{n+\sigma}(z_n)$ sind dann auf $K_n^{(A)}$ auch noch regulär. Diese Funktionen sind nämlich auch noch in dem durch Spiegelung des Bildbereiches in der z_n -Ebene an dem Kreis $K_n^{(A)}$ entstehenden Bereich erklärt, so daß die Punkte des Kreises $K_n^{(A)}$ als innere Punkte des durch Hinzunahme des Spiegelbereiches vergrößerten Gebietes gelten können, in dem nach dem Spiegelungsprinzip die Folge ebenfalls gleichmäßig konvergiert.

Sind a, b, c, d irgend 4 Punkte auf $K_n^{(A)}$, so ist das Doppelverhältnis $(abc d)$ reell, $J(abc d) = 0$. $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma, \delta_\sigma$ seien die Bilder von a, b, c, d in der $z_{n+\sigma}$ -Ebene. Dann gilt:

$$J(\alpha_\sigma \beta_\sigma \gamma_\sigma \delta_\sigma) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{\sigma \geq \infty} J(\alpha_\sigma \beta_\sigma \gamma_\sigma \delta_\sigma) = J(\alpha \beta \gamma \delta) = 0.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Bilder von a, b, c, d in der ζ -Ebene. Also liegen auch die Bildpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der ζ -Ebene auf einem Kreis $K^{(A)}$.

2. Die Häufungsänder.

Es ist nun zu zeigen, daß die Kreise der ζ -Ebene sich gegen n Punkte häufen. Würden als Randkomponenten, gegen die sich fremde Ränder häufen, auch nicht punktförmige Gebilde auftreten, so müßten die Bilder gewisser unendlich vieler Sperrstreifen jedenfalls diesen Rand umschlingen, denn zwischen den einzelnen Bildstreifen kann es immer nur endlich viele Bilder von Randkomponenten geben.

Sei l der Durchmesser des Häufungsrandes, so gilt für den Flächeninhalt der Bilder gewisser unendlich vieler $\mathfrak{S}_{\nu\mu}$:

$$(6) \quad J_{\nu\mu} \geq \frac{l^2}{2\pi} \log \left(1 + \frac{\pi}{2} k \right).$$

Dies folgt aus (4) unter Berücksichtigung der Randbedingung für die Sperrstreifen.

$J_{\nu\mu}$ wäre größer als eine von μ unabhängige Zahl. Da die Bilder der Sperrstreifen in der ζ -Ebene ein endliches Gebiet bedecken, müßte $\Sigma J_{\nu\mu}$ endlich sein. Das ist ein Widerspruch mit (6).

Aus der Normierung (5) kann man wie im Fall der Bereiche von endlichem Zusammenhang auf die Unität der Abbildungsfunktion schließen. Da aber für den Fall der unten zu behandelnden allgemeinen Abbildung die Unitätsfrage für eine spätere Untersuchung zurückgestellt werden soll, sei auch hier auf diese Frage nicht weiter eingegangen. Er ergibt sich aus der unbegrenzten Spiegelungsfähigkeit von Kreisbereichen. Der Nachweis ist bereits in der Arbeit von GEORGI geführt.

IV. Ein Abbildungssatz für Bereiche mit nicht punktförmigen Häufungsändern.

Die Ränderbedingung:

Die isolierten Ränder B_i des abzubildenden Bereiches B mit endlich vielen Häufungsändern H_μ sollen folgenden Bedingungen genügen:

1. Alle Ränder (einschließlich der Häufungsänder) sollen analytische Kurven sein. (Diese Voraussetzung werden wir später lockern.)

2. B_i habe die Länge l_i und den Abstand r_i von der Menge der Häufungsänder und den Abstand δ_i von der Menge der von B_i verschiedenen Randkomponenten. Um jeden Punkt von B_i läßt sich dann ein Kreis vom Radius δ_i zeichnen, der keine Punkte fremder Ränder enthält. Dann soll es zwei Konstanten k_1 und k_2 (> 0) geben, so daß

$$(7) \quad \delta_i > k_1 l_i$$

$$(8) \quad \delta_i > k_2 r_i$$

gilt für alle i .

Aus der Ränderbedingung folgt:

Jeder endliche Punkt von \mathfrak{B} kann mit jedem Häufungsrand durch eine stückweise analytische Kurve von endlicher Länge verbunden werden, die aus inneren Punkten von \mathfrak{B} besteht.

Beweis:

d sei die Länge einer Strecke, die P mit dem Häufungsrand verbindet. Die Strecke kann abzählbar oft Ränder von der Länge l_i treffen. Die zwischen diesen Rändern liegenden Teile der Strecke von der Länge d mögen die Längen ε_μ haben. Dann gilt:

$$d \geq \sum \varepsilon_\mu \geq \sum \delta_i > k_1 \sum l_i.$$

Also:

$$(9) \quad \sum l_i < \frac{d}{k_1}.$$

Jetzt werde jede der von der Strecke getroffenen Randkomponenten von einer Kurve B_i^* umgeben, die von B_i den konstanten Abstand d_i hat. Dabei ist:

$$(10) \quad d_i = \text{Min} \left(\frac{\delta_i}{4}, \frac{l_i}{4} \right).$$

Bei konvexen Kurven B_i ist die Kurve B_i^* der außerhalb von B_i liegende Teil der Enveloppe der Kreise vom Radius d_i , die man um die Punkte von B_i zeichnen kann. — Im Falle von nicht konvexen Kurven B_i können bei der Enveloppe Überschneidungen auftreten, so daß die Ebene durch die sich überschneidende Kurve in mehrere Gebiete g_α zerlegt wird. Eins der Gebiete g_α wird den unendlich fernen Punkt im Innern enthalten. Als B_i^* wird dann der Rand dieses Gebietes g_α gewählt⁴⁾.

⁴⁾ Man kann die hier und später bei der „Streifenbildung“ (S. 400) auftretenden Schwierigkeiten übrigens dadurch vermeiden, daß man zum Ausgangsbereich einen Kreisschlitzbereich wählt. Bekanntlich hat GRÖRZSCH (Ber. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. 81, S. 51 ff) gezeigt, daß man Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Kreisschlitzbereiche abbilden kann.

Dann gilt für die Länge der Kurve B_r^* :

$$(11) \quad l_r^* \leq l_r + 2\pi d_r.$$

Für konvexe Kurven B_r steht in (11) das Gleichheitszeichen. Das kann man aus der Tatsache ableiten, daß B_r und B_r^* eine gemeinsame Evolute haben. Bei nicht konvexen Kurven kann wegen der fortzulassenden Überschneidungen das Zeichen $<$ stehen.

Die P und den Häufungsrand verbindende stückweise analytische Kurve C kann nun aus Intervallen der Strecke von der Länge d und aus Teilbögen der Kurven B_r^* zusammengesetzt werden. Sie ist sicher kürzer als die Summe von d und den Längen dieser Bögen.

Also:

$$L(C) < d + \sum l_r^* \leq d + \sum (l_r + 2\pi d_r) \leq d + \sum l_r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen (9) folgt daraus:

$$(12) \quad L(C) < d \left(1 + \frac{3}{k_1}\right).$$

Hilfssatz:

Die Ränderbedingungen (7) und (8) sind invariant gegenüber konformer Abbildung des von den Häufungsändern H_μ begrenzten abgeschlossenen Bereichs \mathfrak{B} . Das heißt, daß auch im Bildbericht Konstanten \bar{k}_1 und \bar{k}_2 von entsprechender Eigenschaft bestehen. Sie brauchen nicht gleich k_1 und k_2 zu sein.

Beweis:

Sind $\bar{\delta}_r$, \bar{l}_r und \bar{r}_r die entsprechenden Bezeichnungen für die Bilder, so gilt:

$$\frac{\bar{\delta}_r}{\bar{l}_r} > \frac{\frac{1}{4} \text{Min } |f'| \cdot \delta_r}{l_r \cdot \text{Max } |f'|} > \frac{k_1}{4} \cdot \frac{\text{Min } |f'|}{\text{Max } |f'|} = \bar{k}_1.$$

$\text{Min } |f'|$ und $\text{Max } |f'|$ sind Minimum und Maximum von $|f'|$ in dem durch die Häufungsänder H_μ begrenzten Bereich \bar{B} . Da die H_μ und ihre Bilder analytische Kurven sind und im Unendlichen $|f'(z)| = 1$ gilt, ist $\bar{k}_1 \neq 0, \neq \infty$. Für (8) gilt das entsprechende.

Der Abbildungssatz:

Es gibt eine Funktion $\zeta = \zeta(z)$, die den Bereich \mathfrak{B} mit den geforderten Randbedingungen auf einen Kreisbereich von unendlich hohem Zusammenhang abbildet.

V. Beweis des Abbildungssatzes.

1. Das Iterationsverfahren:

Das Iterationsverfahren ist das gleiche wie im oben behandelten Fall, nur mit dem Unterschied, daß hier zunächst die Häufungsänder auf Kreise abgebildet werden sollen. $z_1 = z_1(z)$ möge den nur von den Häufungsändern begrenzten Bereich \mathfrak{B} auf einen Kreisbereich abbilden. $z_2(z)$ bilde dann die m Häufungsänder und eine weitere Randkomponente B_1 auf Kreise ab. $z_{n+1}(z)$ bildet dann den von den m Häufungsändern und n weiteren Randkomponenten B_n begrenzten Bereich auf einen Kreisbereich von $(m+n)$ -fachem Zusammenhang ab. Alle Abbildungsfunktionen werden im Unendlichen nach (5) normiert. Dann ergibt sich die Konvergenz ebenso wie in dem bereits

erledigten Fall. Es läßt sich auch hier ebenso zeigen, daß die Randkomponenten B_r durch die Grenzfunktion $\zeta(z)$ auf Kreise abgebildet werden. Besondere Schwierigkeit macht nur der Nachweis, daß auch die Häufungsänder des Bildbereiches in endlicher Zahl auftreten und aus Kreisen (oder Punkten) bestehen.

2. Der Grenzkreis:

In der z_1 -Ebene sind die Bilder der Häufungsänder bereits Kreise, und bei allen Abbildungen $z_n(z_1)$ werden diese Kreise wieder auf Kreise abgebildet. Wählen wir auf dem Bild $K_\mu^{(1)}$ eines Häufungsrandes in der z_1 -Ebene 3 Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Die Bilder dieser Punkte in der z_n -Ebene seien $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Es läßt sich dann eine Teilfolge $z_{r_n}(z_1)$ aus den $z_n(z)$ auswählen, für die die Punkte $\alpha_{r_n}, \beta_{r_n}, \gamma_{r_n}$ gegen drei Punkte α, β, γ konvergieren. — Der Einfachheit wegen soll im folgenden die konvergente Teilfolge z_{r_n} mit z_n bezeichnet werden. K_μ sei der durch die Punkte α, β und γ gelegte Kreis, $K_\mu^{(n)}$ die Bilder von $K_\mu^{(1)}$, die durch die Funktionen $z_n(z_1)$ geliefert werden. Wegen der Konvergenz

$$\alpha_n \rightarrow \alpha, \beta_n \rightarrow \beta, \gamma_n \rightarrow \gamma$$

werden die Kreise $K_\mu^{(n)}$ für genügend großes n von dem „Grenzkreis“ K_μ einen beliebig kleinen Maximalabstand haben. Unter dem Maximalabstand ist dabei das Maximum des Abstandes zu verstehen, den ein einzelner Punkt des einen Kreises vom andern Kreis haben kann.

Da nur endlich viele Häufungsänder auftreten, kann die konvergierende Teilfolge z_n so ausgewählt werden, daß für jeden der m Häufungsänder ein solcher Grenzkreis K_μ existiert. Der Kreis kann übrigens nicht in eine Gerade entarten, weil wegen der Normierung im Unendlichen die Bilder der Ränder ganz innerhalb eines endlichen Kreises liegen müssen.

Die Vermutung liegt nahe, daß dieser Grenzkreis K_μ das Bild von $K_\mu^{(1)}$ in der z_1 -Ebene ist. Das soll im folgenden bewiesen werden.

Zunächst ist zu zeigen, daß kein Punkt von K_μ innerer Punkt des Bildbereiches \mathfrak{B}_∞ sein kann, auf den \mathfrak{B} durch $\zeta(z)$ abgebildet wird. — Wäre $\zeta^* = \zeta(z^*)$ ein solcher innerer Punkt von \mathfrak{B}_∞ , so gäbe es in der z -Ebene um den Punkt z^* einen Kreis vom Radius ϱ , der nur innere Punkte von \mathfrak{B} enthält. Nach dem Verzerrungssatz müßte das Bild dieses Kreises in der ζ -Ebene einen Kreis vom Radius $\varrho^* = \frac{\varrho}{4} |\zeta'(z^*)|$ und dem Mittelpunkt ζ^* enthalten. Wählt man n genügend groß, so wird

$$(13) \quad |\zeta(z^*) - z_n(z^*)| < \frac{\varrho^*}{4}, \quad |z_n'(z^*)| > \frac{3}{4} |\zeta'(z^*)|$$

sein. Die Bilder des Kreises um z^* in der z_n -Ebene müßten also Kreise vom Radius $\frac{3}{4} \varrho^*$ enthalten. Wegen (13) müßte es also um ζ^* einen Kreis mindestens vom Radius $\frac{\varrho^*}{2}$ geben, in dem keine Randpunkte von \mathfrak{B}_n liegen⁵⁾. Dem widerspricht die Tatsache, daß die Kreise $K_\mu^{(n)}$ vom Kreis K_μ für genügend großes n einen beliebig kleinen Abstand haben. Die Punkte von K_μ sind also sicher nicht innere Punkte von \mathfrak{B}_∞ . Es bleibt zu zeigen, daß der Häufungsrand tatsächlich mit dem Grenzkreis zusammenfällt.

⁵⁾ \mathfrak{B}_n ist das Bild von \mathfrak{B} in der z_n -Ebene.

3. Der Häufungsrand:

Wir untersuchen die Abbildung eines der m Häufungsgränder und lassen dabei im folgenden den Index μ fort. — In der z_1 -Ebene ist der Häufungsrand auf einen Kreis K_1 abgebildet.

Der entsprechende Rand in der ζ -Ebene heiße R^* . R^* ist also das Kontinuum von Randpunkten von \mathfrak{B}_∞ , das \mathfrak{B}_∞ vom Innern des Grenzkreises K trennt. Es bleibt zu zeigen, daß R^* mit der Peripherie von K zusammenfällt. — R^* möge von K einen Maximalabstand $D > 0$ haben. Der Maximalabstand ist das Maximum des Abstandes, den ein einzelner Punkt der Punktmenge R^* vom Kreis K haben kann (Fig. 1).

Es ist zu beachten, daß nach dem oben bewiesenen Hilfssatz die im Gebiet \mathfrak{B} geltenden Randbedingungen auch im Gebiet \mathfrak{B}_1 gelten, mit entsprechenden anderen Konstanten. Wir wollen im folgenden mit k_1 und k_2 die Werte dieser Konstanten aus (7) und (8) für das Gebiet \mathfrak{B}_1 bezeichnen. Ebenso sollen sich δ_1 , l_1 , r_1 auf \mathfrak{B}_1 beziehen.

Um den Kreis K_1 wird eine geschlossene Kurve gelegt, die ganz aus inneren Punkten besteht und von K_1 einen Maximalabstand d hat, der beliebig klein gewählt werden kann. Diese Kurve wird folgendermaßen konstruiert:

ϱ_1 sei der Radius von K_1 , \mathfrak{Q}_1 die Bilder von B_1 in der z_1 -Ebene. Dann wird um den Mittelpunkt M_1 von K_1 ein Kreis vom Radius $\varrho_1 + d$ gezeichnet ($d < \frac{\varrho_1}{4}$). Dieser Kreis kann nur endlich viele Ränder treffen. Diese Randkomponenten \mathfrak{Q}_1^* werden von Kurven \mathfrak{Q}_1^* umgeben, die von \mathfrak{Q}_1^* den konstanten Abstand

$$\Delta_1 = \text{Min} \left(\frac{d}{4}, \frac{d_1'}{4} \right)$$

haben.

Die entsprechenden Kurven \mathfrak{Q}_1^* werden auch für solche Randkomponenten angelegt, die von dem Kreis mit dem Radius $\varrho_1 + d$ zwar nicht getroffen werden, die aber doch so nahe liegen, daß ihr Abstand von diesem Kreis kleiner als Δ_1 ist. Dann wird eine stückweise analytische Kurve \mathfrak{E}_1 zusammengesetzt aus den innerhalb des Kreises K ($\varrho_1 + d$) gelegenen Teilen der Kurven \mathfrak{Q}_1^* und den dazwischen liegenden Intervallen der Peripherie des Kreises

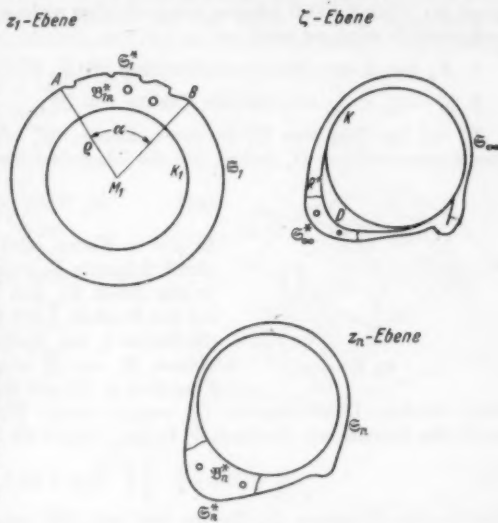


Fig. 1.

$K(\varrho_1 + d)$. (Fig. 1 und 2.) Diese Kurve \mathfrak{S}_1 hat dann von allen Rändern einen Abstand $\geq d_1$.

Das Bild dieser Kurve \mathfrak{S}_1 in der ζ -Ebene ist eine Kurve \mathfrak{S}_∞ , die den Häufungsrand R^* umschlingt. Es muß ein Teilstück \mathfrak{S}_∞^* dieser Kurve geben, für das der Abstand vom Grenzkreis $K \geq \frac{3}{4}D$ ist.

Dem Kurvenstück \mathfrak{S}_∞^* entspricht ein Teil \mathfrak{S}_1^* der Kurve \mathfrak{S}_1 in der z_1 -Ebene. Die Endpunkte dieses Kurvenstückes seien A und B. A und B und damit der Winkel AMB hängen von d ab, aber nicht von n . Wenn n genügend groß gewählt wird, so wird

1. K_n von K eine Maximalentfernung $M(K_n, K) < \frac{D}{10}$ haben,

2. $|\zeta - z_n| < \frac{D}{10}$ sein für alle Punkte von \mathfrak{S}_1^* .

\mathfrak{S}_n^* sei das Bild von \mathfrak{S}_1^* in der z_n -Ebene. \mathfrak{S}_n^* wird dann vom Kreis K_n eine Maximaldistanz D_n haben, für die folgende Abschätzung gilt:

$$(14) \quad D_n > D \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \right) > \frac{D}{2}.$$

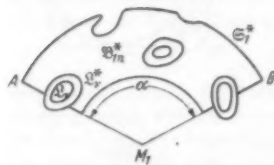


Fig. 2.

In der z_1 -Ebene wird jetzt ein Bereich \mathfrak{B}_{1n}^* durch folgende Begrenzung festgelegt:

In das durch \mathfrak{S}_1^* , den Kreis K_1 und die Schenkel des Winkels AMB begrenzte Gebiet werden die Bilder L_v der (endlich vielen) Randkomponenten B_v von \mathfrak{B} eingetragen, die durch die Funktion $z_n(z_1)$ auf Kreise der z_n -Ebene abge-

bildet werden. Diese Kurven L_v werden durch Kurven L_v^* umgeben, die von L_v den konstanten Abstand ϑ_v haben. Dabei ist

$$(15) \quad \vartheta_v = \min \left(\frac{\vartheta_v}{4}, \frac{l_v}{4} \right) \quad l_v = L(L_v).$$

Einzelne der L_v^* mögen die Radien MA oder MB schneiden. Dann wird aus den außerhalb des Winkelraumes AMB liegenden Teilen der L_v^* und den zwischen den L_v^* verbleibenden Intervallen eine „Radialkurve“ zusammengesetzt, die A bzw. B mit dem Kreis K_1 verbindet. Der Bereich \mathfrak{B}_{1n}^* soll dann begrenzt sein von \mathfrak{S}_1 , K_1 und den beiden „Radialkurven“ R_A und R_B als äußerer Umrandung und den (endlich vielen) in diesem Bereich liegenden Kurven L_v . Die Länge dieser „Radialkurven“ ist nach (12) endlich.

Es ist zu beachten, daß der in der z_1 -Ebene gelegene Bereich \mathfrak{B}_{1n}^* von der Nummer n der Abbildungsfunktion z_n abhängt. Dagegen ist der Randteil \mathfrak{S}_1^* unabhängig von n festgelegt.

In der z_n -Ebene entspricht dem Bereich \mathfrak{B}_{1n}^* ein Bildbereich \mathfrak{B}_n^* . Der Grundgedanke des Abbildungsbeweises ist nun folgender: In \mathfrak{B}_{1n}^* ist der Maximalabstand zwischen \mathfrak{S}_1^* und K_1 gleich der Strecke d , die wir beliebig klein wählen können. Im Bildbereich \mathfrak{B}_n^* ist der Abstand zwischen \mathfrak{S}_n^* und K_n größer oder gleich $\frac{D}{2}$. Deshalb müssen so große Verzerrungen auftreten, daß der Flächeninhalt von \mathfrak{B}_n^* beliebig groß werden kann. Das soll nun ausgeführt werden.

4. Abschätzung des Flächeninhalts:

Zur Abschätzung des Flächeninhalts wird der Bereich \mathfrak{B}_{1n}^* in geeignete Radialstreifen zerlegt. Das geschieht so:

MR_i seien Strecken, die M mit Punkten R_i von \mathfrak{S}_1^* verbinden⁶⁾. R_i soll dabei der erste Treffpunkt eines Radius mit \mathfrak{S}_1^* sein, der bei Durchlaufung des Radius von M aus angetroffen wird. Dabei ist es gleichgültig, ob R_i auf dem Kreis $K(\varrho_1 + d)$ selbst oder auf einer der „Umgehungskurven“ liegt (Fig. 3). Die Schnittpunkte mit K_1 heißen \bar{R}_i . Aus diesen Strecken und geeigneten „Umgehungskurven“ für die geschnittenen Ränder werden nun stückweise analytische Kurven konstruiert, die innerhalb von $\mathfrak{B}_{1,n}^*$ von K_1 zu \mathfrak{S}_1^* führen und nur aus inneren bzw. Randpunkten bestehen. Dabei bleibt der die äußere Kurve \mathfrak{Q}_v^* berührende Radius (in der Nähe von \mathfrak{Q}_v) unverändert. MR_1 und MR_2 seien solche Radien, MR_3 sei die Winkelhalbierende von $\angle R_1MR_2$, $\angle R_1MR_3 = \varphi$. Da aus (7) $l_v \rightarrow 0$ folgt, werden die Winkel φ beliebig klein, wenn d entsprechend klein gewählt wird.

Betrachten wir zunächst konvexe Randkomponenten \mathfrak{Q}_v . MR_3 möge die Kurve \mathfrak{Q}_v in U und V schneiden. Dann bilden \bar{R}_3U , VR_3 und die beiden Teile der Kurve \mathfrak{Q}_v die Ränder der zu bildenden Streifen. Ein zwischen MR_1 und MR_2 verlaufender Radius MR_4 wird zum Schnitt gebracht mit der Kurve \mathfrak{Q}_v^v , die \mathfrak{Q}_v im Abstand δ_v^v umschlingt. Dabei ist δ_v^v durch die Vorschrift festgelegt:

$$(16) \quad \frac{\delta_v^v}{\delta_v} = \frac{\psi}{\varphi}.$$

Dabei ist $\psi = \angle R_4MR_3$. C und D seien die Schnittpunkte von MR_4 mit der Kurve \mathfrak{Q}_v^v . Dann wird die Strecke CD durch den entsprechenden Bogen der Kurve \mathfrak{Q}_v^v ersetzt. Ebenso ist mit jedem zwischen MR_1 und MR_2 verlaufenden Radius MR_6 zu verfahren. Den Sektoren R_4MR_6 werden dabei Streifen zugeordnet, die ganz aus inneren Punkten von $\mathfrak{B}_{1,n}^*$ bestehen. Für die Breite $\Delta\theta$ dieser Streifen gilt:

$$(17) \quad \frac{\Delta\theta}{\delta_v} = \frac{\Delta\psi}{\varphi}.$$

Dabei ist $\Delta\psi = \angle R_4MR_6$.

Bei nicht konvexen Kurven \mathfrak{Q}_v ist die Kurve \mathfrak{Q}_v^* (bzw. \mathfrak{Q}_v^v) entsprechend der Vorschrift auf S. 396 anzulegen. Die Radien können die ihnen zugeordnete Kurve \mathfrak{Q}_v^v mehr als zweimal treffen. Hier wird die Radialstrecke zwischen dem ersten und dem letzten Schnittpunkt mit der Kurve \mathfrak{Q}_v^v durch das Kurvenstück ersetzt. Auf diese Weise kann es geschehen, daß innere Punkte von $\mathfrak{B}_{1,n}^*$, die auf einer außerhalb von \mathfrak{Q}_v^* liegenden Radialstrecke liegen, bei der Streifenbildung nicht erfaßt werden (E in Fig. 3). Das entsprechende gilt, wenn ein Radius (MR_3) die Kurve \mathfrak{S}_1^* mehrfach trifft. (Der Punkt F liegt in keinem

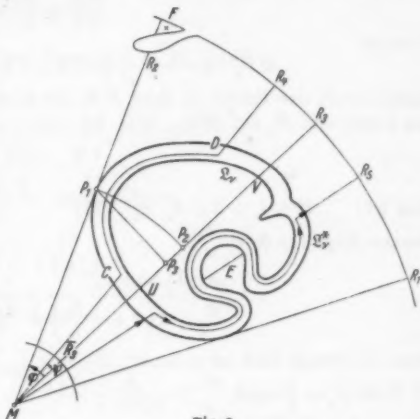


Fig. 3.

⁶⁾ Siehe Fig. 3.

der „Streifen“.) Schließlich kann (auch bei nicht konvexen Kurven) der Fall eintreten, daß die außerhalb des Winkelraumes AMB liegenden Teile von \mathfrak{B}_{1n}^* (vgl. Fig. 2) nicht durch Streifen erfaßt werden (weil diese nach der Vorschrift innerhalb des Winkels verlaufen können).

Wir brauchen aber diesen Fällen deshalb keine besondere Aufmerksamkeit zu schenken, weil wir das Bildgebiet von \mathfrak{B}_{1n}^* in der z_n -Ebene nicht berechnen, sondern nur nach unten abschätzen wollen. Wir werden deshalb den Bereich \mathfrak{B}_{1n}^{**} betrachten, der aus \mathfrak{B}_{1n}^* dadurch entsteht, daß die bei der Streifenbildung nicht erfaßten Gebiete fortgelassen werden.

Das Verhältnis $\frac{\Delta\theta}{\Delta\psi}$ soll nun nach unten abgeschätzt werden. Nach (17) gilt:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\psi} = \frac{\theta_r}{\psi}.$$

Nun ist

$$MP_1 \cdot \varphi = r \varphi < 2 P_1 P_3 < 2 l_r^* (l_r^* = L(\mathfrak{L}_r^*)).$$

Dabei ist P_1 der Punkt, in dem MR_1 die Kurve \mathfrak{L}_r^* berührt, R_3 der Fußpunkt des Lotes von P_1 auf MR_3 . (Fig. 3.) Also:

$$\varphi < \frac{2 l_r^*}{r} < \frac{2 l_r^*}{\varrho_1}.$$

Nun ist: $l_r^* \leq l_r + 2\pi\theta_r$, vgl. (11).

Daraus folgt für $\theta_r = \frac{\delta_r}{4}$:

$$\frac{\theta_r}{\varphi} > \frac{k_1 \cdot \varrho_1}{4 \left(2 + \pi \frac{\theta_r}{l_r} \right)} > \frac{k_1 \varrho_1}{4(2 + \pi)}.$$

Denn in diesem Fall ist ja auch (15) $\delta_r < l_r$.

Im Falle $\theta_r = \frac{l_r}{4}$ wird: $\frac{\theta_r}{\varphi} > \frac{\varrho_1}{8 + 4\pi}$.

Also wird schließlich:

$$(18) \quad \Delta\theta > \Delta\psi \cdot m.$$

Dabei ist $m = \min \left(\frac{k_1 \varrho_1}{8 + 4\pi}, \frac{\varrho_1}{8 + 4\pi} \right)$.

Es ist zu beachten, daß m nicht von ν abhängt.

Für die Länge der „Radialkurve“ C_ν gilt nach (12):

$$L(C_\nu) < d \left(1 + \frac{3}{k_1} \right).$$

Der Flächeninhalt des Bildgebietes \mathfrak{B}_{1n}^* ist gegeben durch das Integral:

$$J_n = \iint_{\mathfrak{B}_{1n}^*} |z'_n(z_1)|^2 dg.$$

Dabei gilt:

$$\iint_{\mathfrak{B}_{1n}^*} \geq \iint_{\mathfrak{B}_{1n}^{**}}$$

Wir zerlegen den Bereich \mathfrak{B}_{1n}^{**} nummehr durch „Radialkurven“ in „Radialstreifen“ mit dem Zentriwinkel $\Delta\psi_n$. Dann wird jeder Radialstreifen ersetzt durch den ganz in seinem Innern verlaufenden „Parallelstreifen“ von der Breite $\frac{1}{2} \Delta\theta_n$. Dabei ist $\Delta\theta_n$ der kleinste Wert für $\Delta\theta$, der in dem Radial-

streifen auftritt. Durch Hinzufügen des Faktors $\frac{1}{2}$ wird erreicht, daß ein solcher Parallelstreifen durch den ganzen (sich nach K_1 hin verjüngenden) Radialstreifen gelegt werden kann ($d < \frac{\varrho_1}{4}$).

Dann wird:

$$J_n > \lim_{\Delta \psi_\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \Sigma \Delta \vartheta_\mu \int_{C_\psi} |z'_n(z_1)|^2 d\sigma.$$

Dabei ist σ die Bogenlänge auf C_ψ .

Nach der SCHWARZschen Ungleichung ist:

$$\int_{C_\psi} 1^2 d\sigma \cdot \int_{C_\psi} |z'_n(z_1)|^2 d\sigma \geq \left(\int_{C_\psi} |z'_n(z_1)| d\sigma \right)^2.$$

Nun ist:

$$\int_{C_\psi} |z'_n(z_1)| d\sigma = L(C_n(\psi)) > \frac{D}{2}.$$

Dabei ist $C_n(\psi)$ das Bild von C_ψ in der z_n -Ebene.

Also wird:

$$\int_{C_\psi} |z'_n(z_1)|^2 d\sigma > \frac{D^2}{4L(C_\psi)} > \frac{D^2}{4d \left(1 + \frac{3}{k_1}\right)}.$$

Wegen (18) und $\Sigma \Delta \psi_\mu = \alpha$ folgt daraus:

$$(19) \quad J_n > \frac{D^2 \cdot m \cdot \alpha}{8d \left(1 + \frac{3}{k_1}\right)}.$$

Die rechte Seite der Ungleichung enthält außer d und α nur konstante, von n und d unabhängige Größen. d kann beliebig klein gewählt werden. α hängt aber von d ab. Wenn $\alpha = \alpha(d)$ größer als eine feste von 0 verschiedene Zahl bleibt bei beliebig kleinem d , so würde sich aus (19) ein Widerspruch ergeben. Denn der Flächeninhalt des gesamten Gebietes \mathfrak{B}_n^* muß ja wegen der Normierung (5) im Unendlichen innerhalb eines festen Kreises $K(5R)$ bleiben. Aus (19) ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch, wenn $\alpha(d)$ zwar beliebig klein wird mit d , das Verhältnis $\frac{\alpha(d)}{d}$ aber über alle Grenzen wächst. Der Schluß versagt, wenn $\frac{\alpha(d)}{d}$ beschränkt bleibt:

$$(20) \quad \frac{\alpha(d)}{d} < k_3.$$

Es wird nun gezeigt, daß (20) mit den Randbedingungen (7) und (8) nicht verträglich und deshalb unmöglich ist.

5. Das Verhältnis $\frac{\alpha(d)}{d}$:

Erst für diesen letzten Teil des Beweises wird die Randbedingung (8) benutzt. — Zunächst soll gezeigt werden, daß aus (7) und (8) auch folgt, daß

$$(21) \quad \frac{\delta_2}{r_*} > k_4$$

ist. — Dabei ist r_v^* der Maximalabstand des Randes Ω_v vom Kreis K_1 . Wegen $r_v^* < r_v + l_v$ wird:

$$\frac{\delta_v}{r_v^*} > \frac{\delta_v}{r_v + l_v} = \frac{\frac{\delta_v}{r_v}}{1 + \frac{l_v}{r_v}} > \frac{k_2}{1 + \frac{l_v}{\delta_v}}.$$

Dabei ist $r_v \geq \delta_v$ benutzt. Wegen (7) wird:

$$\frac{\delta_v}{r_v^*} > \frac{k_2}{1 + \frac{1}{k_1}} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + 1} = k_4.$$

Der Bogen \mathfrak{E}_1^* war so gewählt, daß er von allen Rändern einen Abstand $\Delta_1 = \text{Min}\left(\frac{d}{4}, \frac{\delta_v}{4}\right)$ hat. Wir können deshalb um \mathfrak{E}_1^* eine Kurve \mathfrak{E}_1^{**} legen, die von \mathfrak{E}_1^* den konstanten Abstand $\frac{\Delta_1}{2}$ hat und nur innere Punkte von \mathfrak{B}_1 enthält und umschließt. Durch \mathfrak{E}_1^{**} und \mathfrak{E}_1^* wird in der z_1 -Ebene ein zweifach zusammenhängendes Gebiet Σ_1 begrenzt, das durch $\zeta(z_1)$ auf ein entsprechendes Gebiet Σ_∞ der ζ -Ebene abgebildet wird, das \mathfrak{E}_∞^* zur inneren Begrenzung hat. Auf diese Gebiete soll der Hilfssatz III angewandt werden. Dazu sind noch einige Abschätzungen nötig.

Für die Länge s_1^* von \mathfrak{E}_1^* gilt:

$$s_1^* < \alpha(\varrho_1 + d) + \Sigma l_v^* < 2\varrho_1 \alpha + \Sigma l_v^*.$$

Denn die Länge ist sicher kleiner als der Bogen $\alpha(\varrho_1 + d)$ und die Summe der Längen der Kurven Ω_v^* , die als „Umgehungskurven“ auftreten.

Nun ist doch:

$$l_v^* \leq l_v + 2\pi \cdot \frac{\delta_v}{4} < \delta_v \left(\frac{1}{k_1} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Deshalb wird wegen (20):

$$s_1^* < 2\varrho_1 k_3 d + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \Sigma \delta_v.$$

Wir schätzen jetzt die $\Sigma \delta_v$ ab durch die Länge der von „Umgehungskurven“ freien Stücke $\varepsilon_{v''}$ auf dem Bogen AB : Denkt man sich die Kurven Ω_v^* von einer zweiten Kurve Ω_v^{**} umgeben, die von Ω_v den konstanten Abstand $\text{Min}\left(\frac{\delta_v}{2}, \frac{d}{2}\right)$ hat, so werden die von den Kurven Ω_v^* und Ω_v^{**} gebildeten Ringe aus dem Bogen Stücke herauschneiden, deren Länge $\geq \frac{\delta_v}{4}$ ist. Die Gesamtlänge aller „freien Intervalle“ auf AB ist also sicher $\geq \Sigma \frac{\delta_v}{4}$. Daraus folgt:

$$2\alpha\varrho_1 > \Sigma \varepsilon_{v''} > \Sigma \frac{\delta_v}{4}.$$

Also wird:

$$(22) \quad s_1^* < d \left(2\varrho_1 k_3 + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{\pi}{2} \right) 8\varrho_1 k_3 \right) = k_5 \cdot d.$$

Für die Länge s_1^{**} der Kurven \mathfrak{E}_1^{**} folgt daraus:

$$s_1^{**} \leq s_1^* + 2\pi \frac{d}{4} < d \left(k_5 + \frac{\pi}{2} \right) = k_6 \cdot d$$

$$(23) \quad s_1^{**} < k_6 \cdot d.$$

Diese Abschätzung gilt a fortiori für die „Mittelkurve“ des Gebiets Σ_1 .

Die Minimalbreite τ von Σ_1 ist $\frac{1}{2} \text{Min} \left(\frac{\delta_1}{4}, \frac{d}{4} \right)$. Also ist wegen (21):

$$\tau \geq \text{Min} \left(\frac{k_4}{8} \cdot r_1^*, \frac{d}{8} \right).$$

Da $r_1^* > \frac{d}{2}$ ist, folgt:

$$\tau > \text{Min} \left(\frac{k_4}{16}, \frac{1}{8} \right) \cdot d.$$

Ist s_1 die „Mittellänge“ von Σ_1 , so gilt:

$$\frac{\tau}{s_1} > \frac{\text{Min} \left(\frac{k_4}{16}, \frac{1}{8} \right)}{k_6} = k_7,$$

(24)

$$\tau > k_7 \cdot s_1.$$

Für den Inhalt des Bildgebietes in der ζ -Ebene gilt deshalb nach Hilfssatz III:

$$J(\Sigma_\infty) > \frac{l^2}{2\pi} \log(\pi k_7 + 1).$$

Die Länge l der kürzesten \mathfrak{G}_∞^* umschlingenden Kurve ist aber $> 2 \cdot \frac{D}{8}$.

Deshalb wird:

$$(25) \quad J(\Sigma_\infty) > \frac{D^2}{32\pi} \log(\pi k_7 + 1) = k_8.$$

k_8 ist eine von d unabhängige Konstante. Man kann nun in der z_1 -Ebene um M einen Kreis vom Radius $\rho_1 + d_1$ zeichnen und wieder ein Gebiet $\Sigma_1^{(1)}$ konstruieren, das zu Σ_1 punktfremd ist. Dazu genügt es, daß für d_1 der halbe Abstand (Σ_1, K_1) gewählt wird. Für das Bild $\Sigma_\infty^{(1)}$ in der ζ -Ebene gilt dann auch die Abschätzung (25). So könnte man fortfahren und eine Folge von punktfremden Bereichen $\Sigma_1^{(\mu)}$ in der z_1 -Ebene konstruieren, deren Bilder in der ζ -Ebene einen Flächeninhalt haben, der größer als k_8 ist. Da alle Randkomponenten in der ζ -Ebene innerhalb eines festen Kreises mit dem Radius $5R$ liegen müssen, ist das ein Widerspruch. Die Annahme (20) war also falsch. — Damit ist gezeigt, daß es keinen von 0 verschiedenen Maximalabstand eines Häufungsrandes vom Grenzkreis geben kann, und die Abbildung auf einen Kreis ist auch für den Häufungsrand gesichert.

Anmerkung:

Es war vorausgesetzt, daß sämtliche Randkomponenten des abzubildenden Bereiches \mathfrak{B} analytische Kurven sind. Mit geringer Modifikation des Beweisganges kann erreicht werden, daß man mit der Voraussetzung der Rektifizierbarkeit für die isolierten Randkomponenten B_i auskommt. Man braucht nur die rektifizierbaren Kurven zu umgeben mit ganz in \mathfrak{B} verlaufenden analytischen Kurven \bar{B}_i , deren Punkte von den zugeordneten Punkten von B_i einen Maximalabstand $< \frac{d_i}{8}$ haben. Dann kann mit Hilfe dieser Kurven der Beweis wie oben geführt werden.

(Eingegangen am 13. September 1950.)

Bemerkung zu der Note von G. Herglotz „Eine Formel der formalen Operatorenrechnung“.

[Math. Ann., Bd. 122, S. 14/5 (1950).]

Von

LUDWIG SCHWARZ in Darmstadt.

Herr HERGLOTZ beweist folgenden Satz: Sind X, Y, Z Elemente eines (nichtkommutativen) Ringes mit Einselement E , zu dem alle mit ihnen gebildeten Potenzreihen gehören, so gilt: Ist

$$(1) \quad YX - XY = Z$$

vertauschbar mit X und Y , so ist

$$(2) \quad \exp [tXY] = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} X^v Y^v Z^{-v} [\exp(tZ) - 1]^v,$$

insbesondere also für

$$(3) \quad YX - XY = E \quad (\text{Vertauschungsregel der Quantentheorie})$$

in diesem Sinn

$$(4) \quad \exp [tXY] = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (e^t - 1)^v X^v Y^v$$

und daher

$$(5) \quad \exp [tXY] = E \quad \text{für } t = 2\pi i.$$

Wir wollen im folgenden erstens das Hauptergebnis (1), (2) auf den Spezialfall (3), (4) zurückführen; zweitens für diesen den HERGLOTZschen Beweis neu darstellen und ihn dabei aufteilen in allgemeine Überlegungen, von denen auch wir Gebrauch zu machen haben, und einen kurzen Endteil, der der Vollständigkeit halber zugefügt ist; schließlich wollen wir drittens eine neue Methode angeben, die nicht nur das HERGLOTZsche Ergebnis sehr natürlich wiederfinden läßt, sondern sofort für eine beliebige ganze Funktion an Stelle der Exponentialfunktion gangbar ist.

Das Hauptergebnis Formel (2) enthält die Inverse Z^{-1} von Z nur scheinbar, so daß Herr HERGLOTZ im Grunde die Invertierbarkeit von Z nicht voraussetzen braucht, jedoch kann der durch X, Y, Z , die komplexen Zahlen \mathfrak{K} und die Unbestimmte t des Zentrums erzeugte Teilring $\mathfrak{K}[t, X, Y, Z]$ durch die Inverse Z^{-1} widerspruchsfrei erweitert werden, wenn man als Relationen nur das unbedingt Erforderliche, nämlich (1) und die Vertauschungsregeln von Z mit X, Y zugrundelegt. Deshalb wollen wir ohne weitere Diskussion Z^{-1} als existent betrachten. Dann genügt es aber, (4) unter Voraussetzung von (3) zu beweisen, denn wenn man in ihnen ersetzt: X durch XZ^{-1} und t durch tZ , (mit einem gegenüber X und Y vertauschbaren, invertierbaren Z), so folgen offenbar (1) und (2). Wegen der homomorphen, sogar isomorphen Zuordnung

$X \rightarrow x, Y \rightarrow D_x = \frac{d}{dx}, E \rightarrow 1$ des Teiltrings $\mathfrak{K}[t, X, Y]$ zum Differentialoperatorenring $\mathfrak{K}[t, x, D_x]$ über dem Ring der rationalen Funktionen in t als Zentrum, wollen wir in diesem letzteren arbeiten, natürlich nach Adjunktion der formalen Potenzreihen. Außerdem setzen wir zur Abkürzung $x D_x = \theta_x$ und lassen bei D und θ im allgemeinen den Index x weg. Übrigens ist $\theta_x = x D_x = \frac{d}{\frac{1}{x} dx} = \frac{d}{d \ln x} = D_{\ln x}$ nichts weiter als der Differentiator zu

$\ln x$ als neuer Variablen. Man beachte jedoch, daß dieser Operator „rational“ und nicht „transzendent“ ist und daß er u. U. auf einen Bereich angewandt wird, der die Transzendenten in x nicht enthält. Die Anwendung eines Operators M auf ein Element f ergibt ein Element, das mit $M \circ f$ bezeichnet sei.

Der Satz von HERGLOTZ lautet jetzt:

Definiert man $\exp(t\theta)$ durch die formale Potenzreihe

$$(6) \quad \exp(t\theta) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} t^v \theta^v,$$

so erhält man durch formale Umordnung

$$(7) \quad \exp(t\theta) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (e^t - 1)^v x^v D^v.$$

Die HERGLOTZsche Methode besteht im Grunde in folgendem:

1. Wohlbekannt sind die Relationen

$$(8) \quad x^v D^v = \begin{cases} 1 & \text{für } v = 0 \\ \theta(\theta - 1)(\theta - 2) \dots (\theta - v + 1) & \text{für } v > 0. \end{cases}$$

Daraus folgt durch sukzessive Auflösung

$$(9) \quad \theta^\mu = \sum_{v=0}^{\mu} c_{v\mu} x^v D^v \quad \text{für } \mu \geq 0$$

mit $c_{\mu\mu} = 1$.

Es werde für $v < 0, > \mu$ gesetzt

$$(10) \quad c_{v\mu} = 0.$$

2. Für die $c_{v\mu}$ erhält man eine Rekursionsformel, indem man (9) mit θ multipliziert:

$$\begin{aligned} \theta^{\mu+1} &= \sum_0^\mu c_{v\mu} x (D x^v) D^v = \sum_{-1}^\mu c_{v\mu} x^{v+1} D^{v+1} + \sum_0^{\mu+1} v c_{v\mu} x^v D^v = \\ &= \sum_0^{\mu+1} [c_{v-1,\mu} + v c_{v\mu}] x^v D^v \end{aligned}$$

und andererseits bedenkt, daß nach (9) mit $\mu + 1$ statt μ

$$\theta^{\mu+1} = \sum_{v=0}^{\mu+1} c_{v,\mu+1} x^v D^v$$

gilt. Vergleich liefert die gewünschte Rekursionsformel

$$(11) \quad c_{v,\mu+1} = c_{v-1,\mu} + v \cdot c_{v\mu} \quad \text{für } \mu \geq 0.$$

3. Sie wird selbst nicht explizit gelöst, sondern in eine Relation für die erzeugende Funktion

$$(12) \quad f_{\mu}(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu\mu} s^{\nu}, \quad \mu \geq 0,$$

umgesetzt. In der Tat, multipliziert man (11) mit s^{ν} und addiert von $\nu = 0$ bis ∞ , so wird

$$f_{\mu+1}(s) = s f_{\mu}(s) + s f'_{\mu}(s) = (s + \theta_s) \circ f_{\mu}(s) \quad \text{für } \mu \geq 0.$$

Daraus folgt sogar eine explizite Darstellung der erzeugenden Funktion

$$(13) \quad f_{\mu}(s) = (s + \theta_s)^{\mu} \circ 1,$$

da nach (9), (10), (12) $f_0(s) = 1$ ist.

Wegen $s + \theta_s = s \cdot (1 + D_s) = s \cdot e^{-s} D_s e^s = e^{-s} \theta_s e^s = e^{-s} D_s e^s$

mit $\sigma = \ln s$ wird dann schließlich

$$(14) \quad f_{\mu}(s) = e^{-s} D_s^{\mu} \circ e^s.$$

4. Die gewonnenen Ergebnisse über die erzeugende Funktion sind völlig ausreichend, die explizite Kenntnis des Konstantensystems $c_{\nu\mu}$ zu ersetzen. Bei der Umordnung von (6) in (7) mit Hilfe von (9):

$$(15) \quad \exp(t\theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1^{\mu}}{\mu!} t^{\mu} \theta^{\mu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} t^{\mu} c_{\nu\mu} x^{\nu} D^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\nu\mu} \frac{1}{\mu!} t^{\mu} \right) \cdot x^{\nu} D^{\nu},$$

tritt die Summe $\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\nu\mu} \frac{1}{\mu!} t^{\mu}$ auf. Um sie mit der erzeugenden Funktion in Verbindung zu bringen, bildet Herr HERGLOTZ

$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} t^{\mu} f_{\mu}(s)$, das wegen (14) $= e^{-s} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} t^{\mu} D_s^{\mu} \circ \exp(e^s)$; dies ist aber nach der TAYLORSchen Formel $= e^{-s} \exp(e^s + t) = \exp(e^s + t - e^s) = \exp(s(e^t - 1))$. Daraus folgt durch beidseitige Potenzreihenentwicklung nach s für jedes $\nu \geq 0$

$$(16) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} t^{\mu} \frac{1}{\mu!} c_{\nu\mu} = \frac{1}{\nu!} (e^t - 1)^{\nu},$$

was in (15) eingesetzt, die Behauptung (7) ergibt.

Nunmehr wenden wir uns zu der angekündigten zweiten Methode, die sofort in voller Allgemeinheit dargestellt werde. Wir beweisen folgenden Satz:

1. Fassung. Es sei

$$(17) \quad f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu}$$

eine ganze Funktion. Dann läßt sich

$$(18) \quad f(t\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} \theta^{\nu}$$

nach (9) so umordnen, daß

$$(19) \quad f(t\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} j_{\nu}(t) \cdot x^{\nu} D^{\nu}$$

ist. Dabei ist die Gesamtheit der $j_\nu(t)$, die wir in der erzeugenden Funktion

$$(20) \quad g(t, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} j_\nu(t) \cdot s^\nu$$

zusammenfassen, in folgender Weise durch f eindeutig bestimmt:

$$(21) \quad g(t, s) = e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f(\nu t) \cdot s^\nu.$$

2. Fassung. Setzt man $f(t\theta)$ statt durch (19) in der gleichwertigen Form (22) an:

$$(22) \quad f(t\theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} k_\mu(t) \cdot (-1)^\mu x^\mu D^\mu,$$

so wird

$$(23) \quad k_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} (-1)^\nu f(\nu t).$$

Der HERGLOTZsche Fall ergibt sich aus der ersten Fassung durch die Spezialisierung $f(t) = \exp(t)$, also $a_\nu = \frac{1}{\nu!}$. Es wird nach (21)

$$g(t, s) = e^{-s} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{\nu t} \cdot s^\nu = \exp(s(e^t - 1)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (e^t - 1)^\nu s^\nu,$$

mit (20) demnach $j_\nu(t) = \frac{1}{\nu!} (e^t - 1)^\nu$, d. h. nach (19) die Gleichung (7).

Beweis der 1. Fassung. Wir wenden $f(t\theta)$ an auf x^μ und beachten, daß

$$(24) \quad \theta^\nu \circ x^\mu = \mu^\nu x^\mu$$

$$(25) \quad D^\nu \circ x^\mu = \begin{cases} \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!} \cdot x^{\mu-\nu} & \text{für } \mu \geq \nu \\ 0 & \text{für } \nu > \mu \end{cases}$$

ist. Man erhält also:

$$\left. \begin{aligned} f(t\theta) \circ x^\mu &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu \mu^\nu \cdot x^\mu = f(\mu t) x^\mu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu} j_\nu(t) x^\nu \cdot \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!} x^{\mu-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!} j_\nu(t) \cdot x^\mu \end{aligned} \right\} \text{und durch Vergleich}$$

$$(26) \quad \frac{1}{\mu!} f(\mu t) = \sum_{\nu=0}^{\mu} j_\nu(t) \cdot \frac{1}{(\mu-\nu)!},$$

d. h. die Folge $\frac{1}{\nu!} f(\nu t)$ entsteht durch Faltung aus den Folgen $j_\nu(t)$ und $\frac{1}{\nu!}$, also wird mit neutraler Unbestimmten s

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} s^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} j_\nu(t) s^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f(\nu t) s^\nu,$$

d. h. nach (20), wie behauptet,

$$(21) \quad g(t, s) = e^{-s} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f(\nu t) \cdot s^\nu.$$

Beweis der 2. Fassung. Wir setzen in (21) für sämtliche Funktionen wieder Potenzreihen in s ein,

$$\sum_{v=0}^{\infty} j_v(t) s^v = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{1}{v!} s^v \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} f(vt) s^v;$$

dann wird

$$j_{\mu}(t) = \sum_{v=0}^{\mu} \frac{1}{v!} f(vt) \cdot \frac{1}{(\mu-v)!} (-1)^{\mu-v}$$

oder

$$k_{\mu}(t) = (-1)^{\mu} \mu! j_{\mu}(t) = \sum_{v=0}^{\mu} (-1)^v \frac{\mu!}{v! (\mu-v)!} f(vt) = \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} (-1)^v f(vt),$$

womit die Aussage (22), (23) bewiesen ist.

Bemerkung. Die erzeugende Funktion $g(t, s)$ nach (21) macht es notwendig, $f(t)$ als ganze Funktion vorauszusetzen, damit ihre Koeffizienten für ein $t \neq 0$ überhaupt definiert sind. Damit ist aber noch keineswegs behauptet, daß die formale Reihenentwicklung auf der rechten Seite von (21) auch konvergiert. Es lassen sich im Gegenteil leicht genügend stark anwachsende ganze Funktionen $f(t)$ angeben, so daß diese Reihe für jedes $t (\neq 0)$ divergiert.

Anmerkung bei der Korrektur: 23.8.51. Ich wurde freundlicherweise von Herrn Rellich auf die Arbeit McCoy, Proc. Edinburgh math. Soc. (2) 3, 118—127 (1932), hingewiesen. Leider habe ich mir bisher diese Arbeit noch nicht beschaffen können.

(Eingegangen am 5. Dezember 1950.)

Über die endliche Laplace-Transformation.

Von

GUSTAV DOETSCH in Freiburg i. Br.

Bei der Lösung gewisser Randwertprobleme erhebt sich die Frage, ob einer Randerregung von endlicher Dauer, z. B. einem akustischen oder elektrischen Signal, auch im Innern des Gebiets ein Effekt von zeitlich begrenzter Dauer entspricht oder ob ein „Nachhall“ zustande kommt. Wird das Randwertproblem mittels Laplace-Transformation (im folgenden kurz \mathfrak{L} -Transformation genannt)

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathfrak{L}\{F\}$$

behandelt, wobei zunächst die Bildfunktion $f(s)$ der Lösung $F(t)$ des Problems hergestellt wird, so läßt sich die obige Frage auch ohne explizite Kenntnis der Originalfunktion $F(t)$ erledigen, wenn man Kriterien für die Bildfunktion $f(s)$ kennt, die darüber entscheiden, ob die Originalfunktion von einer Stelle h an verschwindet, mit anderen Worten, ob eine \mathfrak{L} -Transformierte in Wahrheit eine „endliche“ \mathfrak{L} -Transformierte

$$(1) \quad f(s) = \int_0^h e^{-st} F(t) dt$$

ist. Wir geben in Satz 1 zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür an und leiten dann aus bekannten Sätzen hinreichende Bedingungen (Satz 2) dafür ab, daß eine beliebige (nicht schon als \mathfrak{L} -Transformierte bekannte) Funktion eine endliche \mathfrak{L} -Transformierte ist.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Originalfunktion $F(t)$ einer (irgendwo als konvergent vorausgesetzten) \mathfrak{L} -Transformierten $f(s) = f(x + iy)$ für $t > h$ verschwindet, sind folgende Bedingungen:*

I. $f(s)$ ist eine ganze Funktion.

II. $|f(s)| \leq M$ für $x \geq 0$.

III. $|f(s)| \leq M e^{-hx}$ für $x \leq 0$.

Bemerkung: Aus II und III folgt, daß $f(s)$ vom Exponentialtypus ist, d. h. $|f(s)| \leq A e^{a|s|}$.

Beweis: a) Notwendigkeit. Hat $f(s)$ die Form (1), so ist $f(s)$ eine ganze Funktion¹⁾, und es gilt:

$$|f(s)| \leq \int_0^h e^{-xt} |F(t)| dt \leq \begin{cases} \int_0^h |F(t)| dt = M & \text{für } x \geq 0^2) \\ e^{-hx} \int_0^h |F(t)| dt \leq M e^{-hx} & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

¹⁾ Siehe G. DOETSCH: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I, Basel 1950 (im folgenden als HB zitiert), S. 145; Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937 (im folgenden als LT zitiert), S. 43.

²⁾ Es ist sogar $f(s) \rightarrow 0$, wenn s in $x \geq 0$ zweidimensional gegen ∞ strebt (HB, S. 171 bis 172; LT, S. 197), aber wir brauchen für Satz 1 nicht mehr als $|f(s)| \leq M$.

b) Hinlänglichkeit. Ist $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ für $s = x_0 \geq 0$ (einfach) konvergent, so ist bekanntlich³⁾ für $t \geq 0$ und $x_1 > x_0$:

$$(2) \quad \int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1 - i\omega}^{x_1 + i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds.$$

Wir betrachten einen geschlossenen, im positiven Sinn durchlaufenen Integrationsweg \mathfrak{C} , bestehend aus den Strecken $x_1 - i\omega \dots x_1 + i\omega$, $x_1 \pm i\omega \dots \pm i\omega$ und dem Halbkreis \mathfrak{h} um 0 mit dem Radius ω links von der imaginären Achse. Da $e^{ts} f(s)$ in und auf \mathfrak{C} bei jedem $\omega > 0$ analytisch ist, so ergibt sich:

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds = f(0).$$

Auf der oberen horizontalen Strecke ist nach II:

$$(4) \quad \left| \int_{x_1 + i\omega}^{x_1 - i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds \right| \leq \int_0^{x_1} e^{tx} \frac{M}{\omega} dx = \frac{M}{\omega} \frac{e^{tx_1} - 1}{t} \rightarrow 0$$

für $\omega \rightarrow \infty$ bei jedem festen $t > 0$. Dasselbe gilt für das Integral längs der unteren horizontalen Strecke. Auf dem Halbkreis \mathfrak{h} ist $s = \omega e^{i\vartheta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi$, $\frac{ds}{s} = i d\vartheta$, also nach III:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{h}} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds \right| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{t\omega \cos \vartheta} M e^{-h\omega \cos \vartheta} d\vartheta = M \int_0^{\pi} e^{-(t-h)\omega \sin \varphi} d\varphi \\ &= 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-h)\omega \sin \varphi} d\varphi \quad (\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi). \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ verläuft die sin-Kurve oberhalb der Sehne, so daß $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ ist, womit für $t - h > 0$ folgt:

$$(5) \quad \left| \int_{\mathfrak{h}} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds \right| \leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-h)\omega \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = 2M \frac{1 - e^{-(t-h)\omega}}{\frac{2}{\pi}(t-h)\omega} \rightarrow 0 \text{ für } \omega \rightarrow \infty.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich, daß beim Grenzübergang $\omega \rightarrow \infty$ in $\int_{\mathfrak{C}}$ nur das Integral über die Vertikale übrigbleibt, d. h.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1 - i\omega}^{x_1 + i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds \text{ für } t > h.$$

Nach (2) und (3) bedeutet dies:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = f(0) = \text{const. für } t > h, \text{ also} \\ F(t) = 0 \text{ fast überall in } t > h.$$

³⁾ HB, S. 218; LT, S. 107.

Übrigens ist $f(0) = \int_0^h F(\tau) d\tau = \int_0^\infty F(t) dt$, wie es sein muß, da ein \mathfrak{L} -Integral mit endlichem Integrationsweg überall, also in $s = 0$ konvergiert.

Bemerkungen: 1. Durch Feststellung der unteren Grenze der h , für die III gilt, erhält man das kleinste Intervall, rechts von dem $F(t)$ fast überall verschwindet, also die exakte obere Grenze des \mathfrak{L} -Integrals.

2. Da eine endliche \mathfrak{L} -Transformation in der ganzen Ebene absolut konvergiert, läßt sich die Originalfunktion $F(t)$ an jeder Stelle, in deren Umgebung sie von beschränkter Variation ist, durch das komplexe Umkehrintegral so darstellen⁴⁾:

$$\frac{F(t+0) + F(t-0)}{2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{ts} f(s) ds,$$

wo x jede reelle Zahl, z. B. 0, bedeuten kann. (Für $t = 0$ ist $F(t-0) = 0$.)

3. Der obige Beweis liefert den allgemeineren Satz: Ist eine Funktion $f(s)$ analytisch in einer Halbebene $x < X$ ($X > 0$) und erfüllt sie dort die Bedingung III, so ist

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds = f(0) \quad \text{für } t > h \text{ und } 0 < x < X.$$

Nicht jede Funktion, die die Bedingungen I—III erfüllt, ist eine endliche \mathfrak{L} -Transformierte. So genügt z. B. e^{-s} allen drei Bedingungen, stellt aber überhaupt keine \mathfrak{L} -Transformierte dar⁵⁾. Natürlich kann man weitere Bedingungen hinzufügen, die mit den vorigen zusammen dafür garantieren, daß $f(s)$ eine \mathfrak{L} -Transformierte ist. Da aber die \mathfrak{L} -Transformierten keine durch innere funktionentheoretische Eigenschaften charakterisierbare Klasse bilden, wird es sich nur um Bedingungen handeln können, die zwar hinreichend, aber nicht notwendig sind. Das am besten abgerundete Ergebnis in dieser Richtung lautet⁶⁾: „Die analytischen Funktionen, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dy < K \quad \text{für } x > 0$$

ist, sind \mathfrak{L} -Transformierte, und ihre Originalfunktionen bilden genau die Klasse $L^2(0, \infty)$ “. Da im vorliegenden Fall weitere Bedingungen wie I—III oder analoge hinzukommen, genügt schon die Forderung, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^2 dy$ oder auch $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)| dy$ existiert, wobei sich die Bedingungen II und III noch abschwächen lassen. Ein Satz dieses Typs ergibt sich durch einfache Substitutionen aus Ergebnissen von PLANCHEREL und PÓLYA⁷⁾ über die Fourier-Transformation, so daß wir uns damit begnügen können, ihn ohne Beweis zu formulieren.

⁴⁾ HB, S. 212; LT, S. 105.

⁵⁾ HB, S. 80, 163; LT, S. 143.

⁶⁾ HB, S. 422.

⁷⁾ M. PLANCHEREL et G. PÓLYA: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. math. helvet. 9, 224—248 (1936/37) [S. 227—234]. Diese Ergebnisse stellen Verschärfungen eines Satzes von R. PALEY und N. WIENER [Fourier transforms in the complex domain. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 19, 12 (1934)] über Funktionen dar, deren Fourier-Transformierte außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet.

Satz 2. Die Funktion $f(s)$ habe folgende Eigenschaften:

I'. $f(s)$ ist eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, d. h.
 $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |f(re^{i\theta})| \leq a$. Für die reellen Halbachsen gilt speziell:

$$\text{II}'. \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log |f(x)| = h' \leq 0,$$

$$\text{III}'. \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log |f(-x)| = h^0.$$

$$\text{IV'a.} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)| dy < \infty \text{ oder IV'b.} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^2 dy < \infty.$$

Dann ist die Funktion (komplexes Umkehrintegral mit $x=0$)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(iy) dy \text{ im Falle IV'a,}$$

$$F(t) = \text{l.i.m.}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} f(iy) dy \text{ im Falle IV'b}$$

gleich 0 fast überall in $t < -h' (-h' \geq 0)^9$ und in $t > h$, und $f(s)$ läßt sich als endliche \mathcal{L} -Transformierte darstellen:

$$f(s) = \int_0^h e^{-st} F(t) dt = \int_{-h'}^h e^{-st} F(t) dt.$$

Im Falle IV'a ist die Funktion $F(t)$ beschränkt und stetig, im Falle IV'b gehört sie zur Klasse $L^2(0, \infty)$.

⁹⁾ Aus den Beweisen l.c.⁷⁾ geht hervor, daß von selbst $h > -h'$ ist, und daß die Bedingung III' zusammen mit I' und IV' die Bedingung III von Satz 1 involviert.

⁸⁾ Die Größe h' , die darüber entscheidet, in welchem größten, rechts an $t=0$ anstoßenden Intervall $F(t)$ fast überall verschwindet, ist identisch mit der „Beschränktheitsordnung“ von $f(s)$ (HB, S. 483), die sich, wenn, wie im vorliegenden Fall, die Existenz einer Beschränktheitallebene für $f(s)$ gesichert ist, durch die linke Seite von II' darstellen läßt (HB, S. 186).

(Eingegangen am 17. März 1951.)

Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung¹⁾.

Von

ERHARD HEINZ in Göttingen.

Gegenstand der Störungstheorie ist die Untersuchung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators in Abhängigkeit von einem Parameter. In verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik ist zur numerischen Behandlung von Eigenwertproblemen Störungsrechnung verwendet worden. Diese formalen Ansätze wurden später von F. RELICH einer strengen mathematischen Begründung unterzogen. Dabei stellte sich heraus, daß diejenigen Operatoren $A(\varepsilon)$, die in einem festen Definitionsbereich selbstadjungiert sind und regulär von einem reellen Störungsparameter abhängen, neben den beschränkten Operatoren ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. Aus diesem Grunde werden auch in dieser Arbeit ausschließlich solche Operatoren betrachtet.

Da das Spektrum von $A(\varepsilon)$ durch die Spektralschar $E_\lambda(\varepsilon)$ vollständig charakterisiert ist, so liegt es nahe, diese in ihrer Abhängigkeit von ε zu untersuchen. Im allgemeinen braucht $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ nicht regulär von ε abzuhängen, selbst wenn λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$ fällt. Das erkennt man etwa an dem Beispiel

$$A(\varepsilon)u = -u'', \quad u(0) = 0, \quad u(1) - \varepsilon u'(1) = 0.$$

Hier treten für $\varepsilon \leq 0$ nur positive Eigenwerte auf, also ist $E_0(\varepsilon) = 0$ für $\varepsilon \leq 0$. Für $0 < \varepsilon < 1$ gibt es jedoch einen Eigenwert $\mu(\varepsilon) < 0$. $E_0(\varepsilon)$ kann also in diesem Falle nicht regulär-analytisch von ε abhängen, obwohl es sich um ein reguläres Störungsproblem handelt (vgl. RELICH [6]). An diesem Beispiel erkennt man, daß hinsichtlich der Definitionsbereiche der Operatoren $A(\varepsilon)$ gewisse Einschränkungen gemacht werden müssen und jedenfalls Regularität von $A(\varepsilon)$ allein nicht ausreicht.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Regularität von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ jedenfalls dann gesichert ist, wenn λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$ fällt und $A(\varepsilon)$ in einem festen Definitionsbereich selbstadjungiert und regulär ist. Ein Spezialfall dieses Satzes ist von B. v. SZ. NAGY [12] bewiesen worden. Er zeigte, daß $E_{\lambda_0}(\varepsilon) - E_{\mu_0}(\varepsilon)$ einen in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulären Operator darstellt, falls λ_0 und μ_0 beide Leerstellen des Spektrums von $A(0)$ sind. Als Grundlage für den Beweis dient ihm die Gleichung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon) - E_{\mu_0}(\varepsilon) = - (2\pi i)^{-1} \oint_C (A(\varepsilon) - z)^{-1} dz,$$

wobei C eine das Intervall $\mu_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ umschließende Kurve in der komplexen z -Ebene bedeutet. Wenn sich das Spektrum von $A(0)$ bei $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$ häuft, so ist eine Darstellung von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ in Form eines Integrals über einen endlichen Weg in der komplexen Ebene nicht mehr möglich.

¹⁾ Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

Vielmehr wird in der vorliegenden Arbeit die Integraldarstellung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon) f = \frac{1}{2} f - (2\pi i)^{-1} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} (A(\varepsilon) - z)^{-1} f dz$$

verwendet. Entwickelt man den Integranden in eine Reihe nach ε und integriert nach z , so ergibt sich die gesuchte Reihenentwicklung von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$. In entsprechender Weise wird der Operator $A(\varepsilon)^e$ für positiv-definites $A(0)$ und $-1 < \rho < 1$ behandelt.

Die Hauptschwierigkeit des Beweises liegt in der Abschätzung der Entwicklungskoeffizienten. Da die hierfür erforderlichen Ungleichungen auch unabhängig von der Störungstheorie von Interesse sind, so werden diese in § 1 gesondert behandelt. Eine Ungleichung sei herausgegriffen. Aus

$$\|Qx\| \leq \|Bx\| \quad \text{und} \quad \|Q^*x\| \leq \|Ax\|$$

(B, A selbstadjungiert und positiv in Definitionsbereichen \mathfrak{D}_B bzw. \mathfrak{D}_A , die ihrerseits enthalten sind im Definitionsbereich von Q bzw. seiner Adjungierten Q^*) folgt die Abschätzung

$$|(Qx, y)| \leq \|B^v x\| \|A^{1-v} y\| (1 + |2v - 1|), \quad 0 \leq v \leq 1$$

für x aus \mathfrak{D}_B und y aus \mathfrak{D}_A . Gleichzeitig wird auch die Gleichung $AS + SB = Q$ behandelt und bewiesen, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine eindeutige Lösung S existiert, die sich in der Form

$$S = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt$$

darstellen läßt. Dieser Gegenstand steht in gewissem Zusammenhang mit Sätzen von I. SCHUR [9] über beschränkte Bilinearformen. — Daneben erweist sich auch der Begriff der monotonen Operatorfunktion als vorteilhaft. Funktionen, welche sich hinsichtlich endlicher Hermitescher Matrizen monoton verhalten, sind zuerst von K. LÖWNER [3] untersucht worden. Durch Anwendung eines von G. HERGLOTZ [2] stammenden Satzes wird hier gezeigt, daß die LÖWNERschen Resultate auch für die selbstadjungierten Operatoren im unendlich-dimensionalen HILBERTschen Raume gültig bleiben. Mit diesen Hilfsmitteln wird dann in § 2 die Regularität von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ und $A(\varepsilon)^e$ nachgewiesen.

In § 3 wird schließlich die stetige, nicht-analytische Abhängigkeit der Spektralschar behandelt. Dabei werden an Stelle von Operatoren, die stetig von einem Parameter abhängen, allgemeiner Folgen A_1, A_2, \dots gesetzt, die gegen A konvergieren. Zunächst wird der Fall der gewöhnlichen Konvergenz untersucht, d. h. $A_n f \rightarrow A f$, $n \rightarrow \infty$ für f aus \mathfrak{D} . Von \mathfrak{D} wird dabei verlangt, daß es in den Definitionsbereichen von A_n und A enthalten ist und daß A in \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert ist. Unter dieser Annahme wird bewiesen, daß die Spektralschar von A_n gegen die von A konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda_0}^{(n)} f = E_{\lambda_0} f$, falls λ_0 kein Punkteigenwert von A ist. Dieser Satz rührt von RELICH [4] her und wurde von ihm durch Zurückführung auf beschränkte Operatoren bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis gegeben, der den Umweg über die Reziproke vermeidet und direkt von der Spektraldarstellung der Operatoren A_n und A ausgeht. Anschließend wird die gleichmäßige Konvergenz der A_n gegen A untersucht. Diese wird wie bei RELICH [4] definiert, also

$$\|(A_n - A)f\| \leq \varepsilon_n (\|f\| + \|Af\|) \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{D} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wenn $\{E_\lambda^{(n)}\}$ und $\{E_\lambda\}$ die zu A_n bzw. A gehörigen Spektralscharen bedeuten und λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von A fällt, so wird gezeigt, daß $E_{\lambda_0}^{(n)}$ gleichmäßig gegen E_{λ_0} konvergiert, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\| = 0 \quad \text{gilt.}$$

Dieser Satz ist ausgesprochen bei RELICH [4], jedoch umfaßt der dort und in [11], S. 473 gegebene Beweis nur den Spezialfall beschränkter Operatoren A_n und A (vgl. hierzu die Bemerkung bei RELICH [7], § 8). Über die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\| = 0$ hinaus wird in der vorliegenden Arbeit sogar gezeigt, daß $\|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\|$ von derselben Größenordnung ist wie ε_n .

§ 1. Ungleichungen für Operatoren.

Der zugrunde gelegte HILBERTSCHE Raum werde mit \mathfrak{H} bezeichnet. x, y, z, u, v, \dots bedeuten Elemente und A, B, R, S, \dots lineare Operatoren in \mathfrak{H} . Das innere Produkt zweier Elemente x und y werde mit (x, y) bezeichnet. Ferner werde, wie üblich, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt, und $\|A\|$ sei die obere Grenze des Ausdrucks $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ für $x \neq 0$, falls A beschränkt ist. Ist A in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ die Spektraldarstellung, so werde der Operator

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| dE_\lambda$$

mit $|A|$ bezeichnet. Gilt $(u, Au) \geq a(u, u)$ für alle u aus \mathfrak{D}_A mit einer festen reellen Zahl a , so schreiben wir $A \geq a$. Den Untersuchungen dieses Paragraphen schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1.

Es sei A in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert und $A \geq a > 0$. $\{E_\lambda\}$ sei die zu A gehörige linksstetige Spektralschar. Setzt man dann

$$A^\varrho = \int_a^\infty \lambda^\varrho dE_\lambda,$$

so gelten für $-1 < \varrho < 1$ die Darstellungen

$$A^{\varrho-1} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_0^\infty x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx \quad \text{und} \quad A^{\varrho-1} = \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_0^\infty x^\varrho (A + x)^{-2} dx.$$

Beweis.

Aus der Gleichung

$$(A^2 + x^2)^{-1} = \int_a^\infty (\lambda^2 + x^2)^{-1} dE_\lambda$$

folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx = \int_a^\infty \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{x^\varrho dx}{\lambda^2 + x^2} \right] dE_\lambda = \int_a^\infty \lambda^{\varrho-1} \left[\int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^\varrho dt}{1+t^2} \right] dE_\lambda,$$

wenn $0 < x_1 < x_2 < \infty$ vorausgesetzt wird. Wir erhalten also

$$A^{\varrho-1} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx = \int_a^\infty \left(1 - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^\varrho dt}{1+t^2} \right) \lambda^{\varrho-1} dE_\lambda.$$

Wegen

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho} dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}$$

folgt dann

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow \infty}} \|A^{\varrho-1} - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} x^{\varrho} (A^2 + x^2)^{-1} dx\| = 0,$$

was mit dem ersten Teil der Behauptung identisch ist. Analog folgt der zweite Teil der Behauptung aus den Gleichungen

$$A^{\varrho-1} - \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_{x_1}^{x_2} x^{\varrho} (A+x)^{-2} dx = \int_a^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^{\varrho} dt}{(1+t)^2}\right) \lambda^{\varrho-1} dE_{\lambda}$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho} dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi \varrho}{\sin \pi \varrho}.$$

Bei der Ableitung von Ungleichungen für Operatoren werden Ausdrücke der Form

$$g(Q) = \int_{t_1}^{t_2} A(t) Q B(t) dt$$

eine wichtige Rolle spielen. Diese stehen mit Sätzen in Zusammenhang, die I. SCHUR²⁾ aufgestellt hat, um die Beschränktheit gewisser Bilinearformen nachzuweisen. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 2.

Es seien A in \mathfrak{D}_A und B in \mathfrak{D}_B zwei selbstadjungierte Operatoren, und es gelte $A \geq a > 0$ und $B \geq b > 0$. Q sei ein beschränkter Operator und ϱ eine Zahl aus dem Intervall $-1 < \varrho < 1$.

Setzt man dann

$$\varphi(Q) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} Q (B + it)^{-1} dt$$

und

$$\psi(Q) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} Q (B - it)^{-1} dt,$$

so stellen $\varphi(Q)$ und $\psi(Q)$ zwei beschränkte Operatoren dar, und es gelten die Gleichungen

$$\varphi(A^{-1}Q - QB^{-1}) = A^{\varrho-1}QB^{-1} - A^{-1}QB^{\varrho-1}$$

$$\psi(A^{-1}Q + QB^{-1}) = A^{\varrho-1}QB^{-1} + A^{-1}QB^{\varrho-1}.$$

Beweis.

Die Konvergenz der Integrale folgt unmittelbar aus

$$\| |t|^{\varrho} (A + it) Q (B \pm it)^{-1} \| = \begin{cases} O(|t|^{\varrho-2}), & |t| \rightarrow \infty \\ O(|t|^{\varrho}), & |t| \rightarrow 0. \end{cases}$$

²⁾ I. SCHUR: [9], insbes. Satz 6.

Um die Funktionalgleichungen zu beweisen, beachten wir die für alle Punkte z_1, z_2 der Resolventenmenge von A gültige Identität

$$(A - z_2)^{-1} - (A - z_1)^{-1} = (z_2 - z_1) (A - z_2)^{-1} (A - z_1)^{-1}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B + it)^{-1} &= (it)^{-1} (A^{-1} - (A + it)^{-1}) Q (B + it)^{-1} \\ &- (A + it)^{-1} Q (it)^{-1} (B^{-1} - (B + it)^{-1}) \\ &= it^{-1} [(A + it)^{-1} Q B^{-1} - A^{-1} Q (B + it)^{-1}]. \end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B + it)^{-1} &+ (A - it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B - it)^{-1} \\ &= 2 (A^2 + t^2)^{-1} Q B^{-1} - 2 A^{-1} Q (B^2 + t^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der letzten Identität B durch $-B$ und multipliziert sie mit -1 , so entsteht

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q + Q B^{-1}) (B - it)^{-1} &+ (A - it)^{-1} (A^{-1} Q + Q B^{-1}) (B + it)^{-1} \\ &= 2 (A^2 + t^2)^{-1} Q B^{-1} + 2 A^{-1} Q (B^2 + t^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplikation dieser beiden Identitäten mit $\frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \cdot t^\varrho$ und Integration nach t liefert unter Anwendung von Hilfssatz 1 die Gleichungen

$$\varphi (A^{-1} Q - Q B^{-1}) = A^{\varrho-1} Q B^{-1} - A^{-1} Q B^{\varrho-1}$$

und

$$\psi (A^{-1} Q + Q B^{-1}) = A^{\varrho-1} Q B^{-1} + A^{-1} Q B^{\varrho-1}.$$

Hilfssatz 3.

Wenn A, B und Q die in Hilfssatz 2 angegebene Bedeutung haben, dann ist

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\|$$

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq |2\nu - 1| \|A^{-1} Q - Q B^{-1}\|$$

für $0 \leq \nu \leq 1$.

Beweis.

Für jedes feste Paar x, y aus \mathfrak{H} und $-1 < \varrho < 1$ gilt

$$\begin{aligned} |(\psi(Q)x, y)| &\leq \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^\varrho |(Q(B - it)^{-1}x, (A - it)^{-1}y)| dt \\ &\leq \|Q\| \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^\varrho \|(B - it)^{-1}x\| \|(A - it)^{-1}y\| dt \\ &\leq \|Q\| \cdot \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \left[\int_0^\infty t^\varrho ((B^2 + t^2)^{-1}x, x) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty t^\varrho ((A^2 + t^2)^{-1}y, y) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Q\| \cdot \|B^{\frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{2}}x\| \|A^{\frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{2}}y\|. \end{aligned}$$

Ersetzt man darin Q durch $A^{-1}Q + QB^{-1}$, ferner x durch $B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho}u$ und y durch $A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho}v$, so erhält man unter Berücksichtigung von Hilfssatz 2 die Ungleichung

$$\begin{aligned} & |(A^{\frac{1}{2}-1} Q B^{-1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} u + A^{-1} Q B^{\varepsilon-1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} u, A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} v)| \\ & \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\| \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}} \end{aligned}$$

und alle v aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}}$.

Offenbar liegen $A^{\varepsilon-1} g$ und $A^{-1} h$ in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}}$, wenn g und h zwei beliebige Elemente in \mathfrak{H} sind. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & |((A^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon} Q B^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} + A^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} Q B^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}) u, v)| \\ & \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\| \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}}$ und $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}}$ dicht in \mathfrak{H} liegen und setzt $\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon$, so resultiert die Ungleichung

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\|$$

für $0 < \nu < 1$. Da sie für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ trivial ist, so folgt der erste Teil der Behauptung.

Um die zweite Ungleichung herzuleiten, beachten wir, daß nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz für $-1 < \varrho < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\varrho (A+t)^{-1} Q (B+t)^{-1} dt &= i e^{\frac{1}{2}\pi\varrho} \int_0^\infty t^\varrho (A+it)^{-1} Q (B+it)^{-1} dt \\ &= -i e^{-\frac{1}{2}\pi\varrho} \int_0^\infty t^\varrho (A-it)^{-1} Q (B-it)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= \frac{\cos \frac{1}{2}\pi\varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^\varrho (A+it)^{-1} Q (B+it)^{-1} dt \\ &= -\frac{\sin \pi\varrho}{\pi} \int_0^\infty t^\varrho (A+t)^{-1} Q (B+t)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Man erhält so für x, y aus \mathfrak{H} die Ungleichung

$$|(\varphi(Q)x, y)| \leq \frac{|\sin \pi\varrho|}{\pi} \|Q\| \left[\int_0^\infty t^\varrho ((B+t)^{-2}x, x) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty t^\varrho ((A+t)^{-2}y, y) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Diese geht unter Berücksichtigung von Hilfssatz 1 über in

$$|(\varphi(Q)x, y)| \leq |\varrho| \cdot \|Q\| \|B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho} x\| \|A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho} y\|.$$

Ganz analog wie oben folgt hieraus

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq |2\nu - 1| \|A^{-1} Q - Q B^{-1}\|, \text{ w. z. b. w.}$$

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es, das innere Produkt (Qx, y) in geeigneter Weise abzuschätzen. Zunächst haben wir

Satz 1.

Es seien A in \mathfrak{D}_A und B in \mathfrak{D}_B selbstadjungiert und $A \geq 0$, $B \geq 0$. Q sei in $\mathfrak{D}_Q \supset \mathfrak{D}_B$ linearer Operator mit $\mathfrak{D}_{Q^*} \supset \mathfrak{D}_A$. Außerdem gelte

$$\|Qf\| \leq \|Bf\| \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D}_B$$

und

$$\|Q^*f\| \leq \|Af\| \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D}_A.$$

Dann besteht die Ungleichung

$$|(Qf, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|$$

für f aus \mathfrak{D}_B und g aus \mathfrak{D}_A , falls $0 \leq \nu \leq 1$ ist.

Beweis.

I. Wir setzen zunächst $A \geq c > 0$ und $B \geq c > 0$ voraus. Dann sind A^{-1} und B^{-1} Hermitesch und beschränkt. Für f aus \mathfrak{D}_Q und g aus \mathfrak{H} wird

$$(A^{-1} Qf, g) = (Qf, A^{-1}g) = (f, Q^* A^{-1}g),$$

also

$$|(A^{-1} Qf, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Setzt man $g = A^{-1} Qf$, so entsteht $\|A^{-1} Qf\| \leq \|f\|$.

Wenn n eine positive Zahl bedeutet und $\int_c^\infty \lambda dF_\lambda = B$ die Spektralzerlegung von B ist, so ist der Operator $Q_n = QF_n$ beschränkt, und es gilt $\|Q_n\| \leq n$. Offenbar wird

$$\|Q_n B^{-1}\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|A^{-1} Q_n\| \leq 1.$$

Nach Hilfssatz 3 folgt

$$\|A^{-\nu} Q_n B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 2$$

$$\|A^{-\nu} Q_n B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 2|2\nu - 1|,$$

also

$$\|A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 1 + |2\nu - 1|.$$

Für x, y aus \mathfrak{H} wird

$$|(Q_n B^{-\nu} x, A^{-(1-\nu)} y)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|x\| \|y\|.$$

Setzt man $x = B^\nu f$ und $y = A^{1-\nu} g$, so entsteht

$$|(Q_n f, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|.$$

Nun gilt für jedes f aus \mathfrak{D}_B die Ungleichung

$$\|Qf - Q_n f\| = \|Q(1 - F_n)f\| \leq \|B(1 - F_n)f\| = \|(1 - F_n)Bf\|.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n f = Qf \quad \text{und}$$

$$|(Qf, g)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(Q_n f, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|$$

für f aus \mathfrak{D}_B und g aus \mathfrak{D}_A .

II. Wir befreien uns von der Annahme $A \geq c > 0$ und $B \geq c > 0$ und setzen nur noch $A \geq 0$ und $B \geq 0$ voraus. Für $c > 0$ gilt

$$\|Qf\| \leq \|(B + c)f\| \quad \text{und} \quad \|Q^*g\| \leq \|(A + c)g\|,$$

wenn f in \mathfrak{D}_B und g in \mathfrak{D}_A liegt. Nach dem oben Bewiesenen wird also

$$|(Qf, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|(B + c)^\nu f\| \|(A + c)^{1-\nu} g\|.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} (B + c)^\nu f = B^\nu f \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} (A + c)^{1-\nu} g = A^{1-\nu} g$$

für alle f aus \mathfrak{D}_B und g aus \mathfrak{D}_A . Daraus folgt die Behauptung.

Wenn Q Hermitesch ist und $A = B$ gesetzt wird, so kann man Satz 1 verschärfen und einfacher beweisen, was später (S. 426) geschehen wird. Vorher geben wir eine Erweiterung von Sätzen, die K. LÖWNER [3] über monotone Matrixfunktionen aufgestellt hat. Zu diesem Zwecke muß zunächst der Beziehung $A \leq B$ für unbeschränkte Operatoren ein genauer Sinn beigelegt werden. Dies führt zu der

Definition³⁾

Es seien A in \mathfrak{D}_A und B in \mathfrak{D}_B selbstadjungiert und $A \geq 0, B \geq 0$. $A^{\frac{1}{2}}$ und $B^{\frac{1}{2}}$ seien die positiven Quadraturwurzeln von A und B . Wenn dann $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ enthalten ist und

$$\|A^{\frac{1}{2}} x\| \leq \|B^{\frac{1}{2}} x\| \quad \text{gilt für alle } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}, \text{ so schreiben wir}$$

$$A \leq B.$$

Hilfssatz 4⁴⁾.

Es seien A und B selbstadjungiert und $A \geq c > 0, B \geq c > 0$. Dann sind die beiden Aussagen

$$A \leq B \quad \text{und} \quad B^{-1} \leq A^{-1}$$

äquivalent.

Beweis.

Aus $A \leq B$ folgt

$$|(A^{\frac{1}{2}} x, y)| = |(x, A^{\frac{1}{2}} y)| \leq \|x\| \|B^{\frac{1}{2}} y\|$$

für x aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ und y aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$. Setzt man nun $x = A^{-\frac{1}{2}} u$ und $y = B^{-\frac{1}{2}} v$, so wird

$$|(B^{-\frac{1}{2}} u, v)| = |(u, B^{-\frac{1}{2}} v)| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} u\| \|v\|.$$

Für $v = B^{-\frac{1}{2}} u$ erhält man schließlich

$$\|B^{-\frac{1}{2}} u\| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} u\|, \quad \text{also} \quad B^{-1} \leq A^{-1}.$$

Ist umgekehrt $B^{-1} \leq A^{-1}$, so folgt wieder

$$|(x, B^{-\frac{1}{2}} y)| = |(B^{-\frac{1}{2}} x, y)| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} x\| \|y\|.$$

Mit $x = A^{\frac{1}{2}} u$ und $y = B^{\frac{1}{2}} v$ wird

$$|(A^{\frac{1}{2}} u, v)| \leq \|u\| \|B^{\frac{1}{2}} v\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}} \text{ und } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}.$$

$L_v(u) = (v, A^{\frac{1}{2}} u)$ ist also ein für alle u aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ erklärtes lineares, beschränktes Funktional. Da $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ in \mathfrak{H} dicht liegt, so läßt sich $L_v(u)$ auf ganz \mathfrak{H} mit derselben Schranke $\|B^{\frac{1}{2}} v\|$ fortsetzen. Also gibt es ein Element v^* aus \mathfrak{H} derart, daß $L_v(u) = (v^*, u)$ wird für alle u aus \mathfrak{H} . Insbesondere wird

$$(A^{\frac{1}{2}} u, v) = (u, v^*) \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}.$$

v liegt also in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$, und es gilt

$$|(u, A^{\frac{1}{2}} v)| \leq \|u\| \|B^{\frac{1}{2}} v\|.$$

³⁾ RELICH [8].

⁴⁾ RELICH [8], Seite 363. Zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir den einfachen Beweis noch einmal an.

Da \mathfrak{D}_A^\dagger in \mathfrak{H} dicht liegt, so gilt die letzte Ungleichung sogar für alle u aus \mathfrak{H} . Setzt man $u = A^\dagger v$, so erhält man schließlich

$$\|A^\dagger v\| \leq \|B^\dagger v\| \quad \text{für alle } v \text{ aus } \mathfrak{D}_B^\dagger \subset \mathfrak{D}_A^\dagger,$$

also $A \leq B$, w. z. b. w.

Durch den letzten Hilfssatz wird die Frage nahegelegt, welche in $0 \leq \lambda < \infty$ stetigen Funktionen $f(\lambda)$ die Eigenschaft besitzen, daß aus $0 \leq A \leq B$ die Beziehung $0 \leq f(A) \leq f(B)$ folgt. Wenn A und B endliche Hermiteische Matrizen beliebig hoher Ordnung sind, so hat LÖWNER [3] bewiesen, daß $f(\lambda)$ ins Komplexe zu einer Funktion $f(z)$ fortgesetzt werden kann, die überall mit Ausnahme der negativ-reellen Achse regulär-analytisch ist und in der oberen Halbebene einen nicht-negativen Imaginärteil besitzt. Wir werden jetzt zeigen, daß durch diese Bedingung die Monotonie sogar hinsichtlich positiver selbstadjungierter Operatoren gesichert ist. Zunächst wird eine geeignete Integraldarstellung benötigt.

Hilfssatz 5.

Es sei $f(z)$ in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene regulär-analytisch und $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z > 0$. Außerdem sei $f(z)$ reell für positiv-reelle z . Dann gibt es eine in $0 \leq t < \infty$ monoton nicht-abnehmende Funktion $\sigma(t)$ mit $\sigma(\infty) < \infty$ und zwei reelle Zahlen α, β mit $\alpha \geq 0$ derart, daß

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{tz-1}{t+z} d\sigma(t) + \alpha z + \beta$$

gilt für alle z aus dem Regularitätsbereich von $f(z)$.

Beweis.

Nach einem funktionentheoretischen Satz⁵⁾ gilt für $\operatorname{Im} z > 0$ die Darstellung

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+1}{t-z} d\rho(t) + \alpha z + \beta.$$

Dabei sind α und β zwei reelle Zahlen mit $\alpha \geq 0$, und $\rho(t)$ ist eine beschränkte, monoton nicht-abnehmende Funktion. Weiter läßt sich zeigen, daß für alle Stetigkeitsstellen $t = a, t = b$ von $\rho(t)$ die Gleichung

$$\pi \int_a^b (t^2+1) d\rho(t) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y > 0)}} \int_a^b \operatorname{Im} [f(x+iy)] dx$$

gilt. Daraus folgt, daß $\rho(t)$ für $t > 0$ konstant ist. Setzt man also

$$\sigma(t) = -\rho(-t) \quad \text{für } t > 0 \text{ und } \sigma(0) = -\rho(0+0),$$

so wird

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{tz-1}{t+z} d\sigma(t) + \alpha z + \beta$$

zunächst für $\operatorname{Im} z > 0$, dann aber wegen $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle z aus dem Regularitätsgebiet von $f(z)$.

Hilfssatz 6.

Die Funktion $f(z)$ erfülle die Voraussetzungen von Hilfssatz 5. Außerdem sei $f(\lambda) \geq 0$ für $a \leq \lambda < \infty$. A sei ein in \mathfrak{D}_A selbstadjungierter Operator mit $A \geq a$

⁵⁾ HERGLOTZ [2], vgl. auch STONE [10], Seite 573.

> 0 , und es werde $f(\lambda) = \int_a^\infty f(\lambda) dE_\lambda$ gesetzt, wobei $\{E_\lambda\}$ die zu A gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet.

Dann gibt es eine in $0 \leq t < \infty$ monoton nicht-abnehmende Funktion $\sigma(t)$ mit $\sigma(\infty) < \infty$ und zwei reelle Zahlen α, β mit $\alpha \geq 0$ derart, daß

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (A + t)^{-1}u)] d\sigma(t) \\ + \alpha \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u)$$

für alle u aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ wird.

Beweis.

Nach Hilfssatz 5 gilt für $\lambda > 0$ die Darstellung

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d\sigma(t) + \alpha\lambda + \beta.$$

Für die Funktion $G(t, \lambda) = \frac{t\lambda - 1}{\lambda + t}$ bestehen die Ungleichungen

$$|G(t, \lambda)| \leq \lambda + a^{-1} \text{ und } |G(t, \lambda)| \leq t + a^{-1} \text{ in } \begin{cases} a \leq \lambda < \infty \\ 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \rightarrow \int_0^\infty G(t, \lambda) d\sigma(t) \text{ für } t_1 \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig in } a \leq \lambda \leq \lambda_1 \text{ und} \\ \left| \int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \right| \leq (\lambda + a^{-1})(\sigma(\infty) - \sigma(0)).$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich $f(\lambda) = O(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. $\mathfrak{D}_{f(A)^{\frac{1}{2}}}$ ist also in $\mathfrak{D}_{f(A)^{\frac{1}{2}}}$ enthalten.

Wenn $\{E_\lambda\}$ die zu A gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet, so folgt

$$\int_0^{t_1} \left[\int_a^\infty G(t, \lambda) d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) = \int_a^\infty \left[\int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \right] d(u, E_\lambda u).$$

Da u in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ liegt, also $\int_a^\infty \lambda d(u, E_\lambda u) < \infty$ ist, so folgt durch Grenzübergang ($t_1 \rightarrow \infty$)

$$\int_0^\infty \left[\int_a^\infty G(t, \lambda) d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty G(t, \lambda) d\sigma(t) \right] d(u, E_\lambda u).$$

Wir erhalten also

$$\int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (A + t)^{-1}u)] d\sigma(t) + \alpha \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u) \\ = \int_0^\infty \left[\int_a^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) + \alpha \int_a^\infty \lambda d(u, E_\lambda u) + \beta \int_a^\infty d(u, E_\lambda u) \\ = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d\sigma(t) + \alpha\lambda + \beta \right] d(u, E_\lambda u) = \int_a^\infty f(\lambda) d(u, E_\lambda u) \\ = \|f(A)^{\frac{1}{2}} u\|^2$$

Satz 2.

Es sei $f(z)$ in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene regulär-analytisch und $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z > 0$. Außerdem sei $f(\lambda)$ stetig und $f(\lambda) \geq 0$ für $0 \leq \lambda < \infty$. Dann folgt aus

$$0 \leq A \leq B \text{ die Beziehung } 0 \leq f(A) \leq f(B).$$

Beweis.

I. Aus $0 \leq A \leq B$ folgt $c + t \leq A + c + t \leq B + c + t$ für $c > 0, t \geq 0$. Wenn u ein Element aus $\mathfrak{D}_{B+\frac{1}{2}}$ bedeutet, so wird nach Hilfssatz 6

$$\begin{aligned} \|f(B+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 &= \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (B+c+t)^{-1}u)] d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha \|(B+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u). \end{aligned}$$

Wegen $A \leq B$ liegt u auch in $\mathfrak{D}_{A+\frac{1}{2}}$. Also wird

$$\begin{aligned} \|f(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 &= \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (A+c+t)^{-1}u)] d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha \|(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Anwendung von Hilfssatz 4 die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\|f(B+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \|f(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 \\ &= \int_0^\infty [(u, (A+c+t)^{-1}u) - (u, (B+c+t)^{-1}u)] (t^2 + 1) d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha [\|(B+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \|(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Aus $\|f(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \int_0^\infty f(\lambda+c) d(u, E_\lambda u)$ folgt, wenn man bedenkt, daß $f(\lambda)$ für $0 \leq \lambda < \infty$ stetig ist und $f(\lambda) = O(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$, gilt,

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} \|f(A+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \|f(A)^{\frac{1}{2}} u\|^2$$

und entsprechend

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} \|f(B+c)^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \|f(B)^{\frac{1}{2}} u\|^2$$

für alle u aus $\mathfrak{D}_{B+\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{D}_{A+\frac{1}{2}}$. Wir erhalten also

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}} u\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}} u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{B+\frac{1}{2}}.$$

II. Jetzt sei u beliebig aus $\mathfrak{D}_{f(B)^{\frac{1}{2}}}$. Da $f(B)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{D}_{B+\frac{1}{2}}$ wesentlich selbstadjungiert ist, so gibt es eine Folge $\{u_n\}$ aus $\mathfrak{D}_{B+\frac{1}{2}}$ mit $u_n \rightarrow u$ und $f(B)u_n \rightarrow f(B)u$, $n \rightarrow \infty$. Aus der Ungleichung

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| \quad \text{für } m, n = 1, 2, \dots$$

folgt daher $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f(A)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| = 0$. Da $f(A)^{\frac{1}{2}}$ abgeschlossen ist, so ist u auch in $\mathfrak{D}_{f(A)^{\frac{1}{2}}}$ enthalten, und es wird $\lim_{n \rightarrow \infty} f(A)^{\frac{1}{2}} u_n = f(A)^{\frac{1}{2}} u$. Lassen wir daher in der Ungleichung

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}} u_n\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}} u_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

n gegen ∞ streben, so folgt schließlich die Behauptung. Als Anwendung erhält man

Satz 3.

Es sei A in \mathfrak{D}_A und B in \mathfrak{D}_B selbstadjungiert und $A \geq 0$, $B \geq 0$. Ferner sei \mathfrak{D}_B in \mathfrak{D}_A enthalten, und es gelte $\|Ax\| \leq \|Bx\|$ für alle x aus \mathfrak{D}_B ⁶⁾. Dann ist für $0 \leq \tau \leq 1$ auch \mathfrak{D}_{B^τ} in \mathfrak{D}_{A^τ} enthalten, und es ist

$$\|A^\tau x\| \leq \|B^\tau x\| \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{und alle } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^\tau}.$$

Beweis.

Aus den über A und B gemachten Voraussetzungen folgt $A^2 \leq B^2$. Sei nun $f(\lambda) = \lambda^\tau$ ($0 \leq \lambda < \infty$) und $f(z)$ die Funktion, die durch analytische Fortsetzung von $f(\lambda)$ in die längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene entsteht, so sind die Bedingungen von Satz 2 für $0 \leq \tau \leq 1$ erfüllt, und es wird $0 \leq A^{2\tau} \leq B^{2\tau}$. Dies ist aber wegen $A \geq 0$, $B \geq 0$ mit der Behauptung äquivalent.

Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun Satz 1 sogar ohne den Faktor $1 + |2\nu - 1|$ leicht beweisen, wenn darin Q als Hermitesch vorausgesetzt wird. Es gilt

Satz 4.

Es sei A in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert und $A \geq 0$. Außerdem sei Q in \mathfrak{D}_A Hermitesch und $\|Qx\| \leq \|Ax\|$ für x aus \mathfrak{D}_A . Dann gilt die Ungleichung

$$|(Qx, y)| \leq \|A^\tau x\| \|A^{1-\tau} y\| \quad \text{für } x, y \text{ aus } \mathfrak{D}_A \text{ und } 0 \leq \tau \leq 1.$$

Beweis.

Es sei $\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ die Spektraldarstellung von A . Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $Q_n = E_n Q E_n$ Hermitesch und beschränkt. Für x aus \mathfrak{D}_A hat man

$$\| |Q_n| x \| = \| Q_n x \| \leq \| E_n A x \| \leq \| A x \|.$$

Also gilt nach Satz 3 die Ungleichung

$$\| |Q_n|^\tau x \| \leq \| A^\tau x \| \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{und } x \text{ aus } \mathfrak{D}_A.$$

Weiter wird

$$|(Q_n x, y)| \leq \| |Q_n|^\tau x \| \| |Q_n|^{1-\tau} y \| \leq \| A^\tau x \| \| A^{1-\tau} y \|$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n x, y) = (Qx, y)$ für x, y aus \mathfrak{D}_A , woraus sich die Behauptung ergibt.

Zum Schluß dieses Paragraphen soll gezeigt werden, wie man durch den Ansatz $S = \int_{t_1}^{t_2} A(t) Q B(t) dt$ die Gleichung $AS + SB = Q$ in einfacher Weise auflösen kann. Dies wird allerdings im folgenden nicht benutzt werden. Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz 7.

Es sei A ein beschränkter Operator und $\frac{1}{2}(A + A^*) \leq a$. Setzt man dann

$$e^A = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

so gilt

$$\|e^A\| \leq e^a.$$

⁶⁾ Wenn B^{-1} beschränkt ist, so folgt bereits aus $\mathfrak{D}_B \subseteq \mathfrak{D}_A$ eine Ungleichung der Form $\|Ax\| \leq k\|Bx\|$, da dann der Operator $T = AB^{-1}$ in ganz \mathfrak{H} erklärt ist und seine adjungierte T^* dicht definiert ist, vgl. RELICH [5].

Beweis.

Mit $\frac{1}{2}(A + A^*) = A_1$ und $\frac{1}{2i}(A - A^*) = A_2$ wird $A = A_1 + i A_2$, und A_1, A_2 sind Hermiteisch. Dann gilt für ganzes positives n und jedes f aus \mathfrak{H} die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} f \right\|^2 &= \left\| f + \frac{1}{n} A_1 f + \frac{i}{n} A_2 f + \dots \right\|^2 \\ &\leq (f, f) + \frac{2}{n} (f, A_1 f) + \frac{m}{n^2} (f, f) \leq \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{m}{n^2}\right) (f, f), \end{aligned}$$

wobei m eine feste positive, von f unabhängige Zahl bedeutet. Für hinreichend großes n erhalten wir also

$$\left\| e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} \right\| \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{m}{n^2}\right).$$

Folglich wird

$$\left\| e^{A_1 + i A_2} \right\| = \left\| \left\{ e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} \right\}^n \right\| \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{m}{n^2}\right)^n.$$

Lassen wir n gegen ∞ streben, so folgt

$$\|e^A\| = \|e^{A_1 + i A_2}\| \leq e^a.$$

Es gilt nun

Satz 5.

Es seien A, B und Q beschränkte Operatoren. Außerdem sei

$$\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a, \quad \frac{1}{2}(B + B^*) \geq b \quad \text{und} \quad a + b > 0.$$

Dann hat die Gleichung $AS + SB = Q$ genau einen beschränkten Operator S als Lösung, und es gilt $\|S\| \leq (a + b)^{-1} \|Q\|$. Die Lösung läßt sich in der Form

$$S = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt \quad \text{darstellen.}$$

Beweis.

Nach Hilfssatz 7 ist

$$\|e^{-At} Q e^{-Bt}\| \leq \|Q\| e^{-(a+b)t} \quad \text{für } 0 \leq t < \infty.$$

Also ist $\chi(Q) = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt$ sinnvoll und stellt einen beschränkten Operator dar mit $\|\chi(Q)\| \leq (a + b)^{-1} \|Q\|$. Weiter wird

$$\begin{aligned} \chi(AQ + QB) &= A \chi(Q) + \chi(Q) B = \int_0^\infty [A e^{-At} Q e^{-Bt} + e^{-At} Q B e^{-Bt}] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [-e^{-At} Q e^{-Bt}] dt = [-e^{-At} Q e^{-Bt}]_{t=0}^{t=\infty} = Q. \end{aligned}$$

Der Operator $S = \chi(Q)$ ist also eine Lösung von $AS + SB = Q$. Umgekehrt folgt aus der Gleichung $AS + SB = Q$, wenn wir auf beide Seiten die Funktion χ anwenden,

$$\chi(Q) = \chi(AS + SB) = A \chi(S) + \chi(S) B = S.$$

Daraus ergibt sich, daß die Gleichung $AS + SB = Q$ durch $S = \chi(Q)$ eindeutig aufgelöst wird.

Als Spezialfall ergibt sich mit $B = 0$, $Q = 1$ eine Verallgemeinerung eines Satzes von TOEPLITZ⁷⁾, nämlich

Satz 6.

Es sei A beschränkt und $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a > 0$. Dann hat A eine in ganz \mathfrak{H} erklärte Reziproke, es ist $\|A^{-1}\| \leq a^{-1}$, und es gilt die Darstellung $A^{-1} = \int_0^\infty e^{-At} dt$.

Satz 6 wird falsch, wenn man die Ungleichung $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a > 0$ durch die schwächere $\frac{1}{2}|A + A^*| \geq a > 0$ ersetzt. Dies erkennt man etwa an dem Beispiel $A = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 2 Reguläre, selbstadjungierte Operatoren mit festem Definitionsbereich.

Wir betrachten jetzt Operatoren $A(\varepsilon)$, die in einem festen Definitionsbereich \mathfrak{A} selbstadjungiert sind und regulär von einem reellen Parameter ε abhängen, also $A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u + \dots$ für u aus \mathfrak{A} . Es wird sich herausstellen, daß gewisse Funktionen solcher Operatoren, die in der Spektraltheorie eine Rolle spielen, wie z. B. $E_\lambda(\varepsilon)$, $|A(\varepsilon)|$ und $A(\varepsilon)^q$ ($-1 < q < 1$), ebenfalls diese Eigenschaft zukommt. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Koeffizienten A_1, A_2, \dots , den in Hilfssatz 1 angegebenen Ungleichungen unterworfen sind. Da die Reziproke von $A(\varepsilon) - z$ für komplexe z leicht in eine NEUMANNsche Reihe nach Potenzen von ε entwickelt werden kann, so liegt es nahe, die oben erwähnten Funktionen von $A(\varepsilon)$ durch Integration von $(A(\varepsilon) - z)^{-1}$ nach z zu gewinnen. Das hat den Vorteil, daß die Entwicklungskoeffizienten der gesuchten Operatoren in geschlossener Form durch Integrale dargestellt werden können, was bei direktem Potenzreihenansatz z. B. im Falle des Operators $A(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ nicht ohne weiteres möglich ist. Bei der Durchführung der Rechnung stellt sich heraus, daß die Abschätzungen für $\|A_\nu u\|$, $\nu = 1, 2, \dots$ in der durch Hilfssatz 1 gelieferten Form nicht direkt verwendbar sind. Vielmehr wird Satz 4 aus § 1 herangezogen. Dies geschieht in Hilfssatz 2, wo für die Entwicklungskoeffizienten von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ geeignete Abschätzungen hinsichtlich des reellen Parameters t gewonnen werden. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen findet sich zusammengefaßt in Satz 1, aus dem durch Spezialisierungen die Regularität der Operatoren $A(\varepsilon)^q$ (Satz 2), bzw. $E_\lambda(\varepsilon)$ (Satz 3) und $|A(\varepsilon)|$ (Satz 4) gefolgert wird.

Hilfssatz 1.

Es sei $A(\varepsilon)$ eine einparametrische Schar in \mathfrak{A} selbstadjungierter Operatoren, und $A(\varepsilon)u$ sei für jedes feste u aus \mathfrak{A} ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Dann gibt es in \mathfrak{A} Hermiteische Operatoren A_1, A_2, \dots und feste positive Konstanten a, k , derart, daß

$$\|A_\nu u\| \leq a k^\nu (\|A_0 u\| + \|u\|) \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{A} \text{ gilt}$$

und $A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u + \dots$ wird⁸⁾.

⁷⁾ HELLINGER-TOEPLITZ [1], Seite 1430. Zusatz bei der Korrektur am 26. 7. 1951. In der Arbeit von J. v. NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, Math. Nachr. 4, 258–281 (1950/51), findet sich Satz 6 auf Seite 275.

⁸⁾ RELICH [6], Seite 476.

Hilfssatz 2.

Es sei A_0 in \mathfrak{D}_{A_0} selbstadjungiert, und das Spektrum sei in einer Umgebung von $\lambda = 0$ leer. Ferner sei A_1, A_2, \dots eine Folge in \mathfrak{D}_{A_0} Hermitescher Operatoren mit $\|A_n f\| \leq a k^n \|A_0 f\|$, $n = 1, 2, \dots$. Dann ist $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in \mathfrak{D}_{A_0} selbstadjungiert. $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ ist für reelle t beschränkt, und es gilt die Entwicklung

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu}.$$

Darin sind $R_{\nu}(t)$ beschränkte Operatoren, die stetig von t abhängen, und es besteht die Ungleichung

$$|(R_{\nu}(t)x, y)| \leq a k^{\nu} (1+a)^{\nu-1} \| |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} y \|$$

für $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und alle Elemente x, y aus \mathfrak{H} .

Beweis.

Nach Voraussetzung existiert $(A_0 + it)^{-1}$ für $-\infty < t < \infty$ und ist beschränkt. Aus

$$\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\| = a k^n \| |A_0| x \|$$

folgt nach § 1, Satz 4 die Ungleichung

$$|(A_n x, y)| \leq a k^n \| |A_0|^{\alpha} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} y \| \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Setzt man $x = |A_0|^{-\alpha} u$, $y = |A_0|^{-(1-\alpha)} v$, wobei u, v Elemente aus \mathfrak{D}_{A_0} sind, so liegen auch x und y in \mathfrak{D}_{A_0} , und es folgt

$$|(|A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha} u, v)| \leq a k^n \|u\| \|v\|,$$

also

$$\| |A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha} u \| \leq a k^n \|u\|$$

und

$$\| |A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} u \| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} |\varepsilon|^{\nu} \|u\| = \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} \|u\|$$

für u aus \mathfrak{D}_{A_0} . Die Operatoren $|A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha}$ und $|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}$ lassen sich also durch Abschließen auf ganz \mathfrak{H} fortsetzen. Ferner gilt

$$\|A_n (A_0 + it)^{-1} f\| \leq a k^n \|A_0 (A_0 + it)^{-1} f\| \leq a k^n \|f\|$$

und

$$\|(A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1} f\| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} |\varepsilon|^{\nu} \|f\| = \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} \|f\|$$

für f aus \mathfrak{H} . Aus der Identität

$$A(\varepsilon) + it = [1 + (A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}] (A_0 + it)$$

folgt daher für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ die Existenz und Beschränktheit von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ sowie die Gleichung

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} [1 + (A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}]^{-1}.$$

Da $(A(\varepsilon) + it)^{-1} f$ für alle f aus \mathfrak{H} ein Element in \mathfrak{D}_{A_0} darstellt, so ist $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{D}_{A_0} selbstadjungiert. Weiter hat man

$$\begin{aligned} (A(\varepsilon) + it)^{-1} &= (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} (A_0 + it)^{-1} [(A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}]^{\nu} \\ &= (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} \times \\ &\quad \times |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} |A_0|^{1-\alpha}]^{\nu-1} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}] |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} \\ &= (A_0 + it)^{-1} + |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} S(t, \alpha; \varepsilon) |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$S(t, \alpha; \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} |A_0|^{1-\alpha}]^{\nu-1} \times \\ \times [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}].$$

Die Reihe konvergiert für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+\alpha)^{-1}$ und stellt einen beschränkten Operator dar. Entwickelt man jedes Glied nach ε , so wird die durch Umordnung entstehende Potenzreihe durch den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a k^{\alpha} \varepsilon^k \right]^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a k \varepsilon}{1 - k \varepsilon} \right)^{\nu} = \frac{a k \varepsilon}{1 - (1+\alpha) k \varepsilon} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} (1+\alpha)^{\nu-1} \varepsilon^{\nu}$$

majorisiert. Hieraus folgt

$$S(t, \alpha; \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{\nu}(t, \alpha) \varepsilon^{\nu} \text{ mit } \|S_{\nu}(t, \alpha)\| \leq a k^{\nu} (1+\alpha)^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Setzt man

$$|A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} S_{\nu}(t, \alpha) |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} = R_{\nu}(t),$$

so ist $R_{\nu}(t)$ beschränkt, und es gilt

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu}$$

sowie die Abschätzung

$$|(R_{\nu}(t)x, y)| \leq a k^{\nu} (1+\alpha)^{\nu-1} \| |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} y \|$$

für alle Elemente x, y aus \mathfrak{H} und $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Für $n \geq 1$ hat man die Relation

$$\|R_n(t) - \varepsilon^{-n} \{ (A(\varepsilon) + it)^{-1} - (A_0 + it)^{-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu} \}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $-\infty < t < \infty$ (für $n=1$ ist die Summe durch Null zu ersetzen). Daraus, sowie aus der Tatsache, daß $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ und $(A_0 + it)^{-1}$ stetig von t abhängen, erschließt man schrittweise die Stetigkeit der Operatoren $R_n(t)$, also $\lim_{t \rightarrow t_0} \|R_n(t) - R_n(t_0)\| = 0$ für alle reellen Werte t_0 . Damit ist

Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Im folgenden werden wir die Reihenentwicklung von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ dazu benutzen, um die Regularität der eingangs erwähnten Funktionen von $A(\varepsilon)$ zu beweisen. Zu diesem Zweck wird eine geeignete Integraldarstellung benötigt. Das ist das Ziel des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3.

Es sei A in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert, und das Spektrum sei in einer Umgebung von $\lambda = 0$ leer. $\{E_{\lambda}\}$ bedeute die zu A gehörige linksstetige Spektralschar, und es werde

$|A|^{\varrho} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^{\varrho} dE_{\lambda}$ gesetzt. Dann gilt für jedes feste Element f aus $\mathfrak{D}_{|A|^{\varrho}}$ und $-1 < \varrho < 1$ die Gleichung

$$(1 - 2E_0)|A|^{\varrho} f = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} f dt.$$

Beweis.

Aus

$$(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1} = \int_{|\lambda| \geq d > 0} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2} dE_{\lambda}$$

folgt für $0 < t_1 < t_2 < \infty$ die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} t^e [(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1}] f dt = \int_{|\lambda| \geq d} \left[\int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right] \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot |\lambda|^e dE_\lambda f.$$

Also wird

$$\begin{aligned} & \left\| (1 - 2E_0) |A|^e f - \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} t^e [(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1}] f dt \right\|^2 \\ &= \int_{|\lambda| \geq d} \left(1 - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{s^e ds}{1+s^2} \right)^2 |\lambda|^{2\varrho} d(f, E_\lambda f). \end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen

$$\int_0^\infty \frac{s^e ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho} \quad \text{und} \quad \int_{|\lambda| \geq d} |\lambda|^{2\varrho} d(f, E_\lambda f) < \infty$$

die Gleichung

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow \infty}} \left\| (1 - 2E_0) |A|^e f - \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} t^e [(A - it)^{-1} + (A + it)^{-1}] f dt \right\| = 0,$$

was mit der Behauptung identisch ist.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich den

Satz 1.

Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Dann ist der Operator $B(\varepsilon) = (1 - 2E_0(\varepsilon)) |A(\varepsilon)|^e$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und $-1 < \varrho < 1$ in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ selbstadjungiert. Es gibt eine Folge in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ erklärter Hermitescher Operatoren B_1, B_2, \dots mit $\|B_n f\| \leq a k^n (1+a)^{n-1} \|B(0) f\|$ (f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$) derart, daß $B(\varepsilon) f = B(0) f + \varepsilon B_1 f + \dots$ für alle f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ gilt.

Beweis.

Da die Operatoren $|A(\varepsilon)|$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ den gleichen Definitionsbereich besitzen und die Ungleichungen $\| |A(\varepsilon)| f \| \leq c(\varepsilon) \| |A(0)| f \|$ und $\| |A(0)| f \| \leq c(\varepsilon) \| |A(\varepsilon)| f \|$ für alle f aus $\mathfrak{D}_{|A(0)|} = \mathfrak{D}_{|A(\varepsilon)|}$ erfüllt sind, so ist nach § 1, Satz 3 auch $\mathfrak{D}_{|A(\varepsilon)|^e} = \mathfrak{D}_{|A(0)|^e}$ oder $\mathfrak{D}_{B(\varepsilon)} = \mathfrak{D}_{B(0)}$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Bleibt noch die Regularität von $B(\varepsilon)$ zu beweisen. Nach Hilfssatz 2 und 3 gilt für jedes g aus \mathfrak{H} und f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} (g, B(\varepsilon) f) &= \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^e (g, (A(\varepsilon) - it)^{-1} f) dt \\ &= (g, B(0) f) + \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^e \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu (g, R_\nu(t) f) \right\} dt. \end{aligned}$$

Es sei $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Dann hat man nach Hilfssatz 2, wenn darin $\alpha = \frac{1}{2} \varrho + \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e |(g, R_\varepsilon(t)f)| dt \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \times \\
& \times \int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \| |A_0|^{\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}} (A_0 + it)^{-1} f \| \| |A_0|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e} (A_0 + it)^{-1} g \| dt \\
& \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \| |A_0|^{\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}} (A_0 + it)^{-1} f \|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \| |A_0|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e} (A_0 + it)^{-1} g \|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
& = a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^e + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right\} dt \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{-e} + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda g, g) \right\} dt \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ferner wird, da $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum von $A(0)$ gehört,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^e + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right\} dt = \int_{|\lambda| \geq d > 0} |\lambda|^{2e} \left\{ \int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right\} d(E_\lambda f, f) \\
& \leq \int_{|\lambda| \geq d} |\lambda|^{2e} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right\} d(E_\lambda f, f) = \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} \| |A_0|^e f \|^2.
\end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Rechnung ergibt sich

$$\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{1-e}}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda g, g) \right\} dt \leq \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} \|g\|^2.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e |(g, R_\varepsilon(t)f)| dt \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} \| |A_0|^e f \| \|g\|.$$

Setzt man daher

$$B_\varepsilon(g, f) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e \cdot (g, R_\varepsilon(t)f) dt,$$

so ist $B_\varepsilon(g, f)$ eine für alle g aus \mathfrak{H} und f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ erklärte bilineare Form, und es gilt

$$(g, B(\varepsilon)f) = (g, B(0)f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu B_\nu(g, f) \text{ für } |\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}.$$

Wegen $(g, B(\varepsilon)f) = (B(\varepsilon)g, f) = \overline{(f, B(\varepsilon)g)}$ ist $B_\nu(g, f) = \overline{B_\nu(f, g)}$ für g, f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$.

Daraus, sowie aus der Ungleichung

$$|B_\nu(g, f)| \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \|g\| \|B(0)f\|$$

folgt²⁾ die Existenz eines in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ Hermiteschen Operators B_ν mit $B_\nu(g, f) = (g, B_\nu f)$ und $\|B_\nu f\| \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \|B(0)f\|$.

²⁾ STONE [10], Seite 63.

Es ergibt sich schließlich

$$B(\varepsilon)f = B(0)f + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v B_v f \quad \text{für } |\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1} \text{ und } f \text{ aus } \mathfrak{D}_{B(0)}.$$

Durch Spezialisierungen ergeben sich unmittelbar folgende Sätze.

Satz 2.

Es sei A_0 in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert und $A_0 \geq d > 0$. Ferner sei A_1, A_2, \dots eine Folge in \mathfrak{D}_A Hermitescher Operatoren mit

$$\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\| \quad \text{für alle } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{A_0}.$$

Dann ist der Operator $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert und es gilt $A(\varepsilon) \geq d(\varepsilon) > 0$. Setzt man $A(\varepsilon)^e = \int_0^{\infty} \lambda^e dE_\lambda(\varepsilon)$, wo $\{E_\lambda(\varepsilon)\}$ die zu $A(\varepsilon)$ gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet, so gilt für $-1 < \varrho < 1$, $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und f aus $\mathfrak{D}_{A_0^e}$ die Entwicklung

$$A(\varepsilon)^e f = A_0^e f + \varepsilon C_1 f + \varepsilon^2 C_2 f + \dots$$

Dabei sind C_n ($n = 1, 2, \dots$) in $\mathfrak{D}_{A_0^e}$ Hermitesche Operatoren mit

$$\|C_n x\| \leq a k^n (1+a)^{n-1} \|A_0^e x\| \quad \text{für } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{A_0^e}.$$

Beweis.

Nach Hilfssatz 2 ist $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Aus $\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\|$ folgt nach § 1, Satz 4, wenn man darin $y = x$ und $\tau = \frac{1}{2}$ setzt,

$$|(A_n x, x)| \leq a k^n \|A_0^{\frac{1}{2}} x\|^2 = a k^n (A_0 x, x)$$

für x aus \mathfrak{D}_{A_0} . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (A(\varepsilon)x, x) &\geq (A_0 x, x) - \sum_{n=1}^{\infty} |(A_n x, x)| |\varepsilon|^n \geq (1 - \sum_{n=1}^{\infty} a k^n |\varepsilon|^n) (A_0 x, x) \\ &= \frac{1 - (1+a)k|\varepsilon|}{1 - k|\varepsilon|} (A_0 x, x) \geq \frac{(1 - (1+a)k|\varepsilon|)d}{1 - k|\varepsilon|} \cdot (x, x) \end{aligned}$$

für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und alle x aus $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A(\varepsilon)}$, also

$$A(\varepsilon) \geq \frac{(1 - (1+a)k|\varepsilon|)d}{1 - k|\varepsilon|} > 0.$$

Hieraus folgt $E_0(\varepsilon) = 0$ und $4(\varepsilon) = A(\varepsilon)$, also

$$B(\varepsilon) = (1 - 2E_0(\varepsilon)) |A(\varepsilon)|^e = A(\varepsilon)^e$$

für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Anwendung von Satz 1 liefert schließlich die Behauptung.

Satz 3.

Es sei A_0 in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert, und das Spektrum von A_0 sei im Intervall $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ leer. A_1, A_2, \dots sei eine Folge in \mathfrak{D}_A Hermitescher Operatoren mit

$$\|A_n x\| \leq a k^n (\|A_0 x\| + \|x\|),$$

und es gelte $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$ für u aus \mathfrak{D}_{A_0} .

Dann ist $A(\varepsilon)$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert. Setzt man $\alpha = 1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)$, und bedeutet $\{E_\lambda(\varepsilon)\}$ die zu $A(\varepsilon)$ gehörige linksstetige Spektralschar, so gilt für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ die Entwicklung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon) = E_{\lambda_0} + \varepsilon E_{\lambda_0}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{\lambda_0}^{(2)} + \dots$$

mit $\|E_{\lambda_0}^{(n)}\| \leq \frac{1}{2} \alpha (a\alpha + 1)^{n-1} k^n$, $n = 1, 2, \dots$

Beweis.

I.¹⁰⁾ Offenbar ist $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{D}_A Hermitesch für $|\varepsilon| < k^{-1}$. Wenn t eine von 0 verschiedene reelle Zahl bedeutet, so ist

$$\begin{aligned} \|(A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}x\| &\leq \sum_{r=1}^{\infty} a k^r |\varepsilon|^r [\|(A_0 + it)^{-1}x\| + \|A_0(A_0 + it)^{-1}x\|] \\ &\leq \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} (|t|^{-1} + 1) \|x\|. \end{aligned}$$

Für $|\varepsilon| < k^{-1} (1 + a)^{-1}$ und genügend großes $|t|$ ist daher

$$\begin{aligned} S(t) &= (A_0 + it)^{-1} [1 + (A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}]^{-1} \\ &= (A_0 + it)^{-1} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r [(A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}]^r \right] \end{aligned}$$

ein in ganz \mathfrak{F} erklärter, beschränkter Operator mit dem Wertebereich $\mathfrak{B}_{S(t)} = \mathfrak{D}_A$, und es gilt die Gleichung

$$(A(\varepsilon) + it) S(t) f = f \quad \text{für jedes } f \text{ aus } \mathfrak{F}.$$

Daraus folgt aber, daß $A(\varepsilon)$ in \mathfrak{D}_A selbstadjungiert ist.

II. Man setze $D_0 = A_0 - \lambda_0$ und $D(\varepsilon) = A(\varepsilon) - \lambda_0$. Dann wird $\|D_0 x\| \geq d \|x\|$ und $D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$ mit

$$\begin{aligned} \|D_n x\| &\leq a k^n (\|A_0 x\| + \|x\|) \\ &\leq a k^n (\|D_0 x\| + (1 + |\lambda_0|) \|x\|) \leq a k^n (1 + d^{-1} (1 + |\lambda_0|)) \|D_0 x\| \end{aligned}$$

($n = 1, 2, \dots$)

für x aus \mathfrak{D}_A . Anwendung von Satz 1 auf den Operator $D(\varepsilon)$ liefert für $\varrho = 0$ die Behauptung.

Hieraus folgt unmittelbar

Satz 4.

Es sei $A(\varepsilon)$ in einem festen Definitionsbereich \mathfrak{A} selbstadjungiert, und $A(\varepsilon)u$ sei für jedes u aus \mathfrak{A} ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Außerdem sei $\lambda = 0$ eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$. Dann ist auch $|A(\varepsilon)|u$ für u aus \mathfrak{A} in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ ein reguläres Element.

Beweis.

Hilfssatz 1 und Satz 3 liefern die Regularität von $E_0(\varepsilon)$. Da $A(\varepsilon)u$ für jedes feste u aus \mathfrak{A} ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung

$$|A(\varepsilon)|u = (1 - 2E_0(\varepsilon))A(\varepsilon)u$$

die Regularität von $|A(\varepsilon)|u$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$.

§ 3. Stetige Abhängigkeit der Spektralschar von einem Parameter.

Es soll jetzt noch untersucht werden, wie die Spektralschar sich verhält, wenn nur stetige Abhängigkeit von ε vorausgesetzt wird. Dabei treten an Stelle von $A(\varepsilon)$ Folgen von Operatoren. Für den Fall der gewöhnlichen Konvergenz haben wir den

¹⁰⁾ Der Schritt 1 des Beweises findet sich bei B. v. Sz. NAOY [12], S. 353.

Satz 1¹¹⁾).

Es sei A in \mathfrak{A} selbstadjungiert, und λ_* sei kein Punkteigenwert von A . Ferner sei $A^{(n)}$ eine Folge in $\mathfrak{A}^{(n)}$ selbstadjungierter Operatoren und \mathfrak{D} eine in \mathfrak{A} , $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$, ... enthaltene Linearmanigfaltigkeit. Ist dann A in \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} f = A f \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D},$$

so wird $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda_*}^{(n)} f = E_{\lambda_*} f$ für f aus \mathfrak{D} , wenn $\{E_{\lambda}^{(n)}\}$ und $\{E_{\lambda}\}$ die zu $A^{(n)}$ bzw. A gehörigen linksstetigen Spektralscharen bedeuten.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda_* = 0$ vorausgesetzt werden. Wegen der Selbstadjungiertheit von $A^{(n)}$ und A gilt

$$A^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(n)} \quad \text{und} \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}.$$

Es sei nun m eine positive ganze Zahl und $a \leq \lambda \leq b$ ein den Punkt $\lambda = 0$ nicht enthaltendes Intervall. f sei ein Element aus \mathfrak{D} . Wir setzen

$$\alpha = \min(|a|, |b|), \quad \beta = \max(|a|, |b|), \quad \lambda_v = a + \frac{b-a}{m} \cdot v,$$

ferner

$$(E_b - E_a) f = g \quad \text{und} \quad (E_{\lambda_v} - E_{\lambda_{v-1}}) f = g_v \quad (v = 1, 2, \dots, m).$$

Da A in \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert ist, so können wir zu jedem g , ein g' aus \mathfrak{D} so bestimmen, daß die Ungleichungen

$$\|A g' - A g\| \leq \frac{1}{m^2} \quad \text{und} \quad \|g' - g\| \leq \frac{1}{m^2}$$

erfüllt sind. Dann hat man

$$\begin{aligned} A g'_v &= \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} \lambda dE_{\lambda} g + (A g'_v - A g_v) = \lambda_v g_v + \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} (\lambda - \lambda_v) dE_{\lambda} g_v + (A g'_v - A g_v) \\ &= \lambda_v g'_v + \lambda_v (g_v - g'_v) + (A g'_v - A g_v) + \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} (\lambda - \lambda_v) dE_{\lambda} g_v. \end{aligned}$$

Also wird

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_v)^2 d(g'_v, E_{\lambda}^{(n)} g'_v) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|.$$

Für $\alpha > 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|(A^{(n)} - A) g'_v\| &\geq \left[\int_{-\infty}^0 (\lambda - \lambda_v)^2 d(g'_v, E_{\lambda}^{(n)} g'_v) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\| \\ &= \lambda_v \|E_0^{(n)} g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für $\alpha < 0$ die Ungleichung

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq |\lambda_v| \|(1 - E_0^{(n)}) g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|.$$

Beide Ungleichungen können zu

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq |\lambda_v| \|(E_0^{(n)} - E_0) g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|$$

¹¹⁾ RELICH [4]. Wir geben für diesen Satz einen neuen Beweis.

zusammengefaßt werden und liefern

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) g_r\| \leq \frac{1}{\alpha} \left\{ \|(A^{(n)} - A) g_r'\| + \frac{1+2\beta}{m^2} + \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_r\| \right\}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|(E_0^{(n)} - E_0) g\| &\leq \sum_{r=1}^m \|(E_0^{(n)} - E_0) g_r\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{r=1}^m \|(A^{(n)} - A) g_r'\| + \frac{1+2\beta}{m} + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{m}} \|g\| \right\}. \end{aligned}$$

Wenn wir m so bestimmen, daß

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1+2\beta}{m} + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{m}} \|g\| \right\} \leq \varepsilon$$

ausfällt, und darauf N so wählen, daß

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{r=1}^m \|(A^{(n)} - A) g_r'\| \leq \varepsilon \quad \text{wird für } n \geq N,$$

so folgt

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) g\| \leq 2\varepsilon, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) g\| = 0.$$

Wenn f ein beliebiges Element in \mathfrak{H} bedeutet, so setzen wir

$$f_k = \left(E_k - E_{\frac{1}{k}}\right) f + \left(E_{-\frac{1}{k}} - E_{-k}\right) f.$$

Da $\lambda = 0$ nicht Punkteigenwert von A ist, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ und

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| \leq \|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| + 2\|f - f_k\|.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) f\| = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn $A^{(n)}$ gleichmäßig gegen A konvergiert, also

$$\|(A^{(n)} - A) f\| \leq \varepsilon_n (\|f\| + \|A f\|) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

gilt, so läßt sich in einem wichtigen Falle die gleichmäßige Konvergenz der $E_{\lambda_n}^{(n)}$ gegen E_{λ_0} beweisen. Es gilt nämlich

Satz 2.

Es seien A und B in \mathfrak{D} Hermitesch, und A sei in \mathfrak{D} wesentlich selbstadjungiert. Außerdem gelte die Ungleichung

$$\|(B - A) x\| \leq k (\|x\| + \|A x\|) \quad \text{für } x \text{ aus } \mathfrak{D}.$$

Dann lassen sich A und B für $k < 1$ zu zwei in $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{D}$ selbstadjungierten Operatoren fortsetzen. Die zu B und A gehörigen linksstetigen Spektralscharen seien $\{F_{\lambda}\}$ bzw. $\{E_{\lambda}\}$. Ist das Spektrum von A im Intervall $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ leer, so hat man

$$\|F_{\lambda_0} - E_{\lambda_0}\| \leq \frac{k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|))}{2\sqrt{1-k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|))}},$$

sobald $k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|)) < 1$ *ist*¹²⁾.

¹²⁾ Dieser Satz enthält offenbar den Satz 7 aus RELICH [4].

Beweis.

I. Nach Voraussetzung läßt sich A zu einem in \mathfrak{M} selbstadjungierten Operator durch Abschließen fortsetzen. Ist x ein Element aus \mathfrak{M} , so gibt es eine Folge $\{x_n\}$ aus \mathfrak{D} mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A x_n - A x\| = 0.$$

Also wird

$$\|B(x_n - x_m)\| \leq k \|x_n - x_m\| + (1+k) \|A x_n - A x_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

B läßt sich also durch Abschließen zu einem in \mathfrak{M} Hermiteschen Operator fortsetzen. Die Tatsache, daß B in \mathfrak{M} selbstadjungiert ist für $k < 1$, wird genau so bewiesen wie in § 2, Satz 3.

II. Es seien $\{F_\lambda\}$ und $\{E_\lambda\}$ die zu B bzw. A gehörigen Spektralscharen. Setzt man

$$A' = A - \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE'_\lambda \quad \text{und} \quad B' = B - \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dF'_\lambda,$$

so gilt $E_{\lambda_0} = E'_0$ und $F_{\lambda_0} = F'_0$.

Aus

$$\|(B - A)x\| \leq k (\|Ax\| + \|x\|)$$

folgt

$$\begin{aligned} \|(B' - A')x\| &\leq k (\|A'x\| + (1 + |\lambda_0|) \|x\|) \\ &\leq k (1 + d^{-1} (1 + |\lambda_0|)) \|A'x\| = K \|A'x\|, \end{aligned}$$

wenn man $K = k (1 + d^{-1} (1 + |\lambda_0|))$ setzt.

Daraus ergibt sich

$$\|B'x\| \geq \|A'x\| - \|(A' - B')x\| \geq (1 - K) \|A'x\|,$$

also

$$\|A'x\| \leq (1 - K)^{-1} \|B'x\| \quad \text{und} \quad \|B'x\| \geq (1 - K) d \|x\|$$

für alle x aus \mathfrak{M} , sobald $K < 1$ wird. Hieraus folgt, daß die Operatoren

$$(A' + it)^{-1} \quad \text{und} \quad (B' + it)^{-1}$$

für $-\infty < t < \infty$ beschränkt sind.

Aus $\|(B' - A')x\| \leq K \|A'x\|$ folgt nach § 1, Satz 4, wenn darin $\tau = \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$|((B' - A')x, y)| \leq K \|A'x\|^{\frac{1}{2}} \|A'y\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x, y \text{ aus } \mathfrak{M}.$$

Weiter ergibt sich aus $\|A'y\| \leq (1 - K)^{-1} \|B'y\|$ unter Anwendung von § 1, Satz 3 mit $\tau = \frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$\|A'y\|^{\frac{1}{2}} \leq (1 - K)^{-\frac{1}{2}} \|B'y\|^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten also

$$|((B' - A')x, y)| \leq K (1 - K)^{-\frac{1}{2}} \|A'x\|^{\frac{1}{2}} \|B'y\|^{\frac{1}{2}}$$

für x, y aus \mathfrak{M} . Hilfssatz 3, § 2 mit $\varrho = 0$ liefert

$$\begin{aligned} (F'_0 - E'_0) f &= (2\pi)^{-1} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} [(A' + it)^{-1} - (B' + it)^{-1}] f \, dt \\ &= (2\pi)^{-1} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} (B' + it)^{-1} (B' - A') (A' + it)^{-1} f \, dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt für f, g aus \mathfrak{F} die Ungleichung

$$\begin{aligned} |((F_0 - E'_0)f, g)| &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |(B' - A')(A' + it)^{-1}f, (B' - it)^{-1}g| dt \\ &\leq (2\pi)^{-1} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1} f \| \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1} g \| dt \\ &\leq (2\pi)^{-1} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1} f \|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1} g \|^2 dt. \end{aligned}$$

Für $0 < t_1 < \infty$ und $0 < d_1 < d$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-t_1}^{+t_1} \| \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1} f \|^2 dt &= \int_{-t_1}^{+t_1} \left[\int_{|\lambda| \geq d_1} \frac{|\lambda|}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right] dt \\ &= \int_{|\lambda| \geq d_1} \left[\int_{-t_1/|\lambda|}^{t_1/|\lambda|} \frac{ds}{1+s^2} \right] d(E_\lambda f, f), \\ \text{also } \int_{-\infty}^{+\infty} \| \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1} f \|^2 dt &\leq \pi(f, f). \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1} g \|^2 dt \leq \pi(g, g).$$

Es ergibt sich also

$$|((F_0 - E'_0)f, g)| \leq \frac{1}{2} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \|f\| \|g\|.$$

Hieraus folgt

$$\|F_{\lambda_0} - E_{\lambda_0}\| \leq \frac{k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|))}{2\sqrt{(1-k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|)))}},$$

sobald

$$k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|)) < 1$$

ist.

Literatur.

- [1] HELLINGER-TOEPLITZ: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Enzyklopädie der Math. Wiss. II. 3b. — [2] HERGLOTZ, G.: Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, Leipz. Ber. 63 (1911). — [3] LÖWNER, K.: Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. 38, 177—216 (1934). — [4] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, II. Mitt. Math. Ann. 113, 677—685 (1937). — [5] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, III. Mitt. Math. Ann. 116, 555—570 (1939). — [6] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, V. Mitt. Math. Ann. 118, 462—484 (1941/43). — [7] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, Berichte des Internationalen Mathematikerkongresses in Cambridge (Mass.) 1950. — [8] RELICH, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, Math. Ann. 122, 343—368 (1950). — [9] SCHUR, I.: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, J. angew. Math. 140, 1—28 (1911). — [10] STONE, M. H.: Linear Transformations in Hilbert Space, New York 1932. — [11] B. v. SZ. NAGY: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Erg. Math. 5, 416—496 (1942). — [12] B. v. SZ. NAGY: Perturbations des Transformations Autoadjointes dans l'Espace de Hilbert, Comment. math. helvet. 19, 347—366 (1946/47).

(Eingegangen am 19. März 1951.)



